数 学 分 析

上 册

赵 洁 赵宏亮

东 北 师 范 大 学 出 版 社
长 春

图书在版编目(CIP)数据

数学分析(上)/赵洁，赵宏亮. —长春：东北师范大学出版社，2004.10 ISBN 7-5602-3964-1

Ⅰ.**数…** Ⅱ.①**赵…** ②**赵…** Ⅲ.**数学分析** Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP **数据核字**(2004)**第** 105616 **号**

□**责任编辑：李震宇** □**封面设计：李冰彬**
□**责任校对：沙铁成** □**责任印制：张允豪**

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 5268 **号** (130024)
销售热线：0431—5687213
传真：0431—5691969
网址：http://www.nenup.com
电子函件：sdcbs@mail.jl.cn
东北师范大学出版社激光照排中心制版
吉林省吉新月历制版印刷有限公司印装
2004 **年** 10 **月第** 1 **版** 2004 **年** 10 **月第** 1 **次印装**
幅面尺寸：185mm×260mm **印张**：16.5 **字数**：375 **千**
印数：0 001—3 000 **册**

本册定价：30.00 **元**
全套定价：70.00 **元**

本书系东北师范大学
图书出版基金项目

前　　言

微积分至今已有 300 多年的历史，经过数学巨匠们的精雕细琢，千锤百炼，它已经成为一棵枝繁叶茂的参天大树. 随着时代的进步和科学技术的更新，现代数学的内容在不断发展，现代数学的思想也在不断地渗透到经典微积分的研究中. 数学分析作为数学学科各专业最重要的基础课，传统的教学内容有些已经显得陈旧和繁杂，教材与教学内容的改革势在必行.

纵观 40 多年来国内外已出版的各种数学分析教材，一方面，它们各具特色：有的教材强化了极限的概念，在更一般的有向集合和有向函数的极限的基础上展开微积分学，并且加深了积分理论，引入了约当测度，具有突出的现代化特色；有的教材着重于加强数学分析同现代应用数学的其他分支学科的联系，从微积分中发掘一些分支学科的生长点，使经典的微积分理论生动活泼，具有时代气息；有的教材随着微积分学的逐步展开，不失时机地介绍了数学史知识，提炼了数学思想方法，使读者了解了微积分产生的时代背景与历史意义. 另一方面，它们在内容的选取上又是大致相同的，这既反映了作为基础课的数学分析的成熟性与稳定性，也表现出了“数学分析”改革的艰巨性. 但是，从改革的总趋势看，一是现代化思想与方法的渗透只会加强不会减弱，二是教学课时数只会减少不会增加. 所以内容的取舍与处理将是争论的焦点，也是教材形成特色的关键.

本书是根据东北师范大学数学与统计学院关于教学内容和课程体系改革的方案进行编写的，并在我院原有教材（刘玉琏等编的《数学分析讲义》）的基础上，取众多优秀教材之长，对有关内容进行了精简、更新与调整.

在一元微积分部分，将函数和极限合并为一章，在映射基础上淡化了函数内容，因为中学数学对此已有详尽的讨论. 介绍了集合的基数，为可积性理论的重新处理作准备. 极限部分以确界原理为公理，补充了数列与函数的上极限与下极限，因为它们在许多后继课中有广泛应用.

将不定积分与定积分合并为一章，对其内容进行了压缩与调整. 先讲定积分，后讲为定积分计算服务的不定积分，这也符合历史上微积分的发现过程. 淡化了不定积分的计算，介绍了勒贝格零测集的概念（不涉及测度论），以及利用数学分析技巧给出了“有界函数可积的充要条件是其不连续点集是零测集”的勒贝格定理，这样在整体上大大简化了可积性理论的讨论，删减了许多繁杂冗长的证明.

关于多元微积分部分，在微分学中补充了多元向量值函数微分学，并在数学分析中逐步使用矩阵和二次型等代数工具；在积分学中将二重积分与三重积分的概念、物理背景以及性质等方面合并处理，避免相关内容的重复. 在多元函数积分学基础上，在最后一章于$\mathbb{R}^3$空间中引入了多元微分的外积与外微分运算（不涉及微分流形），用微分形式的积分统一描述了格林公式、奥高公式、斯托克斯公式和牛顿 - 莱布尼茨公式，介绍了微积分学中这一最简洁和最深刻的结果.

级数和广义积分与含参变量这两章一起放到了后面，因为这两部分关系密切，其中许多结论都是平行的.

本书具有以下几个特点：

1．力求内容通俗易懂，易教易学

这是我院原教材深受读者喜爱，长久不衰的最大优点，本书努力发扬这一优点.

2．坚持简明的风格

本书在内容的选取和安排以及定理的证明等方面都时时注意这一点. 在许多重要定理的证明中尽可能选择简洁优美的证法. 例如，利用均值不等式证明重要极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$，利用函数的上、下极限证明洛必达法则，弱条件下的微积分基本公式的证明等，都比一般的证明简洁许多. 这使读者在获得微积分的基本观念的同时，能够欣赏数学的美学价值.

3．注重微积分的实际应用

本书在微分学和积分学等许多部分都选取了现代科技和社会经济领域的许多实例，强化了微积分实际应用的内容；突出了微元法的数学思想，简要介绍了数学建模. 希望读者在鉴赏微积分解决问题的威力的同时，提高学习微积分的兴趣和利用微积分解决问题的能力.

4．注意学习者的心理特点和认知规律

微积分初学者开始接触极限的精确概念和严格的极限理论时，都颇感困惑并有畏难情绪. 本书在许多内容的处理上采取了由易到难，分散难点，难点后移的做法. 在极限部分还是坚持先讲数列极限，再讲函数极限，而不是一并处理. 这样由形式单一的“$\varepsilon—N$”语言过渡到形式多样的“$\varepsilon—\delta$”和“$\varepsilon—A$”语言，使读者由简单到复杂，逐步树立起极限的观念. 实数连续性部分历来是学习的难点，本书在这部分以确界原理为公理，推导出单调有界定理与柯西收敛准则，将有限覆盖定理移到积分学的勒贝格定理前讲授. 至于系统的实数连续性理论以及几个定理等价性的讨论则放到上册最后一章“实数理论”中去. 这样处理，既保证了一元微积分学理论上的需要和完备，又降低了学习的难度.

本书精选了例题和习题，在课后的习题中，* 号后的习题较难些，读者可以在教师指导下选作一部分. 本书（上册和下册）全部内容大约需要讲授（包括习题课）280 学时.

本书在编写过程中得到了东北师范大学数学与统计学院负责同志的热情鼓励和大力支持，王克教授和张凯军教授提出了许多宝贵的意见，郭民同志为本书的编写做了许多工作，编者在此谨向他们表示衷心的感谢！编者还要感谢东北师范大学教务处领导与出版社领导对教材建设的关心和支持，特别感谢高夯教授对本书编写工作给予的积极帮助.

本书努力进行有益的改革，并且（本书初稿）已在东北师范大学数学与统计学院本科生中试用了四轮. 编者听取了广大师生的意见，进行了多次修改，但限于编者的水平，谬误仍在所难免，敬请广大读者和老师们不吝批评指正.

作 者

2004 年 9 月

序

数学分析的核心内容是微积分学. 17 世纪,研究运动成为自然科学的中心问题,微积分的出现最初是为了解决几何学和力学中的问题. 17 世纪末,英国数学家牛顿和德国数学家莱布尼茨各自独立地创立了微积分学. 他们分别从力学和几何学的角度建立了微积分学的基本定理和运算法则,使微积分普遍应用于自然科学的各个领域,成为一门独立的学科,成为数学中的“分析学”的源头,以及高等数学乃至近代数学的基础.

在高等教育中,微积分学是理工科各专业的必修课程,数学分析是数学专业最重要的一门基础课. 它们不仅是本科阶段乃至研究生阶段后继课程的基础,而且对于提高学生数学修养,培养学生理性思维习惯,都将起到很大的作用.

赵洁副教授长期从事数学分析课程的教学工作,积累了丰富的教学经验. 根据东北师范大学数学与统计学院课程体系与改革方案,他承担了数学分析课程的改革研究与实践的任务,编写了数学分析教材. 经过四个年级的试用,多次听取同行与学生的意见,反复修改后才正式出版.

本书具有以下特点:

1. 关注并适应现代数学分析发展的潮流. 与我院原来使用的教材相比较,适当地增加了一些新的内容,如向量函数微分学与外微分形式等.

2. 在保持数学分析基本内容和基本理论的完整性和系统性的同时,在结构和方法上进行了许多新的处理. 例如,应用分析技巧,给出了勒贝格(Lebesque)定理及其证明,讨论可积性理论时,大大地简化了许多繁杂冗长的论证.

3. 注重介绍微积分的实际应用. 选取了现代科技和社会经济领域中的众多实例,努力体现微积分与外部世界的联系,以此显示微积分的巨大生命力和应用价值.

4. 教材编写力求符合认知规律,分散难点,难点后移;语言通俗易懂,易教易学.

相信本书对数学分析的教学乃至数学人才的培养都会起到积极的作用. 值此《数学分析》出版之际,特向该书作者表示祝贺.

高　夯

2004 年 9 月于长春

目　　录

预 备 知 识

为课程的学习作准备，这里先介绍一些在数学中广泛采用的术语和符号及其有关的法则，然后介绍几个重要的不等式.

Ⅰ 常 用 符 号

一、集合符号

1. 集合及其表示

集合通常用大写的拉丁字母 A,B,C 等表示，集合的元素用小写的拉丁字母 a,b,c 等表示.

符号"$\in$"表示"属于"；符号"$\overline{\in}$"表示"不属于"；符号"$p(x)$"表示"元素 x 具有性质 p".

例如，设 A 是集合，x 是元素，则

$x\in A$——元素 x 属于 A；

$x\overline{\in} A$——元素 x 不属于 A；

$\{x\mid x\in A,p(x)\}$——集合 A 中具有性质 p 的元素 x 的全体.

2. 集合的关系与运算

符号"$\subset$"表示"包含"；符号"$=$"表示"相等"；符号"$\varnothing$"表示"空集"；符号"$\cup$"表示"并"；符号"$\cap$"表示"交"；符号"$-$"表示"差".

例如，设 A 与 B 是两个集合，则

$A\subset B$——A 的任意元素 x 都是 B 的元素，即 A 是 B 的子集，或 A 被 B 包含；

$A=B$——A 与 B 相等，即 $A\subset B$ 同时 $B\subset A$；

$A\subset B$，且 $A\neq B$——A 是 B 的真子集；

$A\cup B$——A 与 B 的并集，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$；

$A\cap B$——A 与 B 的交集，即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$；

$A-B$——A 与 B 的差集，即 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\overline{\in} B\}$.

设 I 是全集，$A\subset I$，A^C——A 的补集，即 $A^C=I-A$.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是一列集合，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\{x\mid \text{存在某个正整数 } k\text{，有 } x\in A_k\}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\{x\mid \text{对任意正整数 } k\text{，有 } x\in A_k\}$$

二、数集符号

本书所说的数都是实数．全体实数，即实数集，表为$\mathbb{R}$，本书所说的数集都是实数集$\mathbb{R}$的子集，

实数集$\mathbb{R}$有些常用的子集：

正整数集表为$\mathbb{N}$，整数集表为$\mathbb{Z}$，有理数集表为$\mathbb{Q}$，有

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$$

1. 区 间

设 $a,b\in\mathbb{R}$，且 $a<b$.

开区间 $(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$，

闭区间 $[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$，

半开区间 $(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$，

半开区间 $[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$，

以上四个区间都称为有限区间.

开区间 $(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\}$，

闭区间 $[a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}$，

开区间 $(-\infty,a)=\{x\,|\,x<a\}$，

闭区间 $(-\infty,a]=\{x\,|\,x\leqslant a\}$，

以上四个区间都称为无限区间，其中$+\infty$读作“正无穷大”，$-\infty$读作“负无穷大”，它们仅仅是一种记号，不是实数.

2. 邻 域

设 $a\in\mathbb{R}$，任意 $\delta>0$.

点 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$.

点 a 的 δ 去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)-\{a\}$.

有时将 $U(a,\delta)$和 $\mathring{U}(a,\delta)$简记为 $U(a)$和 $\mathring{U}(a)$，并简称为“a 的邻域”和“a 的去心邻域”.

三、逻辑符号

为了使定义、定理的表述简明准确，本书将普遍使用下面的数理逻辑符号.

1. 连词符号

符号“$\Rightarrow$”表示“蕴涵”或“若……，则……”.

$A\Rightarrow B$——若命题 A 成立，则命题 B 成立，此时也称 A 是 B 的充分条件，同时也称 B 是 A 的必要条件.

例如：$x\overline{\in}A\cup B\Rightarrow x\overline{\in}A$.

符号“$\Leftrightarrow$”表示“充分必要”或“当且仅当”.

$A\Leftrightarrow B$——$A\Rightarrow B$ 并且 $B\Rightarrow A$，即命题 A 与命题 B 等价，此时也称 A 是 B 的充分必要条件，或称 B 是 A 的必要充分条件.

例如：$x\overline{\in}A\cup B\Leftrightarrow x\overline{\in}A$ 且 $x\overline{\in}B$.

2. 量词符号

符号“$\forall$”表示“任意一个”或“所有的”，它是将英文单词“Any”的第一个字母 A 倒过来.

符号“$\exists$”表示“存在一个”或“至少有一个”，它是将英文单词“Exist”的第一个字母 E 反过来.

例如：$\forall\,x\in\mathbb{R}$，有 $x^2\geqslant 0$；$\exists\,x\in\mathbb{R}$，有 $x^2+x-1=0$.

下面用数理逻辑符号给出数集 A 有上界、有下界和有界的简明定义：

数集 A 有上界$\Leftrightarrow\exists\,b\in\mathbb{R}$，$\forall\,x\in A$，有 $x\leqslant b$.

数集 A 有下界 $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in A$，有 $x \geqslant a$.

数集 A 有界 $\Leftrightarrow \exists M > 0, \forall x \in A$，有 $|x| \leqslant M$.

3. 否定法则

设有命题 Q："集合 A 中任意元素 a 都有性质 $P(a)$"，即 $\forall a \in A$，有 $P(a)$. 而 Q 的否命题非 Q 是："集合 A 中存在某个元素 a_0，没有性质 $P(a_0)$"，即 $\exists a_0 \in A$，没有 $P(a_0)$. 显然，这两个命题互为否命题. 由此可见，否定一个命题，要将原命题中的"$\forall$"改为"$\exists$"，将"$\exists$"改为"$\forall$"，并将性质 P 否定，其依据就是可以用数理逻辑方法严格证明的否定法则.

否定法则　设命题 Q 是包含量词 $\forall$ 和 $\exists$ 的陈述，则命题非 Q 可以在不改变命题 Q 的语句的顺序的情况下，只把量词 $\forall$ 和 $\exists$ 分别改成 $\exists$ 和 $\forall$，并将最后一个性质否定而得到.

例如，数集 A 有界与数集 A 无界互为否命题，用否定法则可以表示为：

数集 A 有界 $\Leftrightarrow \exists M > 0, \forall x \in A$，有 $|x| \leqslant M$；

数集 A 无界 $\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists x_0 \in A$，有 $|x_0| > M$.

四、其他符号

符号"max"表示"最大"（它是 maximum 的缩写）.

符号"min"表示"最小"（它是 minimum 的缩写）.

例如：$\max\{-1,2,5\}=5$，$\min\{-1,2,5\}=-1$.

符号"$n!$"表示"不超过 n 的所有正整数的连乘积"，读作"n 的阶乘"，即

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

规定：$0! = 1$.

符号"$n!!$"表示"不超过 n 并与 n 有相同奇偶性的所有正整数的连乘积"，读作"n 的双阶乘"，即

$$(2k)!! = (2k) \cdot (2k-2) \cdot \cdots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$$

$$(2k-1)!! = (2k-1) \cdot (2k-3) \cdot \cdots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$$

符号"$\sum$"表示"连加"，符号"$\prod$"表示"连乘"，即

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$$

Ⅱ　常 用 不 等 式

一、绝对值不等式

定理 1　设 $a, b \in \mathbb{R}$，有

$$|a| - |b| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|$$

证明　显然有

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|, \quad -|b| \leqslant b \leqslant |b|$$

两式相加，有

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|$$

于是

$$|a+b|\leqslant |a|+|b|$$

将上述 b 改为 $-b$ 后，上式仍成立，故

$$|a-b|\leqslant |a|+|b|$$

这就证明了右边不等式

$$|a\pm b|\leqslant |a|+|b|$$

运用这个不等式，有

$$|a|=|(a-b)+b|\leqslant |a-b|+|b|$$
$$|a|-|b|\leqslant |a-b|$$

将上述 b 改为 $-b$ 后，上式仍成立，故

$$|a|-|b|\leqslant |a+b|$$

于是证明了左边不等式

$$|a|-|b|\leqslant |a\pm b|$$

二、伯努利①不等式

定理 2 设 $x\geqslant -1, n\in \mathbb{N}$，则

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx$$

证明 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，上式以等式的形式成立.

假设 $n=k$ 时不等式成立，即

$$(1+x)^k\geqslant 1+kx$$

当 $n=k+1$ 时，有

$$(1+x)^{k+1}=(1+x)^k(1+x)\geqslant (1+kx)(1+x)=1+(k+1)x+kx^2\geqslant 1+(k+1)x$$

由数学归纳法知不等式对一切正整数 n 都成立.

三、均值不等式

定理 3 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 个正实数，则

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

其中等号成立的充要条件是 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

证明 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，上式以等式的形式成立.

假设对任意 $n-1$ 个正数不等式成立，下面考虑任意 n 个正数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的情况，不妨设 $x_n=\max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，记 $A=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$，则

$$x_n\geqslant A=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\geqslant \sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}$$

---

① 雅各布·伯努利(J. Bernoulli，1654～1705)，瑞士数学家.

于是

$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n=\left[\frac{(n-1)A+x_n}{n}\right]^n=\left(A+\frac{x_n-A}{n}\right)^n=$$

$$A^n+nA^{n-1}\left(\frac{x_n-A}{n}\right)+\cdots+\left(\frac{x_n-A}{n}\right)^n\geqslant$$

$$A^n+nA^{n-1}\left(\frac{x_n-A}{n}\right)=A^{n-1}x_n\geqslant x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$$

即

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

由证明过程容易看出,等号成立的充分必要条件是 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

四、双阶乘不等式

定理 4　设 $n\in\mathbb{N}$,则

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}\leqslant\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

证明　利用放缩法,设 $A=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

一方面

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}=$$

$$\left(\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot4\cdots2n}\right)^{-1}=\frac{1}{(2n+1)\cdot A}$$

即

$$A\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

另一方面

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n}=\frac{1}{4nA}$$

即

$$A\geqslant\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

综合两方面,有

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}\leqslant A=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

五、三角不等式

定理 5　设 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,则有 $\sin x<x<\tan x$.

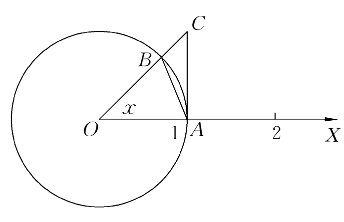

图 1

证明　在单位圆中作圆心角 $x,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,角的始边为 OX 轴上的 OA,终边为 OB. 用线段连结 AB,过 A 点作圆 O 的切线与 OB 的延长线交于点 C(如图 1). 显然

$$\triangle OAB \text{ 的面积} < \text{扇形 } OAB \text{ 的面积} < \triangle OAC \text{ 的面积}$$

即

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$

或

$$\sin x < x < \tan x, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

推论 设 $x \in \mathbb{R}$，则有 $|\sin x| \leqslant |x|$.

证明 由定理 5，有

$$|\sin x| = \sin x \leqslant x = |x|, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

与

$$|\sin(-x)| = \sin x \leqslant x = |-x|, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

于是综合起来，有

$$|\sin x| \leqslant |x|, \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

而当 $|x| \geqslant \frac{\pi}{2}$ 时，又有

$$|\sin x| \leqslant 1 < \frac{\pi}{2} \leqslant |x|$$

于是

$$|\sin x| \leqslant |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$