新版

数学辅导与训练

〔高中二年级用〕

黄汉禹　杨安澜　主编

上海科学技术出版社　　上海教育出版社

内 容 提 要

《数学辅导与训练》一书依据上海市数学学科课程标准编写而成．全书分学习要求，解题指导，疑难分析，基本训练，自我评估，本章测试等部分组成．本书通过提示各个知识要点，指导各类题的解法，让学生牢固掌握数学基础知识，提高学生分析和解决问题的能力．

责任编辑　周玉刚

编写说明

本书以学科课程标准为依据，内容紧密配合课本，旨在帮助学生克服学习上的困难，增长阅读能力和自学能力，提高学科素质，及时消化所学的知识内容（包括基本概念、基本理论、基本要求，以及有关的重点、难点），并为学有余力的学生提供一些深、宽度略高于课程标准的学习资料.

由上海中小学课程教材改革委员会组织编写的、供国家发达地区使用的中、小学数学教材，经过多年试用，越来越被广大教师、家长和社会认同与接受. 由于这套教材的成功，数学编写组曾于 1994 年获得了“苏步青教育奖”，在社会上取得了良好的信誉. 为更好地体现这套教材的精神，本辅导与练习每章按节在结构上由学习要求、知识要点、解题指导、疑难分析及基本训练等部分组成.

［学习要求］ 根据数学学科课程标准，简明扼要、恰如其分地分条列出教学要求.

［解题指导］ 精选例题，力求使每个例题都有其显明的目的性. 每个例题视其难易，设有分析、解（包括多种典型解法）、解后适当而恰如其分地提出“注意”、“说明”、“思考”、“研究”等项目. 这里“注意”是指解题的注意事项，指出其容易出错或疏忽的地方；“说明”是指通过本例阐明解题的一般规律，告诉学生解题的基本方法；“思考”是指当本例题的条件和结论作适当改变时，命题将起何变化，也在解题方法上提出思考性问题；“研究”是更高层次上的“思考”，使学生对某些数学规律能自我发现.

［疑难分析］ 将解题中的疑难所在作简明扼要的概括分析.

［基本训练］ 通过解题指导和疑难分析之后，让学生进行必要的、基本的解题训练，以使有关的数学知识和数学思想方法及时得到落实.

本书各章还进行简明扼要的小结，每章最后又有本章测试，可以进一步帮助学生巩固所学知识，加深理解，熟练技能，全面掌握本章的数学基本概念、基础知识、数学思想方法及其应用.

本书由上海中学、市西中学、控江中学等三所市重点中学的教师编写，作者们对书稿的体例和选材反复斟酌，力求充分体现以培养创新能力为核心的素质教育精神. 全书渗透了三校丰富的数学教学经验，一定程度上揭示了市重点中学数学教学的真谛. 编写过程中始终得到三校领导的大力支持，在此我们表示深深的谢意. 本书由黄汉禹、杨安澜主编，邹一心、周玉刚主审. 本书第八、第九章由杨安澜、金建军、翁正德编写，第十章由陶敬东编写，第十一章由郁汝璆编写，第十二章由郁汝璆、卢起升编写，第十三章由张颂方编写，参加本书编写的还有张志新，金辉，潘克飞等同志.

本丛书已在教学实践中使用了两至三轮。广大师生在教学过程中,一方面对本书的内容、编制的体例和格局深深厚爱;另一方面又热情地给我们指出了其中的一些不足之处。为使本书修改得更好,本版由市西中学杨安澜、张颂方、陶敬东进行了全面修订,黄汉禹审阅了修订稿。限于我们的水平,书中难免仍有不足之处,恳请广大师生、家长多提宝贵意见。

上海科学技术出版社
上 海 教 育 出 版 社
2001 年 5 月

目录

第八章 空间直线、平面

一、平面的性质

8.1 平　面

［学习要求］

1．理解平面的概念. 掌握用集合符号表示点与平面的位置关系及直线与平面的位置关系.

2．理解平面的基本性质，初步学会绘制简单的空间图形和进行简单的论证.

［知识要点］

1．平面

数学中所说的平面是一个只描述而不给定义的原始概念. 它无所谓大小、厚薄和宽窄，它在空间是无限伸展的. 这些与直线的概念相类似. 画平面时，通常画一个平行四边形来表示平面的表示法：如平面 M，平面 α，平面 AC（图 8.1）.

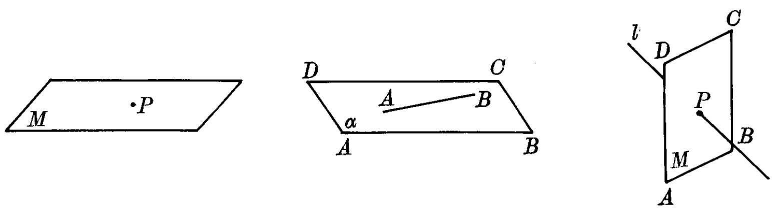


图　8.1

2．空间点、直线、平面位置关系的表示

通常把空间的点看作元素，那么直线是点的集合；平面也是点的集合，故点与直线，点与平面之间位置关系是元素与集合间的关系，而直线与平面之间是集合间的关系. 这样，点 P 在平面 M 内，表示为 $P\in$ 平面 M；直线 AB 在平面 α 内，表示为 $AB\subset\alpha$. 直线 l 与平面 AC 相交于点 P，表示为 $l\cap$ 平面 $AC=P$（图 8.1）.

3．平面的基本性质

公理 1　如果一条直线的两个点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内.

表示为：若 $A\in\alpha$，且 $B\in\alpha$，又 A、B 不重合，则 $AB\subset\alpha$.

其作用是，判断点在平面内；直线在平面内.

公理 2　如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线.

表示为，若 $A\in\alpha$，且 $A\in\beta$，又 α,β 不重合，则 $l\subset\alpha$. 且 $l\subset\beta, A\in l$.

其作用是确定两个平面的交线；确定直线和平面的交点位置；证明点在一直线上或三点共线.

公理 3 经过不在同一直线上的三点，有且只有一个平面.

表示为：若 A,B,C 为不同点，且 A、B、C 不同 $\in l$，则 A、B、C 确定一个平面.

以下推论 1,2,3 的集合符合表示，由读者自己表述.

推论 1 经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面.

推论 2 过两条相交直线，有且只有一个平面.

推论 3 过两条平行直线，有且只有一个平面.

这条公理及其推论的作用是，根据确定平面的条件作辅助平面，使空间的点、线转化到同一平面内，从而进行几何计算或几何论证.

［解题指导］

例 1 用集合的符号表示直线 l_1 和 l_2 相交于平面 α 内一点 P，并画出图形.

解 $$l_1\cap l_2=P，且 P\in\alpha.$$

这样的位置关系可能有三种情况：两条直线同在一个平面内；有一条直线在一个平面内，另一条不在此平面内；两条直线都不在此平面内，如图 8.2 所示.

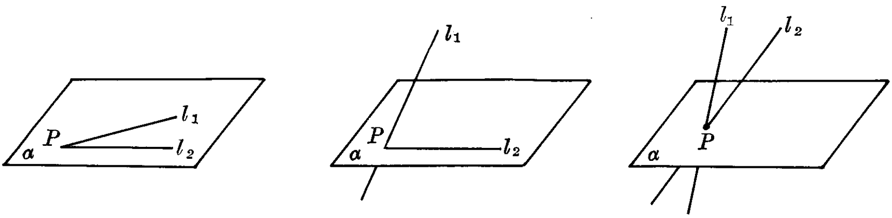


图 8.2

说明 直线与平面的位置关系，可分为直线在平面内或不在平面内两类. 直线不在平面内，有两种可能：$l\cap\alpha=P$ 或 $l\cap\alpha=\varnothing$.

例 2 如图 8.3 所示，正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，E，F 分别是 BB_1，B_1C_1 的中点. 问：直线 EF 和 BC 是否相交；如果相交，交点为 P，那么点 P 在哪几个平面内.

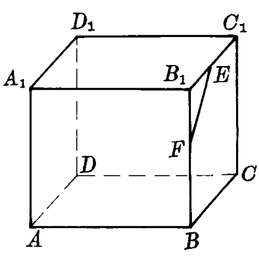


图 8.3

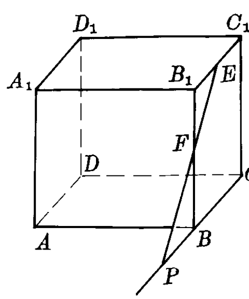


图 8.4

解 ∵ EF 和 BC 都在平面 BC_1 内，又 E，F 分别是 B_1C_1，BB_1 的中点，故 $EF\not\parallel BC_1$，

∴ EF 与 BC 相交，设 $EF\cap BC=P$（图 8.4）.

$\because \quad P\in BC$，而 $BC\subset$ 平面 BC_1，$\therefore \quad P\in$ 平面 BC_1；

又 $\because \quad BC\subset$ 平面 AC，$\therefore \quad P\in$ 平面 AC.

说明　因为一条直线在一个平面内，所以这条直线上的所有的点在这个平面内，这是证明点在一个平面的重要方法之一.

[疑难分析]

由于平面是可以无限伸展的，所以 $BC\subset$ 平面 AC，$P\in BC$，则 $P\in$ 平面 AC，不要误认为点 P 不在平面 AC 内(图 8.4).

例 3　如图 8.5，若平面 $\alpha\cap$ 平面 $\beta=a$，平面 $\gamma\cap$ 平面 $\alpha=b$，平面 $\beta\cap$ 平面 $\gamma=c$，又 $a\cap b=P$.

求证：直线 c 必过点 P.

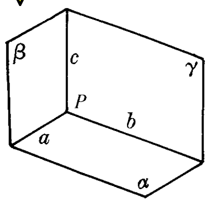


图　8.5

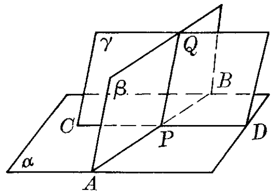


图　8.6

证明　$\because \quad \alpha\cap\beta=a$，$\gamma\cap\alpha=b$，又 $a\cap b=P$，

$\therefore \quad P\in\beta$ 又 $P\in\gamma$.

而 $\beta\cap\gamma=c$，$\therefore \quad P\in$ 直线 c，即直线 c 必过点 P.

说明　直线 c 必过点 P，也就是三直线 a,b,c 相交于一点. 这是在空间证明三线共点的重要方法之一.

[疑难分析]

怎样画三个平面有且只有一个公共点的立体示意图呢？

如图 8.6 所示，可以先画 $\alpha\cap\beta=AB$，在 AB 上取一点 P，过点 P 在平面 α 内作交线 CD，在平面 β 内作直线 PQ，然后由 CD 和 PQ 可画出平面 γ.

[基础练习 1]

1. 探究

用铁丝按以下要求折出实际图形，并画出空间图形.

三条直线两两相交，最多能确定几个平面，最少又能确定几个平面？如果四条直线两两相交，最多、最少能确定几个平面？ 如果 n 条直线两两相交又有怎样的结论？

2. 用集合符号表示下列语句，并画出图形.

(1) 直线 l 经过平面 α 外一点 M 和平面 α 内一点 N；

(2) 平面 α 和平面 β 相交于点 P，直线 a 在平面 α 内，但点 P 不在直线 a 上.

3. 选择题*

(1) 命题："直线 a 上的两点 A、B 在平面 α 内"不等价的命题是(　　)

* 本书中的选择题，每小题都给出了代号为 A、B、C、D 的四个结论，其中只有一个结论是正确的，把你认为正确的结论的代号写在题后的括号内，下同.

（A）直线 a 在平面 α 内.　　　　　　　　（B）平面 α 通过直线 a.

（C）直线 a 上只有两个点在平面 α 内.　（D）直线 a 上的所有的点都在平面 α 内.

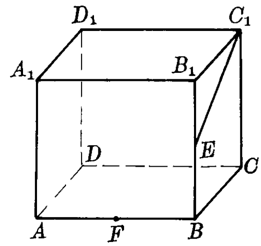
（2）下列四个命题中，真命题为（　　）

（A）两个平面 α,β 有一个公共点，就说平面 α,β 相交于过点 P 的任意一条直线.

（B）两个平面 α,β 有且只有一条公共直线 a，就说平面 α，β 相交，记作 $\alpha\cap\beta=a$.

（C）两个平面 α,β 有一个公共点 P，就说平面 α,β 相交于 P 点，记作 $\alpha\cap\beta=P$.

（D）平面 ABC 与平面 DBC 相交于线段 BC.



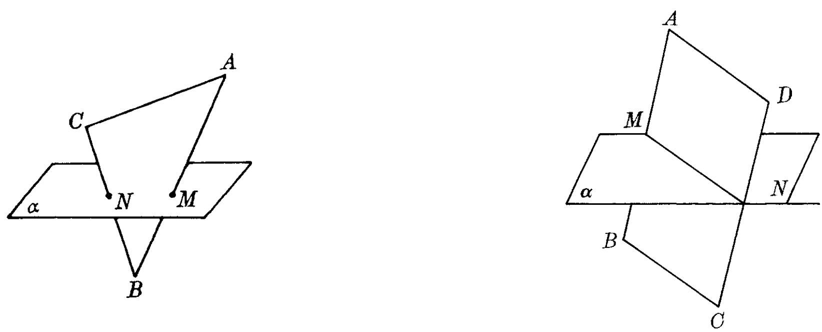
（第 4 题）

4. 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D$ 中，E 是 BB_1 的中点，试证明：

（1）直线 C_1E 和 BC 的交点 P 必在平面 $ABCD$ 内；

（2）若 F 是 AB 的中点，则三点 D、F、P 在一直线上.

5. （1）若 $AB\cap$ 平面 $\alpha=M$，$BC\cap$ 平面 $\alpha=N$，试画出直线 AC 与平面 α 的交点.



（1）　　　　　　　　（2）

（第 5 题）

（2）若平面 $AC\cap\alpha=MN$. 试画出 AC 与平面 α 的交点.

例 4　试证：如果两条平行线中的一条与一个平面相交，那么另一条也必与这个平面相交.

已知：$l_1/\!/l_2$，$l_1\cap\alpha=A$（图 8.7）.

求证：l_2 与平面 α 相交.

证明　∵　$l_1/\!/l_2$，∴　过 l_1,l_2 可以确定一个平面，不妨设为 β.

∵　$A\in l_1$，∴　$A\in\beta$.

又　∵　$A\in\alpha$，∴　平面 α,β 必相交于过点 A 的一直线 l_3.

即 l_1,l_2,l_3 都在平面 β 内.

∵　$l_1/\!/l_2$，$l_1\cap l_3=A$，

∴　l_2 与 l_3 必相交，交点为 B.

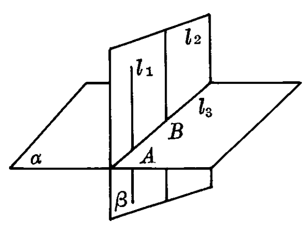


图　8.7

则 $B\in l_3, B\in\alpha$，∴ $l_2\cap\alpha=B$.

说明 本题欲证 l_2 与平面 α 相交，转化为在同一平面内直线与直线相交的问题，这种转化的思想是研究空间图形位置关系的常用方法.

例 5 已知直线 l 上有三点 A、B、C，过这三点分别作互相平行的直线 a, b, c（图 8.8）.

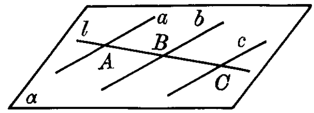


图 8.8

求证 l, a, b, c 四条直线共面

证法 1 ∵ $l\cap a=A$，∴ 过直线 l 和 a 可以确立一个平面，设为 α.

∵ $l\cap b=B$，∴ $B\in\alpha$.

在平面 α 内过点 B 作直线 b'，使 $b'\parallel a$.

根据过直线外一点有且只有一条直线与该直线平行的性质，则直线 b' 和 b 必是重合的，即 $b\subset\alpha$.

同理可证 $c\subset\alpha$.

∴ l, a, b, c 四条直线共面.

证法 2 ∵ $a\parallel b$，∴ 过直线 a, b 可以确定一个平面 α，则 $a\subset\alpha, b\subset\alpha$，而 $A\in a, B\in b$，∴ $A\in\alpha, B\in\alpha$. ∴ $l\subset\alpha$.

∵ $a\parallel c$，故由 a, c 可确定一个平面 β. 且有 $l\subset\beta$.

∴ 平面 α 和 β 都经过相交直线 l 和 a.

故平面 α 和 β 重合. 即直线 l, a, b, c 共面.

[疑难分析]

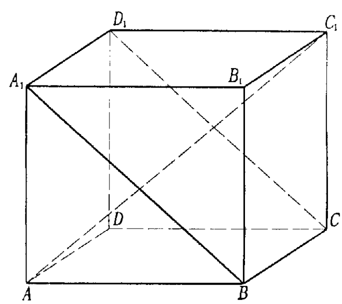
怎样证明若干直线共面？

证明若干直线共面的方法有两种：其一，先证两条直线可以确定一个平面，再证其他直线均在这个平面内；其二，把若干直线，按两两分为几组，由各组确定一个平面，再证明这若干个平面重合.

[基础练习 2]

1. 探究

在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，试画出 AC_1 和平面 A_1BCD_1 的交点 O. 想一想：点 O 是否是正方体的对角线 AC_1 和 BD_1 的交点，为什么？



（第 1 题）

2. 空间有五个点，如果其中任意四点都不共面，那么经过其中三个点的平面最多有________个.
3. 一条直线和这条直线外的不在同一直线上的三点最多可以确定________个平面.
4. 五条两两相交的直线，如果其中任意三条直线都不共点，那么经过其中两条直线的平面，至少有________个.
5. 选择题：

空间中有共面而不共线的四个点 A、B、C、D，那么（ ）

(A) 四点中必有三点共线.

(B) 四点中必有三点不共线.

(C) AB、BC、CD 和 DA 四条直线中有两条互相平行.

(D) AB、BC、CD 和 DA 四条直线中必有两条重合.

6. 证明：空间不共点且两两相交的四条直线在同一平面内.

例 6　如图 8.9 所示，空间四边形 $ABCD$ 各边上的点分别是 M、N、P、Q.

(1) 求证：当 M、N、P、Q 分别是各边的中点时，则 M、N、P、Q 共面；

(2) 求证：当 $MN \not\parallel PQ$，且 MN、PQ 共面时，则直线 MN，BD，PQ 共点.

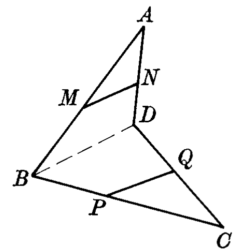


图　8.9

证明　(1) ∵　M、N 分别是 AB、AD 的中点，∴　$MN \parallel BD$.

同理 $PQ \parallel BD$　∴　$MN \parallel PQ$

∴　由 MN、PQ 可确定一个平面.

故点 M、N、P、Q 共面.

(2) ∵　MN、PQ 共面且 $MN \not\parallel PQ$，∴　MN 和 PQ 相交，设交点为 T.

∴　$T \in$ 平面 ABD，又 $T \in$ 平面 BCD.

故 $T \in BD =$ 平面 $ABD \cap$ 平面 BCD. 即直线 MN、BD、PQ 三线共点.

[疑难分析]

怎样证明三线共点？

证明三线共点的方法是，先证明两条直线相交，再证明第三条直线必经过这个交点. 而证明第三条直线必过这个交点，往往运用平面性质 2.

例 7　已知：正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，E，F 分别为 AB，BC 的中点(图 8.10)，试论述过点 E，F，D_1 的截面的形状，并把它画出来.

分析　∵　平面 $D_1EF \cap$ 平面 $AC = EF$. 在平面 $ABCD$ 内延长 EF，分别交 DA，DC 直线于 KL，在平面 AD_1 内，连结 KD_1，同样连结 D_1L.

D_1K 交 AA_1 于 P，D_1L 交 CC_1 于 Q.

分别连结 D_1P，PE，FQ，QD_1，则过点 E，F，D_1 的截面形状是五边形 D_1PEFQ.

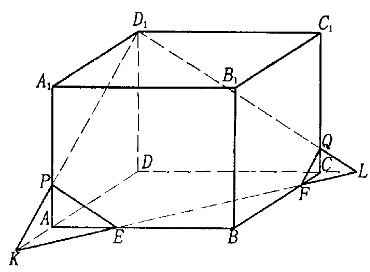


图　8.10

作法　略.

[疑难分析]

怎样画出这一类过三点的截面呢？

解这一类问题的关键是逐一画出截面与被截面的交线，也就是说，本题关键是如何分别求得截面与平面 AD_1、与平面 DC_1、平面 A_1B、平面 BC_1 的交线. 利用平面性质 2，把它又转化为求两个平面的公共点.

注意　本题不要误认为所得的截面就是 $\triangle EFD_1$.

基本训练 8.1

一、选择题

1. 已知点 P 不在直线 l 上，l 在平面 α 内，则 P、l、α 之间的关系是（　　）

(A) $P\notin l$ 且 $l\in\alpha$.　　(B) $P\not\subset l$ 且 $l\subset\alpha$.

(C) $P\notin l$ 且 $l\subset\alpha$.　　(D) $P\notin l$ 且 $l\not\subset\alpha$.

2. 下面四个条件中，能确定一个平面的是（　　）

(A) 空间任意三点.　　(B) 空间两条直线.

(C) 两条平行直线.　　(D) 一条直线和一个点.

3. 若三条直线两两相交，则最多可确定平面的个数是（　　）

(A) 三个平面.　　(B) 四个平面.　　(C) 五个平面.　　(D) 六个平面.

4. 一条直线和一个平面最多的公共点数是（　　）

(A) 一个.　　(B) 两个.　　(C) 三个.　　(D) 无数个.

二、填空题

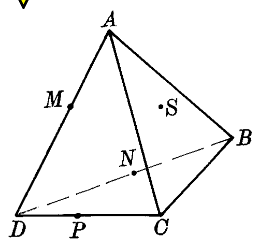
1. 在空间四边形 $ABCD$ 中连结对角线 AC、BD，组成四面体 $ABCD$（如图），已知 M、N、P 分别在棱 AD、BD、CD 上，S 在平面 ABC 内，试分别画出：

(1) 过点 M、N、P 的平面截四面体 $ABCD$ 的截面；

(2) 过点 D、A、S 的平面截四面体 $ABCD$ 的截面；

(3) 画出平面 MPN 与平面 DAS 的交线；

(4) 画出直线 SD 和平面 MPN 的交点.

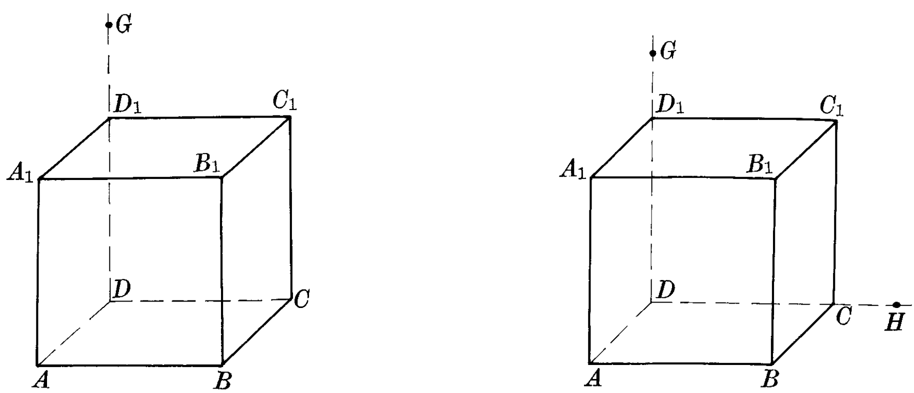


（第 1 题）

2. 已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，试过下列三点作出它的截面：

(1) 过 A、C 及 DD_1 延长线上一点 G，且 $D_1G=\frac{1}{2}DD_1$；

(2) 过点 A 及 DD_1 延长线上一点 G，$D_1G=\frac{1}{3}DD_1$，且过 DC 延长线上的一点 H，$CH=\frac{1}{3}DC$.



(1)　　(2)

（第 2 题）

3. 四条直线相交于一点，那么它最多可确定平面的个数是____________.

4. 两个平面重合的条件是它们有____________个公共点.

5. 设 E、F 是空间四边形 $ABCD$ 的边 AD、BC 的中点，那么 EF ____ $\frac{1}{2}(AB+CD)$.（填“$>$”、“$<$”、“$=$”）

6. 若 A、B、C 三点都是两个不重合的平面的公共点，则 A、B、C 三点必定________，依据是________.

三、（1）有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等；（2）两组对边分别相等的四边形是平行四边形；（3）一组对边平行且相等的四边形是平行四边形；（4）四边相等的四边形是菱形；

试问上述四个平面几何中的定理在立体几何中是否仍成立？对于不成立的请举出反例.

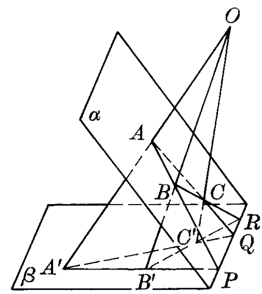
四、求证：与同一条直线都相交的三条平行直线可确定一个平面.

五、两个平面把空间分成几个部分？画图表示各种情况.

六、三个平面把空间分成几个部分？画图表示各种情况.

七、三条不共面的直线 OA、OB、OC 分别与两个平面 α 和 β 交于 A、B、C 和 A'、B'、C'，AB 与 $A'B'$，BC 与 $B'C'$，AC 与 $A'C'$ 分别相交于 P、Q、R.

求证：P、Q、R 三点共线.



（第七题）

二、空间的两条直线

8.2 直线与直线的平行

[学习要求]

1. 理解平行线的概念及公理 4.
2. 掌握等角定理及其推论.
3. 会过一点作一直线的平行线，并利用平行的传递性证明两直线平行.

[知识要点]

1. 平行线的有关概念

（1）两条直线平行的定义：在同一平面内，两条不相交的直线叫平行线.

（2）平行线的基本性质：

① 过直线外一点，有且只有一条直线与其平行.

② 公理 4　平行于同一条直线的两条直线互相平行. 即若 $l_1 \parallel l_2$，又 $l_2 \parallel l_3$，则 $l_1 \parallel l_3$.

此公理既是论证等角定理的依据，又是判定两条直线平行的依据.

2. 等角定理及其推论

等角定理　如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行且方向相同或相反，那么这两个角相等.

推论　如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么由这两组直线所成的锐角

（或直角）相等.

推论揭示了在空间两条相交直线所成的锐角（或直角）经平行变换后角的大小的不变性. 这是研究和计算空间两条直线所成角的一种重要方法——平移法. 这一推论是平移法的理论依据.

［解题指导］

例 1 如图 8-11 所示，长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，P 是 AA_1 上的一点，Q 是 AB 上一点. 试分别过点 P、点 Q 画侧面 BCC_1B_1 的对角线 BC_1 的平行线，并说明理由.

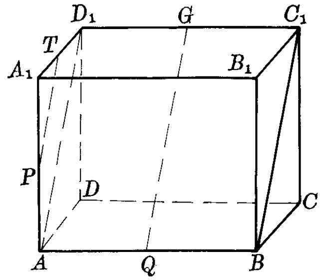


图 8-11

解 （1）连结 AD_1 在平面 AD_1 内，作 $PT /\!/ AD_1$，则 PT 就是平行于 BC_1 的直线.

理由：∵ 在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，

$AB \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} D_1C_1$，

∴ 四边形 ABC_1D_1 是平行四边形.

∴ $AD_1 /\!/ BC_1$.

根据作法，$PT /\!/ AD_1$，∴ $PT /\!/ BC_1$.

（2）∵ Q 是 BC_1 外一点，∴ 过 Q、BC_1 可以确定一个平面，而这个平面就是由直线 AB 和 D_1C_1 所确定的平面 ABC_1D_1.

在平面 ABC_1D_1 中，过点 Q 作 $QG /\!/ BC_1$，则 QG 就是所作的直线.

［疑难分析］

在空间如何过直线外一点，作该直线的平行线？

如图 8-12 所示，点 $A \notin$ 直线 l，可先过点 A 和直线 l 作平面 α，然后在平面 α 内，过点 A 作直线 $a /\!/ l$. 由此将空间问题转化为平面问题来解决.

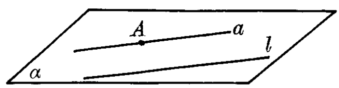


图 8-12

这个平面 α 称为作图中的辅助平面，有时可以不直接画出来，但实际上必须先有辅助面，再作平行线.

例 2 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中（图 8-13），已知 E，F 分别是正方形 BB_1C_1C 和正方形 DD_1C_1C 的中心，G，H 分别是 CB 和 CD 的三等分点，求证：$GH /\!/ EF$.

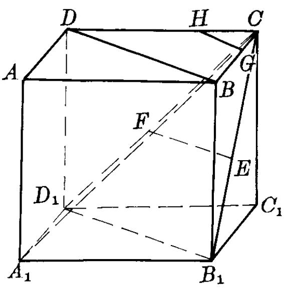


图 8-13

证法 1 分别连结 B_1C，D_1C 和 DB.

∵ E，F 分别是正方形 BB_1C_1C 和正方形 DD_1B_1C 的中心，∴ $EF /\!/ D_1B_1$.

又 ∵ $CH=\frac{1}{3}CD$，$CG=\frac{1}{3}CB$，∴ $GH /\!/ DB$.

又 ∵ 四边形 DD_1B_1B 是平行四边形，∴ $DB /\!/ D_1B_1$.

∴ $EF /\!/ GH$.

证法 2 分别取 BC，CD 的中点 N、M（图 8-14）.

连结 EN、FM，则 $NE \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \frac{1}{2}BB_1$，$MF \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \frac{1}{2}DD_1$，而 $BB_1 \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} DD_1$.

∴ $NE \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} MF$. ∴ 四边形 $MFEN$ 是平行四边形，∴ $MN /\!/ FE$.

∵ $HG /\!/ MN$，∴ $HG /\!/ FE$.

说明　证明空间两条直线平行的问题，可以用公理 4，用平移法，转化为在同一个平面内的两条直线平行的问题. 这是研究空间线线位置关系常用的思维方法.

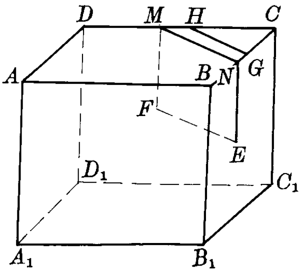


图　8-14

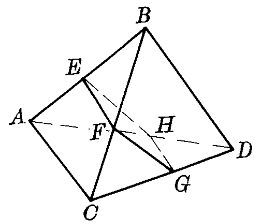


图　8-15

例 3　如图 8-15 所示，在空间四边形 $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点，

（1）求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

（2）回答　当空间四边形 $ABCD$ 在上述条件下，又具有什么条件时，$FH\perp EG$.

（1）证明　∵　E，H 分别是 AB，AD 的中点，

∴　$EH \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BD$.

同理，$FG \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BD$，∴　$EH \underline{\underline{\parallel}} FG$.

所以四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

（2）解　欲使 $FH\perp EG$，四边形 $EFGH$ 应是菱形，也就是 $EH=EF$，而 $EH=\frac{1}{2}BD$，$EF=\frac{1}{2}AC$，

故空间四边形 $ABCD$ 中，$AC=BD$.

说明　这是一个空间图形与平面图形位置关系的相互转化的问题，请读者再探求一下，当空间四边形 $ABCD$ 具有什么特性时，四边形 $EFGH$ 是矩形；正方形.

［基础练习］

1. 探究

在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，若点 M 在 BC_1 上，试过点 M 作 BD_1 的平行线 l，并确定 l 与平面 A_1C_1 的交点 N. 若点 M 在 BB_1 上同样作 BD_1 的平行线，怎样确定点 N 的位置. 由此想一想，若 M 点在平面 BC_1 上的任意一点，如何按上述要求画出平行线，并确定点 N. 由此可否得出过直线外一点，画该直线的平行线的规律.

2. 在空间四边形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 是 AB、CB、CD、DA 的中点，若 $AC=BD$，则四边形 $EFGH$ 是________.

3. 如果 E、F、G、H 顺次是空间四边形 $ABCD$ 四条边的中点，且 $EG=3$，$FH=4$，那么 $AC^2+BD^2=$____________.

4. 已知：平面 $\alpha\cap$ 平面 $\beta=a$，平面 $\beta\cap$ 平面 $\gamma=b$，平面 $\alpha\cap$ 平面 $\gamma=c$，且 $b\parallel c$.

试证：$a\parallel b\parallel c$.

5. 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别是 AB、BC 的中点.