一流学校 一流老师 一流资源

三一丛书

数学分析

要点与解题

（上册）（一元函数部分）

李惜雯 编著

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

需要全本请访问 www.ertongbook.com

三一丛书

数 学 分 析
要点与解题
（上册）

（一元函数部分）

李惜雯 编著

西安交通大学出版社

内容提要

本书是根据综合大学数学类各专业用数学分析课程的教学大纲编写的。本册为一元函数部分，共分 5 章，包括 200 余道(大)题。

每章、节均有基本要求、内容提要及例题解析三部分。本书侧重概念分析，每道题之后作有注释，对该题所用概念、知识及解题思路进行分析、讨论；每章最后一节给出适量练习题及部分答案或提示。

本书可作为综合大学、师范类院校数学类专业学生学习数学分析课程的参考书，数学分析习题课教材；可作为全日制理工科各专业学生学习工科数学分析、高等数学课程及中青年教师从事本类课程教学的参考书；也可作为报考数学类各专业研究生考生的数学分析参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析(一元函数部分)要点与解题/李惜雯编著.
西安：西安交通大学出版社，2006.8
(西安交大教学资源文库. “三一”从书)
ISBN 7-5605-2227-0

Ⅰ.数… Ⅱ.李… Ⅲ.数学分析-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.017
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006) 第 069526 号

书　　名	数学分析要点与解题(上册)
编　　著	李惜雯
出版发行	西安交通大学出版社
地　　址	西安市兴庆南路 25 号(邮编：710049)
电　　话	(029)82668357　82667874(发行部) (029)82668315　82669096(总编办)
印　　刷	陕西宝石兰印务有限责任公司
字　　数	402 千字
开　　本	880mm×1230mm　1/32
印　　张	10.875
版　　次	2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 7-5605-2227-0/O·241
定　　价	17.80 元

版权所有　侵权必究

丛书总序

为了使普通高等学校理工类专业的大学生更好地学习、掌握基础课和专业基础课知识，我们组织出版了这套“三一”丛书，目的就是提供一流的学习资源，使大家共享一流教师的教学经验和教学成果，为今后的学习打下良好的基础。

西安交通大学是国内仅有的几所具有百年历史的高等学府，是首批进入国家“211 工程”建设的七所大学之一，1999 年被国家确定为我国中西部地区惟一一所以建设世界知名高水平大学为目标的学校。西安交大历来重视本科生教学，1996 年成为全国首家本科教学评估为优秀的大学。学校拥有国家级、省部级、校级教学名师数十名，具有丰富的、一流的教学资源。本丛书均由西安交通大学长期在教学一线主讲的教授、副教授主编，他们具有丰富的基础课、专业基础课教学和辅导经验。丛书作者们在长期的教学实践中，深深了解学生在学习基础课、专业基础课时的难点和困惑点之所在，对如何使学生更有效地学习、掌握课程的基本知识和解题技巧进行了深入的探索和研究，并将成果体现于书中。

本丛书针对中少学时课程的特点和教学要求，以普通高等学校的学生为主要对象，不拘泥于某一本教材，而是将有特色和使用量较大的各种版本的教材加以归纳总结，取其精华，自成一体。书中对课程的基本内容、研究对象、教学要求、学习方法、解题思路进行了全面、系统的

总结和提炼，按基本知识点、重点与难点、典型题解析、自我检测题等环节进行编排。本丛书既可单独使用，也可与其他教材配合使用。

我们衷心希望本丛书成为您大学基础课和专业基础课学习阶段的良师益友，帮助您克服困难，进入大学学习的自由王国，并祝您早日成为国家的栋梁之材！

在学习使用过程中，您如果发现书中有不妥之处或有好的建议，敬请批评指正并反馈给我们，我们会进一步改进自己的工作，力争使您满意。

真诚感谢您使用西安交大版图书。

西安交大出版社网址：http://press.xjtu.edu.cn

http://www.xjtupress.com

理工医事业部信箱：jdlgy31@126.com

西安交通大学出版社

2006 年 6 月

需要全本请访问 www.ertongbook.c

前　言

数学分析是数学类各专业的一门学时最高(264 学时左右)的专业基础课。其教学目的是培养学生的专业素养,为后续专业基础课、专业课打下知识方面与能力方面的基础。正是这个教学目的,使该课程在研究方法、理论体系、语言表述、分析技巧等的讲授与学习方面均有较高的要求。所以,本课程在教与学两方面都有较大的难度。

为了帮助学生掌握数学分析最基本的研究方法和最核心的理论体系,并能对分析语言运用自如,对基本的分析技巧有所掌握,作者根据自己多年从事数学分析教学工作的经验与体会,精心挑选 400 余道(大)题(上册含 200 余道(大)题),并给出论证、分析、讨论,编成此书。

本书与多数数学分析题解的不同之处在于:第一,本书侧重于概念部分,因为一般的计算类题目在许多同类书中均可找到;第二,本书每题证(解)之后均有注释,对所用概念、知识作进一步的讨论、分析,特别突出概念与思路的讨论。这样将有助于学生对知识内在联系的把握,有利于对概念与理论的深刻理解。

全书共分 10 章。上册(一元函数部分)5 章,下册(多元函数与级数部分)5 章。与本书内容体系基本一致的教材为复旦大学(陈传璋、金福临等编,高等教育出版社出版)的《数学分析》(第二版)。

由于本人水平有限,编写中定有不少错误与不足之处,敬请读者批评指正。在本书的编写过程中,西安交通大学研究生李鑫、方李斌同学参加了十分辛苦的校稿工作,同时作者得到西安交通大学出版社的大力支持,在此一并致谢!

编　者

2003 年 6 月

于西安交通大学

目　　录

丛书序言
前言

第 1 章　函数与极限
1.1　**函数** …… (1)
1.1.1　**基本要求** …… (1)
1.1.2　**内容提要** …… (1)
1.1.3　**例题解析** …… (3)
1.2　**数列的极限** …… (14)
1.2.1　**基本要求** …… (14)
1.2.2　**内容提要** …… (14)
1.2.3　**例题解析** …… (16)
1.3　**函数的极限** …… (38)
1.3.1　**基本要求** …… (38)
1.3.2　**内容提要** …… (39)
1.3.3　**例题解析** …… (42)
1.4　**极限理论** …… (73)
1.4.1　**基本要求** …… (73)
1.4.2　**内容提要** …… (73)
1.4.3　**例题解析** …… (75)
1.5　**练习题** …… (85)

第 2 章　连续
2.1　**函数的连续与间断** …… (87)
2.1.1　**基本要求** …… (87)
2.1.2　**内容提要** …… (87)
2.1.3　**例题解析** …… (88)

2.2 连续函数的性质 …… (103)
2.2.1 基本要求 …… (103)
2.2.2 内容提要 …… (103)
2.2.3 例题解析 …… (103)
2.3 一致连续性 …… (113)
2.3.1 基本要求 …… (113)
2.3.2 内容提要 …… (113)
2.3.3 例题解析 …… (114)
2.4 练习题 …… (124)

第3章 导数、微分及不定积分
3.1 导数的概念及其求法 …… (127)
3.1.1 基本要求 …… (127)
3.1.2 内容提要 …… (127)
3.1.3 例题解析 …… (129)
3.2 函数的微分、高阶导数与高阶微分 …… (152)
3.2.1 基本要求 …… (152)
3.2.2 内容提要 …… (152)
3.2.3 例题解析 …… (154)
3.3 不定积分 …… (173)
3.3.1 基本要求 …… (173)
3.3.2 内容提要 …… (174)
3.3.3 例题解析 …… (178)
3.4 练习题 …… (206)

第4章 微分学的基本定理及其应用
4.1 中值定理 …… (210)
4.1.1 基本要求 …… (210)
4.1.2 内容提要 …… (210)
4.1.3 例题解析 …… (211)
4.2 泰勒(Taylor)公式 …… (226)
4.2.1 基本要求 …… (226)
4.2.2 内容提要 …… (226)
4.2.3 例题解析 …… (227)

4.3 函数的升降、凹凸与极值 …… (245)
4.3.1 基本要求 …… (245)
4.3.2 内容提要 …… (245)
4.3.3 例题解析 …… (247)
4.4 洛必达法则 …… (266)
4.4.1 基本要求 …… (266)
4.4.2 内容提要 …… (266)
4.4.3 例题解析 …… (268)
4.5 练习题 …… (280)

第5章 定积分
5.1 定积分的概念与积分存在的条件 …… (282)
5.1.1 基本要求 …… (282)
5.1.2 内容提要 …… (282)
5.1.3 例题解析 …… (284)
5.2 定积分的性质 …… (303)
5.2.1 基本要求 …… (303)
5.2.2 内容提要 …… (303)
5.2.3 例题解析 …… (304)
5.3 微积分学基本定理与定积分的计算 …… (318)
5.3.1 基本要求 …… (318)
5.3.2 内容提要 …… (319)
5.3.3 例题解析 …… (319)
5.4 练习题 …… (335)

第 1 章　函数与极限

1.1　函　数

1.1.1　基本要求

1. 掌握函数的定义及有关概念；
2. 掌握函数的几何性态；
3. 掌握反函数、复合函数的概念及其应用；
4. 掌握基本初等函数的性质、定义域、值域及初等函数的概念.

1.1.2　内容提要

1. **定义 1(函数)**　设给定数集 X、Y，若存在对应规则 f，使得对 $\forall x\in X$，存在唯一的 $y\in Y$ 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的函数(或映射)，记为 $f:X\to Y$. $x\mapsto f(x)$ 或 $y=f(x)$，$x\in X$，其中 $x\in X$ 称为自变量，$y=f(x)$ 称为因变量. 并称 X 为 f 的定义域，数集 $\{f(x)\mid x\in X\}\subseteq Y$ 称为 f 的值域.

2. **定义 2(一一对应)**　设 $f:X\to Y$，若

(1) $\forall x_1,x_2\in X$，有 $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$(此时称 $f:X\to Y$ 为单射)，

(2) 且有 $\{f(x)\mid x\in X\}=Y$(此时称 $f:X\to Y$ 为满射)，

则称 $f:X\to Y$ 为一一对应(也称 $f:X\to Y$ 为双射).

3. **定义 3(单调函数)**　设 $f:X\to Y$，若 $\forall x_1,x_2\in X$，有 $x_1>x_2\Rightarrow f(x_1)\geqslant f(x_2)$ ($f(x_1)\leqslant f(x_2)$)，则称函数 $y=f(x)$ 在 X 上单调增(单调减)，且当其中等号恒不成立时称 $y=f(x)$ 在 X 上严格单调增(严格单调减).

4. **定义 4(反函数)**　设 $f:X\to Y$，若 $\forall y\in Y$，由方程 $f(x)=y$ 可确定唯一解 $x\in X$，则此对应规则定义一个从 Y 到 X 的函数(映射)，记之为 $f^{-1}:Y\to X$. 称为 f 的反函数.

5. **定理(反函数存在性)**　函数 $f:X\to Y$ 存在反函数 $f^{-1}:Y\to X\Leftrightarrow f:X\to Y$ 为一一对应.

6. **推论**　若 $f(x)$ 在 X 上严格单调，则 f 的反函数必存在，且与 $f(x)$ 具同一

单调性.

7. **定义 5(复合函数)** 设 $f:X\to Y,\varphi:Y\to V$,则变量 $z=\varphi(y)$通过变量 $y=f(x)$成为变量 $x\in X$ 的函数. $z=\varphi(f(x)),x\in X$,称之为复合函数.

8. **定义 6(奇偶函数)** 设 $a>0$(可有 $a=+\infty$),如果 $f(x)$定义于$(-a,a)$,且 $\forall x\in(-a,a)$,有 $f(-x)=f(x)$ $(f(-x)=-f(x))$,则称 $f(x)$为偶(奇)函数.

9. **定义 7(周期函数)** 若存在 $\omega>0$,使得 $\forall x\in X$,有 $f(x+k\omega)=f(x)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,则称 $f(x)$是 ω 周期函数. ω 称为周期.

10. **定义 8(有界函数)** 设 $f:X\to Y$,若存在 $M>0$,使得 $\forall x\in X$,有 $|f(x)|\leqslant M$. 则称 $f(x)$在 X 上有界,M 称为它的一个界.

11. **定义 9(无界函数)** 设 $f:X\to Y$,若 $\forall M>0$,存在 $x_M\in X$,使得 $|f(x_M)|>M$. 则称 $f(x)$在 X 上无界.

12. **基本初等函数**

(1) **指数函数** $y=a^x(a>0,a\neq1)$, $x\in(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$;

(2) **对数函数** $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1),x\in(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$;

(3) **幂函数** $y=x^\mu(\mu\neq0)$,设 n,m 为自然数.

① 当 $\mu=n$ 时,$x\in(-\infty,+\infty)$;

② 当 $\mu=-n$ 时,$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;

③ 当 $\mu=\dfrac{1}{2n}$时,$x\in[0,+\infty)$;

④ 当 $\mu=\dfrac{1}{2n+1}$时,$x\in(-\infty,+\infty)$;

⑤ 当 $\mu=\dfrac{m}{n}$时,$y=x^\mu=(x^{\frac{1}{n}})^m$;

⑥ 当 μ 为无理数时,$y=x^\mu=e^{\mu\ln x}$,定义域为$(0,+\infty)$.

(4) **三角函数**: $y=\sin x,y=\cos x,x\in(-\infty,+\infty)$,

$y=\tan x$, $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k=0,\pm1,\pm2,\cdots$,

$y=\cot x,x\neq k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

(5) **反三角函数(反正、余弦)**: $y=\arcsin x,x\in[-1,1]$,值域$[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$;

$y=\arccos x,x\in[-1,1]$,值域$[0,\pi]$.

(6) **双曲函数**: $\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2},x\in(-\infty,+\infty)$,值域: $(-\infty,+\infty)$;

$\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2},x\in(-\infty,+\infty)$,值域: $[1,+\infty)$.

需要全本请访问 www.ertongbook.c

13. **定义 10(初等函数)** 经过基本初等函数的有限次四则运算及有限次复合所得到的函数,称为初等函数.

1.1.3 例题解析

例 1-1 写出下列定义于 X 上函数的表达式,作出其图像,求其值集,并求指定点的函数值.

(1) $X=(-4,5)$,$f(x)=[x]$表示"取不超过 x 的最大整数",求 $f(-3.3)$,$f(4.2)$,$f(0.999)$;

(2) $X=[0,20]$,$f(x)=\pi(x)$表示"取不超过 x 的素数的个数",求 $f(0)$,$f(10.999)$,$f(11)$;

(3) $X=(-\infty,+\infty)$,$f(x)=\operatorname{sgn}x$ 表示"大于 0 的 x 与 1 对应,小于 0 的 x 与 -1 对应,0 与 0 对应",求 $f(-100)$,$f(0)$,$f(55.99)$;

解 (1) 由 $X=(-4,5)$及对应规则 f 为"取不超过 x 的最大整数",得

$$f(x)=[x]=\begin{cases}-4 & -4<x<-3\\ -3 & -3\leqslant x<-2\\ -2 & -2\leqslant x<-1\\ -1 & -1\leqslant x<0\\ 0 & 0\leqslant x<1\\ 1 & 1\leqslant x<2\\ 2 & 2\leqslant x<3\\ 3 & 3\leqslant x<4\\ 4 & 4\leqslant x<5\end{cases}$$

故值域 $\{f(x)\mid x\in(-4,5)\}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4\}$. 其图像为图 1.1 所示.

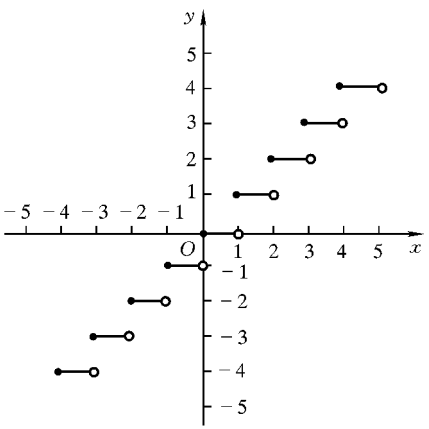


图 1.1

且由 $f(x)$的定义,

$f(-3.3)=[-3.3]=-4$

$f(4.2)=4$

$f(0.999)=[0.999]=0$

(2) 由 $X=[0,20]$及 $f(x)=\pi(x)$表示"不超过 x 的素数的个数",得 $f(x)$的解析表达式为

$$f(x)=\pi(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x<1\\ 1 & 1\leqslant x<2\\ 2 & 2\leqslant x<3\\ 3 & 3\leqslant x<5\\ 4 & 5\leqslant x<7\\ 5 & 7\leqslant x<11\\ 6 & 11\leqslant x<13\\ 7 & 13\leqslant x<17\\ 8 & 17\leqslant x<19\\ 9 & 19\leqslant x\leqslant 20\end{cases}$$

故值域$\{f(x)\mid x\in[0,20]\}=\{0,1,2,3,\cdots,9\}$.

其图像为图 1.2 **所示.**

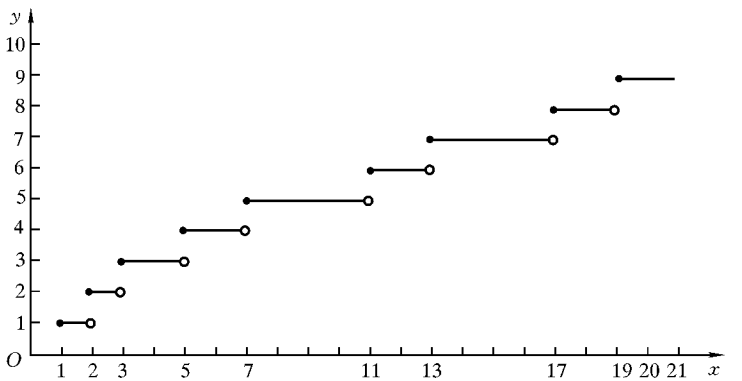


图 1.2

$f(0)=\pi(0)=0$； $f(10.999)=\pi(10.999)=5$； $f(11)=\pi(11)=6$.

(3) **由** $X=(-\infty,+\infty)$, $f(x)=\operatorname{sgn}x$ **的对应规则,可得到其解析表达式为**

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

其值域$\{f(x)\mid x\in(-\infty,+\infty)\}=\{0,\pm1\}$,**图像为图** 1.3 **所示.**

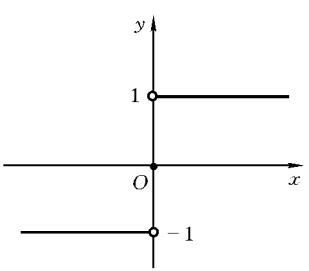


图 1.3

故有 $f(-100)=\operatorname{sgn}(-100)=-1$, $f(0)$

$=\operatorname{sgn}0=0, f(55.99)=\operatorname{sgn}(55.99)=1.$

注 1. 本题用到函数的概念；

2. 本题中的(1)所给函数称为“取整函数”. 易见，$f(x)=[x]$可定义于$(-\infty,+\infty)$，其图像为自左向右的阶梯线段；(2)所给函数可定义于$[0,+\infty)$，其性质与(1)的大致相同，只不过不是均匀的，这是由 $\pi(x)$的对应规则决定的；(3)所给的函数常被称为“符号函数”. 由此函数的定义，可有表达式$|x|=x\operatorname{sgn}x$. 由(1)～(3)的图像可见，这里所给的函数均为分段定义的，常称这类分段定义的函数为分段函数，分段函数在实际中应用很广.

例 1-2 对下列函数考查其是否为周期的，若是，求出其周期.

(1) $D(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x \text{ 为有理点时}\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理点时}\end{cases}$

(2) $R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q} & \text{当 } x=\dfrac{p}{q}\text{，其中 } p,q \text{ 互质，} q>0\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理点}\end{cases}$

(3) $f(x)=x-[x]$　　(4) $f(x)=xD(x)$

解 (1) 由 $D(x)$的定义，并注意对任一有理数 r，其与有理数之和仍为有理数，其与无理数之和仍为无理数，所以有：

$$\forall \text{ 有理数 } r, D(x+r)=D(x), x\in(-\infty,+\infty).$$

即 $D(x)$是周期函数，且任一有理数均为 $D(x)$的周期.

(2) 由 $R(x)$的表达式及有理数的性质可知，$x=\dfrac{p}{q}$(其中 p,q 互质，$q>0$)是有理数，且任一有理数可有此既约分数表达.

注意当 p,q 互质时，$p+q$ 与 q 互质，且有理数加 1 仍为有理数，故 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，若 x 为无理数，有 $x+1$ 为无理数，若 x 为有理数，则存在互质整数 $p,q(q>0)$，使

$$x=\frac{p}{q},\qquad x+1=\frac{p+q}{q}$$

所以由 $R(x)$的定义有

$$R(x+1)=\begin{cases}\dfrac{1}{q} & \text{当 } x=\dfrac{p}{q}, q,p \text{ 互质}, q>0\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

即 $R(x)$为周期函数，且 1 为其周期.

(3) 首先注意，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有$[x]\leqslant x<[x]+1$，

所以 $[x]+1\leqslant x+1<[x]+2$，由取整函数的定义及$[x]+1$ 与$[x]+2$ 均为整数

可知，$[x+1]=[x]+1$. 于是 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，

$$f(x+1)=(x+1)-[x+1]=x+1-[x]-1=x-[x]=f(x).$$

即 $f(x)=x-[x]$ 是周期函数，且 1 为其周期.

(4) 因为 $xD(x)=\begin{cases}x & \text{当 } x \text{ 为有理点时}\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理点时}\end{cases}$

注意，有理数 $+\begin{cases}\text{有理数}=\text{有理数}\\ \text{无理数}=\text{无理数}\end{cases}$，　　无理数 $+\begin{cases}\text{有理数}=\text{无理数}\\ \text{无理数}\quad \text{结果不一定}\end{cases}$.

故

$$\text{对任意有理数 } \beta\neq 0, f(x+\beta)=\begin{cases}x+\beta & \text{当 } x \text{ 为有理数}\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases};$$

$$\text{对任意无理数 } \alpha, f(x+\alpha)=\begin{cases}0 & \text{当 } x \text{ 为有理数}\\ \text{不定} & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

即 $f(x)=xD(x)$ 不是周期函数.

注　1. 本题用到有理数、无理数的基本性质、取整函数的定义、周期函数的定义等知识点；

2. (1)所给函数 $D(x)$ 称为 Dirichlet 函数，由讨论可见，任意一个有理数均为此函数的周期，即此函数虽为周期函数，但并不像我们在初等数学中见过的(如 $\sin x$)具最小正周期的周期函数，$D(x)$ 无最小正周期；(2)中所给函数称为 Riemann 函数，由互质整数的性质，证明了 $R(x)$ 是以 1 为周期的函数，且可以看出 1 是 $R(x)$ 的最小正周期. $D(x)$ 与 $R(x)$ 虽定义于 $(-\infty,+\infty)$，但由其定义(对应规则)可见，二者的图像均不能画出. 这是因为有理点的稠密性所导致的，以后会经常用到这两个函数；

3. 在(3)中所给函数的讨论中，关键是由取整函数的定义，推出 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $x+1$ 介于两相邻整数 $[x]+1$ 与 $[x]+2$ 之间，从而知道 $[x+1]=[x]+1$ (不超过 $x+1$ 的最大整数). 由此可推得，$\forall k\in\mathbf{Z}^+$，$[x+k]=[x]+k$. 同理，可有 $\forall k\in\mathbf{Z}^-$，$[x+k]=[x]+k$. 即 $\forall$ 整数 k，$[x+k]=[x]+k$，此结果在取整时常用到，但此性质对非整数 α 不成立. 即一般地，$[x+\alpha]\neq[x]+[\alpha]$. 例：

$$[1.8+0.2]=2\neq[1.8]+[0.2]=1.$$

例 1-3　下列函数能否构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，如果能，指出其定义域与值域.

(1) $f(x)=2^x$，$\varphi(x)=x^2$

(2) $f(x)=\ln x$，$\varphi(x)=1-x^2$

(3) $f(x)=x^2+x^3$，$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x \text{ 为有理数时}\\ -1 & \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}$

(4) $f(x)=x^2\ln(1+x)$，$\varphi(x)=\mathrm{e}^{-x}$

解 设 $f(x)$ 的定义域为 X，$\varphi(x)$ 的值域为 X_1，则仅当 $X_1\cap X\neq\varnothing$ 时，$f[\varphi(x)]$ 有意义.

(1) 因为 $f(x)=2^x$ 的定义域为 $X=(-\infty,+\infty)$，

$\varphi(x)$ 的定义域为 $X=(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)\subset(-\infty,+\infty)$，故复合函数 $f[\varphi(x)]=2^{\varphi(x)}=2^{x^2}$ 定义于 $(-\infty,+\infty)$，其值域为 $[1,+\infty)$；

(2) 因为 $f(x)=\ln x$ 定义域为 $(0,+\infty)$，$\varphi(x)=1-x^2$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(-\infty,1]$，且仅当 $x\in(-1,1)$ 时，$\varphi(x)\in(0,1]\subset(0,+\infty)$，即当 $x\in(-1,1)$ 时，复合函数 $f[\varphi(x)]=\ln(1-x^2)$ 有意义，其定义域为 $(-1,1)$，值域为 $(-\infty,0]$；

(3) 因为 $f(x)=x^2+x^3$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x \text{ 为有理数时}\\ -1 & \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值集为 $\{-1,1\}\subset(-\infty,+\infty)$. 故复合函数 $f[\varphi(x)]$ 对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有意义，且

$$f[\varphi(x)]=\varphi^2(x)+\varphi^3(x)=\begin{cases}2 & \text{当 } x \text{ 为有理数时}\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}$$

其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值集为 $\{0,2\}$.

(4) 因为 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$. $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-x}$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)\subset(-1,+\infty)$，故复合函数 $f[\varphi(x)]$ 有意义，且

$$\begin{aligned}f[\varphi(x)]&=\varphi^2(x)\ln(1+\varphi(x))=\mathrm{e}^{-2x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\\&=\mathrm{e}^{-2x}[\ln(1+\mathrm{e}^{x})-x]\end{aligned}$$

其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$（只要注意在 $f[\varphi(x)]=\mathrm{e}^{-2x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x})$ 中，$\mathrm{e}^{-2x}>0$，$\mathrm{e}^{-x}>0$）.

注 1. 本题用到函数的有关概念（对应规则，定义域，值域）、复合函数的有关概念等知识点；

2. 由本题可见，若 $f(x)$ 的定义域为 X，值域为 Y，$\varphi(x)$ 的定义域为 X'，值域为 X_1，则仅当 $X_1\cap X\neq\varnothing$ 时，复合函数 $f[\varphi(x)]$ 有意义，且当 $X_1\subseteq X$ 时，$f[\varphi(x)]$ 的定义域即为 $\varphi(x)$ 的定义域 X'，其值域 $\subseteq Y$；当 $X_1\nsubseteq X$，但 $X_1\cap X\neq\varnothing$ 时，复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域是被 $X_1\cap X$ 所对应的，本例中的(2)即为此种情形；

3. 对任给的两个函数 $f(x)$、$\varphi(x)$，复合函数 $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$ 是否有意义，应首先注意二者的定义域、值域间的关系. 依本题所给思路进行考查. 即不是任何两个函数都可以构成复合函数的. 例：

$f(x)=\dfrac{1}{x(1-x)}$，其定义域为 $x\neq 0,1$.

$$D(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x \text{ 为有理数时}\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases},\quad \text{其值集为}\{0,1\}.$$

所以复合函数 $f[D(x)]$是没有意义的.

但是，当 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$时，无论 $\varphi(x)$的值域如何，复合函数 $f[\varphi(x)]$总是有意义的. 特别地，$\varphi(x)=f(x)$时，任意次复合

$$f\underbrace{[f\cdots f(f(x))\cdots]}_{n\text{重}}\triangleq f^n(x)$$

均有意义. 若 $f(x)$的值域也为$(-\infty,+\infty)$，函数 f 则常被称为 $R=(-\infty,+\infty)$上的自映射. 在 R 上的自映射中，研究方程 $f^n(x)=x$ 的解是有意义的，此方程的解即是经过 f 的连续 n 次映射后成为自身的那种点 x. 常称这种点 x_0 为映射 f 的 n-周期点.

例 1-4 设 $f(x)=\begin{cases}1+x & \text{当 } x\leqslant 0\\ x & \text{当 } x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x & \text{当 } x\leqslant 0\\ -x^2 & \text{当 } x>0\end{cases}$，求 $f(g(x))$，$g(f(x))$.

解 为求 $f(g(x))$，首先注意 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，且 $g(x)$的值域为$(-\infty,0]\subset(-\infty,+\infty)$，于是有

$$f(g(x))=\begin{cases}1+g(x) & \text{当 } g(x)\leqslant 0\\ g(x) & \text{当 } g(x)>0\end{cases}$$

而 $g(x)\not>0$. 所以

$$f(g(x))=1+g(x)=\begin{cases}1+x & \text{当 } x\leqslant 0\\ 1-x^2 & \text{当 } x>0\end{cases}$$

为求 $g(f(x))$，注意 $g(x)$定义域为$(-\infty,+\infty)$，$f(x)$的值域为$(-\infty,+\infty)$，且因为

$$f(x)=\begin{cases}1+x\leqslant 0 & \text{当 } x\leqslant -1\\ 1+x>0 & \text{当 } -1<x\leqslant 0\\ x>0 & \text{当 } x>0\end{cases}$$

由 $g(x)$的定义得

$$g(f(x))=\begin{cases}f(x) & \text{当 } f(x)\leqslant 0\\ -(f(x))^2 & \text{当 } f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}1+x & \text{当 } x\leqslant -1\\ -(1+x)^2 & \text{当 } -1<x\leqslant 0\\ -x^2 & \text{当 } x>0\end{cases}$$

注 1. 本题用到分段函数概念及复合函数概念；

需要全本请访问 www.ertongbook.c