最新版 21 世纪高等学校导学与导考教材

数学分析中的“$\varepsilon-\delta\,(N)$”证题法

马保国　编

陕 西 科 学 技 术 出 版 社

需要全本请访问 www.ertongbook.com

内 容 提 要

全书围绕数学分析中极限理论学习中的“$\varepsilon-\delta$ (N)”证题法组织内容，在对数学分析中极限的 $\varepsilon-N$、$\varepsilon-\delta$ 定义进行了较为详细的诠释后，给出了数列极限与函数极限的各种不同类型的 $\varepsilon-\delta$ (N) 语言描述，然后重点介绍了用“$\varepsilon-\delta$ (N)”法证明极限的基本方法，引导读者掌握最基本的极限证明技能，同时对各种证明方法进行了归纳总结．最后就连续和一致连续、一致收敛及实数的完备性等问题中的 $\varepsilon-\delta$ 论证方法进行了介绍．为使读者在学习过程中进行有针对性的练习，书中还配备了较多的练习题．

图书在版编目 (CIP) 数据

数学分析中的“$\varepsilon-\delta$ (N)”证题法／马保国编．—西安：陕西科学技术出版社，2005.8

ISBN 7-5369-3963-9

Ⅰ.数… Ⅱ.马… Ⅲ.极限 (数学) Ⅳ.0171

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 059000 号

出 版 者	陕西科学技术出版社
	西安北大街 131 号 邮编 710003
	电话 (029) 87211894 传真 (029) 87218236
	http：//www. snstp. com
发 行 者	陕西科学技术出版社
	电话 (029) 87212206 87260001
印 刷	西安市建明工贸有限责任公司
规 格	880mm×1230mm 1/32 开本
印 张	7.25
字 数	182 千字
印 数	1～3000 册
版 次	2005 年 8 月第 1 版
	2005 年 8 月第 1 次印刷
定 价	14.00 元

版权所有 翻印必究

(如有印装质量问题，请与我社发行部联系调换)

前　言

数学分析对于大学数学类专业和其他许多专业的重要性是无须多言的．由于它是一门主干基础课，所以人们一般都非常重视．但是，数学分析课程内容多，教学任务重，尽管极限内容的学习质量对整个课程内容的掌握至关重要，教师也不可能在课堂教学中，就极限中的解题方法和技巧展开充分的讨论．因而大量的训练要学生自觉来完成，可这对初学者来说谈何容易，特别是刚进校的一年级同学，尽管他们做了种种努力，即使是学完了数学分析内容的读者，也可能对于极限理论这部分内容，仍然感到方法深奥，变化莫测，做题困难，根据作者多年教学经验的积累，形成了本书的主要内容，希望能帮助读者，走出这一困境．

全书共分为七部分．第一部分是引言，主要就高等数学与初等数学的本质区别，极限概念学习中的困难所在，以及学习极限时应注意的问题，进行了概括性的阐述，以使读者对本书所要讨论的问题有一清晰的认识．第二部分是极限的 $\varepsilon-N$、$\varepsilon-\delta$ 定义与注释，主要讨论数列极限和函数极限的各种定义，通过典型的例题和详尽的注释，阐明各种定义的要点．这一部分内容是全书讨论的中心议题之一，通过它会使读者对极限概念的理解得以进一步的升华，为后面的学习奠定基础．第三部分用“$\varepsilon-\delta$ (N)”法证明极限，通过大量的例题，介绍了最基本的用极限定义证明极限的方法即“$\varepsilon-\delta$ (N)”证题法．这部分是全书的核心，通过分析解题思路对各种证明方法的归纳总结，探究解题规律，指导解题的实践，提高解题能力．第四部分是极限不是常数和极限不存在的例子．主要是讨论用极限定义证明极限不存在的基本方

法，对初学者同样也是重要的．初学者常常对数学分析中极限定义的否定不能很好的掌握，所以影响整个课程的学习，因此我们选择了一些最常见的例题，来讨论这方面的问题．第五部分通过例子总结和介绍了连续与一致连续中的“$\varepsilon-\delta$ (N)”论证方法．由于连续函数是数学分析研究的主要对象，所以我们组织了连续性问题中许多典型例子，并给出了详细的证明．通过学习，可以巩固连续性的有关理论与应用问题．第六部分是一致收敛性问题中的“$\varepsilon-\delta$”论证方法．可以说，一致收敛性问题，贯穿数学分析学习的全过程，而它的讨论也离不开“$\varepsilon-\delta$ (N)”论证方法，有的甚至需要较高的技巧，故安排了这些内容．第七部分实数完备性定理的证明与应用问题．实数完备性定理的学习是数学分析的重点和难点，我们通过对例题与习题的讲解，总结了用实数完备性定理证题的基本规律，希望对读者有所启迪.

本书可作为大学数学专业学生学习《数学分析》的教学参考书，对于学习高等数学的同学来说，同样也是一种有益的课外读物．当然，也可作为青年教师备课时的参考资料.

由于作者水平有限，不足之处在所难免，诚恳希望广大读者提出宝贵意见，以便今后更正、改进.

作　者

2005 年 6 月

目　录

1　引言 …… (1)

1.1　高等数学与初等数学的差别 …… (1)

1.2　极限概念学习的困难所在与极限的“$\varepsilon-\delta$ (N)”证题法 … (2)

1.3　学习极限时应注意的问题 …… (3)

2　极限的“$\varepsilon-N$”、“$\varepsilon-\delta$”定义与注释 …… (5)

2.1　数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义 …… (5)

2.2　数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义的注释 …… (5)

2.3　与极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 等价的若干表述和与它不等价的表述 …… (7)

2.4　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq a$ 与数列 $\{a_n\}$ 不存在极限 …… (12)

2.5　函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义 …… (15)

2.6　函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义的注释 …… (19)

2.7　与 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 等价的若干表述 …… (20)

2.8　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在 …… (22)

2.9　极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ …… (23)

3　用“$\varepsilon-\delta$ (N)”法证明极限 …… (26)

3.1　用“$\varepsilon-\delta$ (N)”法证明极限的一般步骤 …… (26)

3.2　用“$\varepsilon-\delta$ (N)”法证明极限的关键 …… (30)

3.3　用“$\varepsilon-\delta$ (N)”法证明极限的方法与例题 …… (31)

需要全本请访问 www.ertongbook.com

3.3.1 直接证法 …… (31)
练习题 1 …… (36)
3.3.2 间接证法 …… (36)
1. 简单放大 (缩小) 法 …… (36)
练习题 2 …… (42)
2. 限制放大 (缩小) 法 …… (42)
练习题 3 …… (48)
3. 用二项式定理放大 (缩小) 法 …… (49)
练习题 4 …… (52)
4. 分段放大 (缩小) 法 …… (53)
练习题 5 …… (56)
5. 用递推公式放大 (缩小) 法 …… (57)
3.3.3 用柯西收敛准则证明极限存在 …… (62)
练习题 6 …… (68)
4 极限不是某常数和极限不存在的证明 …… (69)
4.1 用极限定义证明数列或函数极限不是某常数 …… (69)
4.2 用极限定义证明数列或函数极限不存在 …… (72)
4.3 用柯西收敛准则证明函数极限不存在 …… (75)
4.4 用归结原则证明函数极限不存在 …… (78)
练习题 7 …… (81)
5 进一步的例题 …… (83)
6 函数的连续性与一致连续性 …… (98)
6.1 利用连续性的定义证题 …… (100)
6.2 利用一致连续性的定义与否定证题 …… (103)
6.3 一致连续与连续的关系 …… (109)

练习题 8 …… (112)
7 一致收敛性问题 …… (113)
7.1 函数列与函数项级数中的一致收敛性 …… (113)
7.2 含参量非正常积分中的一致收敛性 …… (118)
练习题 9 …… (125)
8 极限证明中的几种重要的方法 …… (127)
8.1 利用单调有界定理证明极限 …… (127)
8.2 利用迫敛性定理证明极限 …… (132)
8.3 利用 Stolz 定理求极限 …… (137)
练习题 10 …… (143)
9 实数的完备性 …… (144)
9.1 实数的完备性定理与特征 …… (144)
9.2 实数完备性定理的证题规律 …… (146)
9.3 实数完备性定理的等价证明 …… (148)
9.4 实数完备性定理的应用 …… (157)
练习题 11 …… (162)
10 综合例题 …… (163)
练习题参考答案 …… (179)
参考文献

1 引 言

数学分析是用精确数学语言和形式逻辑结构表达描述运动变化过程而形成的一门称之为变量数学的学科．是高等院校数学专业的一门主干基础课，学好这门课程，对于整个高等数学的学习尤其重要，所以一直受到广大教师和学生的普遍重视．由于这门课程是学生进入大学后的第一门高等数学课程，从概念、理论方法上较中学数学有根本性的变化，一时难以适应．特别是，极限理论部分的内容更是困难重重．如何帮助他们渡过极限理论中“$\varepsilon-\delta$ (N)”论证法这一较为困难的基础环节，是每个从事《数学分析》教学的同行们不断探索的问题之一．

本书就试图较详细地讨论极限的“$\varepsilon-\delta$ (N)”定义及其实质和用“$\varepsilon-\delta$ (N)”法论证有关命题的常见方法，以使初学者透过大量的分析和例子，掌握有关的论证技能，为学好数学分析奠定扎实的基础．

1.1 高等数学与初等数学的差别

为了明确数学分析（高等数学）中极限理论重要意义，首先必须明白高等数学与初等数学的差别．高等数学与初等数学的差别，除了研究对象不同，高等数学主要研究的是变量数学，初等数学研究的主要是常量数学之外，主要是研究方法上的不同。初等数学研究方法是建立在有限的观念之上，而高等数学的研究方法则是根植于无限的观念之上．如初等数学中为了求得一个数，

通过有限步的代数运算，即可得出其精确值．但在客观世界中存在着这样一类数，若只进行有限步代数运算，无法求得其精确值．例如，圆的周长和面积，用有限步代数运算就不能求得其准确值，必须通过无限步逼近，即极限的方法，才能求得它们的准确值，这就是高等数学的方法．又比如，初等数学中要确定数的性质，譬如说，要判定一个数是否为质数，通过有限步运算，就能断言；而高等数学中要确定函数的某种性质，就要通过极限的方法才能断定它是否有该种性质，要判定一个函数在某一点处是否连续或可导，我们就必须去讨论相应形式的极限．因此，我们说高等数学和初等数学最主要的、最本质的差别，还在于研究方法上的不同．所以要学好高等数学，首要的是深刻领会极限方法的根蒂，并能在各种问题的研究中灵活地去使用极限方法，这也是说要学好高等数学，首先必须学好极限理论．要学好极限理论就必须学好极限的概念及相关的论证方法．

1.2 极限概念学习的困难所在与极限的“$\varepsilon-\delta$（N）”证题法

极限概念是数学分析中最重要的概念，这不仅仅是因为数学分析中的许多重要概念（连续、导数、积分等）都是用极限定义的，而且，由极限概念出发形成的极限理论是数学分析乃至整个分析数学的基础．从极限概念出发产生的极限方法是数学分析的基本方法．很好地理解极限思想，掌握极限方法是数学分析学习的关键，同时对于整个高等数学的学习也具有决定性的意义．

极限概念，对于初学数学分析的一年级大学生常常感到不易理解，更难于掌握．尤其是用极限的定义来论证有关极限问题时，更是束手无策．究其原因主要是：1．中学阶段的学习中，没有见到过无限的数学模型，更没有变化过程这样的实践，可是在极限的定义中，恰巧有两个无限，“无限增加”、“无限接近

(趋于) 某常数”. 而这两个“无限”又是极限概念的核心. 从字面上说，两个“无限”似乎并不难理解，但它们的实质却使初学者茫然. 因此，通过实践逐步对无限有比较全面的、正确的认识是深刻理解极限概念的前提.2. 极限概念中充满了辩证法，但同学们往往一时不能摆脱初等数学中有限的思维方法，而用辩证逻辑的飞跃式的思维方法去认识问题. 只有掌握了认识无限的辩证逻辑思维方法，才能深刻理解极限概念.3. 由于两个“无限”，同学们在使用数学语言来表达它们时，往往不得要领,丢三落四，前后顺序倒置的现象也时有发生,因而学会用有限描述无限的数学方法,逐步体会到用数学语言表达极限概念的必要性、准确性和优越性,是掌握极限概念的关键. 总而言之,极限概念反映了有限与无限相互转化的辩证关系,尤其对初学者,无疑是一个飞跃.

极限方法是用来研究变量问题的基本方法，极限也是人们从有限认识无限、从均匀认识不均匀、从近似认识精确的一种数学思想. 极限概念体现了变量和常量的对立统一，本质上是客观世界量变转化为质变过程的一种反映,极限是数学分析的理论基础,用极限可以把连续、导数、积分、级数收敛等概念形式化地统一处理,从而使数学分析理论简明统一. 从方法上讲,极限方法是数学分析的基本方法. 掌握好极限概念和理论就为学好数学分析打下了坚实的基础,掌握好极限方法就练好了数学分析的基本功.

要掌握极限的概念和方法，首先必须掌握极限的“$\varepsilon - N$”、“$\varepsilon - \delta$”定义. 在数学分析 (或高等数学) 中，把用极限的“$\varepsilon - N$”，“$\varepsilon - \delta$”定义验证或进行有关证明的方法称为“$\varepsilon - \delta\ (N)$”证题法，它是数学分析中的主要论证方法之一，是数学分析 (高等数学) 学习的一项基本功，能否灵活运用极限方法，解决数学分析中的有关问题，是学好数学分析的重要标志.

1.3 学习极限时应注意的问题

极限理论是现代数学的基础，学好它至关重要. 在极限理论

的学习中,极限概念常常是初学者难于理解和掌握的一个基本而又重要的概念．在学习这一概念时,应注意以下几个方面的问题.

首先，在数列（函数）极限的定义中有两个无限，必须引起初学者的高度重视．由于无限这种数学模型在中学阶段的学习和生活中接触较少，或者我们没有太多地去关注它们，去研究它们，当然也就没有无限变化过程这样的实践，而这两个无限，是极限定义的精髓．从字面上说，两个无限似乎不难理解，但追究其实质时又觉茫然。因此在学习极限时，要通过各种有关实际例子，逐步对无限有一个全面正确的认识，这是学好极限的前提．

其次，培养辩证逻辑的飞跃式的思维方法。这种思维方法是高等数学思想方法的立足之点．这种科学的思维方法不仅引导人们看到，无限过程永无终结，同时它又指导人们飞跃式的看到无限过程的“终结”．例如，圆的无限多个内接正多边形的周长构成的数列的变化是永无终结的．若仅仅停留在有限过程或没完没了的变化过程的话，人们永远也不能认识圆的周长．通常初学者，不理解或不掌握认识无限的辩证逻辑思维方法，而感到极限难学，为此应通过数列极限的大量实例，逐步掌握认识无限的辩证逻辑思维方法．

最后，应看到无限不能脱离有限而存在，没有有限也就没有无限．因此，定量地刻画无限，必须借助一系列无限多个项数来完成，数列极限的定义亦如此．但是初学者常常感到，数学中有些概念其数学意义似乎并不难理解，但将其用数学语言叙述出来，反而难以理解．就像数列极限的定义，为将两个无限表达的更加准确，更加清晰，我们采用了“$\varepsilon-N$”的数学语言．这样一来，反而使大家一时不能理解其精神实质，因此应逐步学会用有限描述无限的方法，慢慢地去体会用数学语言表达数列极限（函数极限）定义的必要性、准确性和优越性．

需要全本请访问 www.ertongbook.com

2 极限的“$\varepsilon - N$”、“$\varepsilon - \delta$”定义与注释

2.1 数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义

数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义是极限理论的重点、核心，学好它对深入理解极限理论的实质具有重要的指导意义，同时也是学习函数极限 $\varepsilon - \delta$ 定义的基础．为完整起见，将数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义列在下面．

定义 1 设 $\{a_n\}$ 是任意一个数列，a 是某常数，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 自然数 N，使得 $n > N$ 时，有

$$| a_n - a | < \varepsilon,$$

则称 $\{a_n\}$ 收敛于 a，也称 a 为数列 $\{a_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 或 $a_n \to a$ $(n \to \infty)$．

这就是数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义．有时为方便可简单地写作：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \text{(自然数)}, \forall n > N \Rightarrow | a_n - a | < \varepsilon. \tag{1}$$

定义 1 的几何意义：

对于任意一个以 a 为中心，$\varepsilon > 0$ 为半径的开区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$，总可以在数列 $\{a_n\}$ 中找到某一项 a_N，使得其后的所有项，都落在这个开区间内，而在该区间之外，最多只有 $\{a_n\}$ 的 N 项．

2.2 数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义的注释

从定义 1 可见，用 $\varepsilon - N$ 语言定义的数列极限，文字符号较多，

叙述冗长,比较难懂．特别是,由于研究的对象数列 $\{a_n\}$,是一个用变量表示的无限数学模型,这种研究对象和研究方法上的同时改变,即从“常量”到“变量”,从“有限”到“无限”,使初次学习者深感困难．为了掌握该定义的精神实质,就要对 ε 与 N 在定义中的作用及其特征有一个比较清晰的认识和准确的理解,为此我们特作如下的注释．

1° 关于 ε 的注释

任意小正数 ε 的作用主要是用来刻画数列 $\{a_n\}$ 中的项 a_n 与常数 a 的接近程度．概括地说,ε 有两个重要特征:一是它的任意性,即 ε 可以任意选取 (只要大于零),这是 ε 的本质特征;二是它的相对固定性,ε 虽然可以任意选取、给定,但是一经给出就相对固定了下来,作为一个固定的数对待．这也就是人们常说的 ε 的二重性．

ε 的二重性给我们指出,一个数列逼近它的极限过程,是一个无限变化的过程,且这个过程又要一步一步地来实现,而这每一步的变化是有限的,因此说,极限是建立在无限观念上的一个数学概念．

ε 的二重性深刻反映了极限概念中的精确与近似之间的辩证关系．例如,人们通过圆的内接正多边形的周长 l_n (圆的周长的近似值) 认识了该圆的周长 l．即从近似中认识了精确．人们又通过圆的周长 l,才能深刻地认识了圆的内接正多边形周长 l_n 与 l 的关系,即从精确中更深刻的认识了近似．所以说,极限是人们从近似认识精确的一种数学方法．

2° 关于 N 的注释

N 是一个与 ε 有关的自然数,当然与 a_n 及常数 a 亦有关．N 重在其存在性,不在其大小．由于它是在 ε 固定后,再去确定的,所以它依赖于 ε,大体上说,ε 越小 N 就越大．只要有一个合乎要求的 N,则任何一个大于 N 的自然数 (实数也可以,为什么?) 均可充任

N 的角色，N 的这种任意可大性，使得 $n>N$，或 $n\geqslant N$，$n>A$（实数）在实质上没有区别．

N 的作用是指出在 n 无限变大的过程中，有一个时刻，使其后所有 n 于之对应的 a_n 都满足不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$，N 只管后，不管前，对其后的 n，要求无一例外地都使 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立，决不能用有无穷多个成立来代替．

3° ε 与 N 的关系

在 2° 中，我们已经提到了 ε 与 N 之间的一种基本关系．但需要强调，ε 的给定在先，具有与 N 无关的独立性．N 存在于后，一般视 ε 而定，具有与 ε 的依赖性．对于同一 ε，可以有无穷多个 N，而并非要求存在一个 N，适合所有的 ε．

4° 数列极限的定义没有指出如何求数列的极限，但给出了判断一个常数 a，是否是数列的极限的方法，即如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，由 $|a_n-a|<\varepsilon$ 能求出 N，使它在 $n>N$ 时成立，则常数 a 就是 $\{a_n\}$ 的极限．这也就是说，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，通过 $|a_n-a|<\varepsilon$，找不到 N，使得当 $n>N$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon$，则常数 a 就不是数列 $\{a_n\}$ 的极限．

2.3 与极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 等价的若干表述和与它不等价的表述

对于初学数学分析的读者来说，用 $\varepsilon-N$ 语言叙述的数列极限定义看起来很抽象，往往感到难以准确把握，而且在具体应用时也会出现不少问题．有关定义的叙述既不能多写，又不能少写，甚至将所叙述内容的前后次序颠倒一下都会导致概念性的错误．因此，掌握一些常用的数列极限的等价定义是非常重要的．

例 1 下面是一些与极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的定义等价的常用表述，请说明理由：

(1) $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$（自然数），使得 $\forall n>N\Rightarrow|a_n-a|\leqslant\varepsilon$；

(2) $\forall \varepsilon>0$,$\exists N$(自然数),使得 $\forall n \geqslant N \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon$;

(3) 对某自然数 k,$\forall \varepsilon>0$,$\exists N$(自然数),使得 $\forall n>N \Rightarrow |a_n-a|<k\varepsilon$;

(4) $\forall k$(自然数),$\exists N$(自然数),使得 $\forall n>N \Rightarrow |a_n-a|<\frac{1}{k}$;

(5) $\forall \varepsilon>0$,$\exists A$(实数),使得 $\forall n>A \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon$;

(6) $\forall \varepsilon>0$,$\exists N$(自然数),使得 $\forall n \geqslant N \Rightarrow |a_n-a| \leqslant \varepsilon$;

(7) $\forall \varepsilon \in (0,1)$,$\exists N$(自然数),使得 $\forall n>N \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon$;

(8) $\forall \varepsilon>0$,数列 $\{a_n\}$ 中只有有限项在开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 之外;

(9) $\forall \frac{1}{2^n}$,$\exists N$(自然数),使得 $\forall n>N \Rightarrow |a_n-a|<\frac{1}{2^n}$;

(10) $\forall \eta<a$,$\forall \mu>a$,只有有限个 n,使得 $\eta<a_n<\mu$ 不成立.

解　首先,我们看到,本题所给出的数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义的 10 种等价表述,都从不同侧面对数列极限的定义作了一些定义所允许的变动.可以归纳为以下几类:

一类是对任意小正数 ε 的叙述方式作了多种形式的改变,例如 (3)、(4)、(7)、(9);

另一类是改变自然数 N 的作用,例如 (2)、(5)、(8);

第三类是改变了 ε 与 N 的相互关系,例如 (1)、(3)、(4)、(9).

所以能否正确判断,并说明其理由 (或严格证明),关键是对极限定义中 ε 与 N 的作用要有一个正确、全面的理解.

(1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$,则 $\forall \varepsilon>0$,$\exists N$(自然数),使得

$$\forall n>N \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon,$$

显然,一定有 $|a_n-a| \leqslant \varepsilon$.

2 极限的“$\varepsilon-N$”、“$\varepsilon-\delta$”定义与注释

反过来,对 $\forall\varepsilon>0$,取 $0<\varepsilon_1<\varepsilon$,由题设,对 $\varepsilon_1>0$,$\exists N$(自然数),使得

$$\forall n>N\Rightarrow|a_n-a|\leqslant\varepsilon_1,$$

从而更有 $|a_n-a|<\varepsilon$.

⑵ 根据数列极限的“$\varepsilon-N$”定义的注释 2°,N 贵在其存在性,不在其大小,因而 $n>N$ 和 $n\geqslant N$ 是等价的.

⑶ 根据数列极限的“$\varepsilon-N$”定义的注释 1°,ε 是任意小的正数,而且贵在其小,所以 ε 与 $k\varepsilon$ 是等价的.

⑷ 因为,对 $\forall\varepsilon>0$,且 $\varepsilon<1$,总存在自然数 k,使 $\frac{1}{k+1}<\varepsilon<\frac{1}{k}$,所以,不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$ 与 $|a_n-a|<\frac{1}{k}$ 是等价的.

⑸ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则 $\forall\varepsilon>0$,$\exists N$(自然数),使得

$$\forall n>N\Rightarrow|a_n-a|<\varepsilon,$$

取 $A\geqslant N$,A 为实数,则当 $n>A$ 时,一定有 $n>N$,从而所需不等式成立.

反过来,若 ⑸ 成立,$\forall\varepsilon>0$,$\exists A$(实数),使得

$$\forall n>A\Rightarrow|a_n-a|<\varepsilon,$$

取 $N\geqslant A$,则当 $n>N\geqslant A$ 时,有

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

⑹ 据 ⑴、⑵,是明显的.

⑺ 根据数列极限的“$\varepsilon-N$”定义的注释 1°,是显然的.

⑻ 如果数列 $\{a_n\}$ 中有 k 项 $a_{n_1},a_{n_2},\cdots a_{n_k}$($k$ 是某固定的自然数)在 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 之外.令

$$N=\max\{n_1,n_2,\cdots n_k\},$$

于是,“数列 $\{a_n\}$ 中只有有限项在开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 之外”与“$\exists N$(自然数),使得 $\forall n\geqslant N\Rightarrow|a_n-a|<\varepsilon$ 是等价的.

(9) 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则 $\forall\varepsilon=\dfrac{1}{2^n}$ (n 是自然数),$\exists N$ (自然数),使得 $\forall n>N\Rightarrow|a_n-a|<\varepsilon$,此即 (9).

反过来,若 (9) 成立,则 $\forall\varepsilon>0$,可取得自然数 n,使$\dfrac{1}{2^n}<\varepsilon$,据 (9),$\exists N$ (自然数),使得

$$\forall n>N\Rightarrow|a_n-a|<\frac{1}{2^n}<\varepsilon,$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

(10) 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,对任意的 $a-\eta>0$,$\exists N_1$ (自然数),使得

$$\forall n>N_1\Rightarrow|a_n-a|<a-\eta,$$

即 $-(a-\eta)<a_n-a$ 或等价地 $\eta<a_n$. 显然,只有有限个 n (不超过 N_1 个) 使得 $a_n\leqslant\eta$;又对任意的 $\mu-a>0$,$\exists N_2$ (自然数),使得

$$\forall n>N_2\Rightarrow|a_n-a|<\mu-a,$$

即 $a_n-a<\mu-a$,或者等价地 $a_n<\mu$. 显然,只有有限个 n (不超过 N_2 个) 使得 $a_n\geqslant\mu$. 综上所述,只有有限个 n 使得 $\eta<a_n<\mu$ 不成立.

反过来,若对 $\forall\eta<a$,$\forall\mu>a$,只有有限个 n,使得 $\eta<a_n<\mu$ 不成立,则对 $\forall\varepsilon>0$,取 $\eta=a-\varepsilon$、$\mu=a+\varepsilon$,有有限个 n,使

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$$

不成立,所以 $\exists N$ (自然数),使得 $\forall n>N$ 时,

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon,$$

即 $|a_n-a|<\varepsilon$,故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

下面所列出的是几种常见的与极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的定义不等价的表述,通过对它们的讨论,可以进一步加深对数列极限概念的认识.

需要全本请访问 www.ertongbook.com