数学分析经典习题解析

孙摇涛摇编

高等教育出版社

需要全本请访问 www.ertongbook.com

内容简介

本书对数学分析的基本概念、基本结论、重要方法及证明、计算技巧进行了归类和总结，对其中重要的内容进行了深入细致、全面的讨论，同时介绍了数学分析教材中不常见到的但同时又非常重要的定理。

本书收集了大量的数学分析习题，这些习题中的大部分无论其结论，还是证明这些结论的方法都是非常重要的。本书内容全面系统，由浅入深，重点突出，对提高数学分析的水平和能力都有很大帮助。有部分内容介绍了数学分析在微分方程、复变函数中的应用。

本书可作为报考数学各专业硕士研究生复习数学分析的参考书，也可供讲授数学分析课程的教师及学习数学分析课程的在校大学生作为教学参考书。

摇图书在版编目（悦阅）数据

摇数学分析经典习题解析 辕刘小涛编援–北京 院高等教育出版社，圆猿猿园原园
摇ISBN 猿原园源原源缘缘缘原园

摇Ⅰ圆数…摇援…摇Ⅱ圆刘…摇援…摇Ⅲ圆数学分析 原高等学校 原解题摇Ⅳ圆O…摇援…摇原原

摇中国版本图书馆 悦阅读数据核字（圆园园怨）第 园园园园园园号

策划编辑摇王摇瑜摇责任编辑摇李摇陶摇封面设计摇于摇涛摇责任绘图摇尹文军
版式设计摇史新薇摇责任校对摇康晓燕摇责任印制摇

出版发行摇高等教育出版社摇摇摇摇摇摇摇购书热线摇园缘愿缘原远缘缘怨园
社摇摇址摇北京市西城区德外大街 源号　　免费咨询摇愿缘园远园原愿缘园园
邮政编码摇园园园缘愿　　网摇摇址摇摇http://www.hep.edu.cn
总摇摇机摇园缘愿缘原远缘缘怨园　　摇摇摇摇http://www.hep.com.cn

经摇摇销摇新华书店北京发行所
印摇摇刷

开摇摇本摇苑缘愿mm 伊 员园愿猿mm　　版摇摇次摇摇年摇月第 员版
印摇摇张摇圆缘　　印摇摇次摇摇年摇月第摇次印刷
字摇摇数摇源园园园园　　定摇摇价摇圆园援园园元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有摇侵权必究

序

微积分学是人类数学史上的最大发明。自从有了微积分，自然界与人世间各种事物的运动变化规律就变成了数学题材。从而实际上它帮助催生和发展了近代和现代科学技术。

但是微积分的理论与方法是以极限原理与实数基本理论作为基础的，因此从 [illegible] 世纪末叶以后欧美数学家都不约而同地把初等与高等微积分统称之为 “数学分析 ”。我国从 [illegible] 世纪 [illegible] 年代以来也一直沿用这一名称。

海内外数学教育界都公认 “数学分析 ”是大学数学基础课程中的 “重头戏 ”。事实上，正是它的理论结构的严密精致性与方法技巧的灵活多样性，使其久已成为培养数学科学人才的重点科目之一。

本书著者孙涛同志讲授数学分析课程十多年，现今编著出版 《数学分析经典习题解析》一书，这正是他长期教学心得与经验的结晶。孙涛多年从事泛函分析方面的教学与研究，所以他对数学分析题材的内容要点、关键及难点自有透彻的理解和洞察。

正是作者丰富的教学与研究经验，使他能恰当地精选出 [illegible] 多个典型例习题，作出了符合认识规律的顺序安排，并依次给出了具有启发性的精细解法，有些解法还特别有趣并包含了作者自己的独到心得。例如，关于实数理论七个基本定理的等价性命题，作者给出了一个单循环式的证明，这对教师和学生来说，显然都会很感兴趣的。书中其他有趣题材，不胜列举。

总的看来，此书特色有三：一是理论框架结构完整，凡基本重要题材无一疏漏。二是讲述简明、精确而严密。这对学习者获取分析学的严谨性训练十分有益。三是书中选讲了一部分一般数学分析教程不易见到的有趣题材，如大、小 [illegible] 定理与 [illegible] 则逆定理等等。此外，书中还有少量难度较大的综合型题目，那是供学习研究者参考的，初学者大可不必急于接触。

相信此书对数学分析的教学和教改有其独特的功能和作用，并对数学专业研究生入学考试有较大的帮助。故乐于为之做序介绍。

徐利治

[illegible] 年 [illegible] 月 [illegible] 日于北京寓所

前摇摇言

数学分析是数学系本科生极为重要的一门课程，在数学系研究生入学考试中也是必考的课程之一。该课程具有课时长、内容多、难度大、综合性强、与其他科目联系广的特点，是衡量数学系学生数学水平的重要标志。为了使学生能够对整个数学分析理论有系统的了解和认识，具备较高的能力和水平，本书对数学分析的主要内容进行了较为广泛、深入和系统的总结，收集了大量习题并做了详细的解答。主要内容如下：

一、在第一章中系统、全面地总结了数学分析的基本概念和基本理论，详细深入地讨论了极限（包括数列极限、函数极限）这一数学分析中最为重要的概念和与之相关的理论。强调了实数基本理论以及上、下极限在极限计算和证明中的重要作用。细致讨论了函数的连续性、导数、可积函数、级数、反常积分、参变量的积分等重要概念以及相关的重要定理，特别强调了连续函数可以用多项式一致逼近，导函数值的连通性，可积函数可以用连续函数积分逼近等性质的重要性。我们还特别讨论了单调函数和凸函数的基本性质。我们讨论了多元函数的连续性与一元函数的连续性的关系以及多元函数的偏导数、方向导数、全微分、隐函数存在定理等重要概念及基本结论。最后我们还讨论了重积分，第一、二型曲线与曲面积分的定义及有关场论的重要定理。

二、实数理论的七个基本定理构成了数学分析的重要理论基础，充分理解这些定理及熟练掌握其证明，不但对提高数学分析的水平，而且对提高逻辑思维能力起着事半功倍的作用。我们在第四章中给出了关于实数理论的七个基本定理的等价性证明，有趣的是我们所给出的证明是一个单循环的证明。我们在书中也给出了关于七个基本定理应用的例题。

三、在第六章中，我们专门讨论了涉及不等式方面的问题。该问题是数学分析研究的重要对象，也是分析中应用非常广泛的工具之一。我们给出了许多分析中重要的不等式及其证明，在此基础上又讨论了许多不等式方面的习题，这对提高数学分析的综合水平是有帮助的。

四、本书选择了一定数量涉及常微分方程的题目。常微分方程是数学系主要的课程之一，它的一般性理论和数学分析有直接的联系。引入部分常微分方程的题目对提高分析的应用水平很有帮助，同时又可以利用常微分方程的一般理论和方法来解决数学分析中的问题。

五、我们介绍了数学分析的部分重要结论，诸如处处连续处处不可导函数

的构造，幂级数在收敛区间边界上的性质（小燥陶贝尔定理）。这些重要的结论在数学分析教材中是不易见到的。

六、全书选择了大量的习题，这些题目有的涉及数学分析中重要概念的理解，有的涉及重要定理的应用，有的涉及重要的计算，有的涉及数学分析中重要结论的补充。另外我们还重点选择了大量综合性的题目，虽然这些题目有一定难度，攻克这些题目对真正提高数学分析的能力和水平是非常必要的。我们对所有的习题都给出了详细的解答。

七、我们在部分章节习题前面列出了与之相关的概念、定理、主要结果、主要工具。虽然和第一章有部分重合之处，但其目的是针对特定的问题进行归纳总结。

八、本书有极少一部分题目难度较大，初学者可以不必接触这些题目。

此书的目的是使学生对整个数学分析的基本理论有全面、系统、深入的理解，对一些重要概念之间的关联有进一步的认识，对分析的基本技巧、主要结论、重要思想有基本的把握。

在本书的编写中，张祥德、李长军两位同志提出了很多宝贵的意见和建议，刘证、张云生两位老师提出了许多修改意见，孟鹏、陈媛媛、李岩、于延华、王欣彦、刘超等同志对本书的形成提供了帮助，对此表示衷心的感谢。

由于本人学识有限，书中差错在所难免，欢迎提出批评意见和建议。

孙摇涛摇摇

圆丽装年 苑月于东北大学

需要全本请访问 www.ertongbook.com

目摇摇录

第一章摇数学分析基本概念及主要结论 …… 员

一、数列极限 …… 员

二、函数的定义 …… 缘

三、函数极限 …… 苑

四、连续函数的定义和基本性质 …… 员园

五、导数及导数的基本性质 …… 员员

六、定积分的定义及积分存在条件 …… 员源

七、数项级数的基本概念和主要结果 …… 员怨

八、正项级数的基本概念和主要结果 …… 圆园

九、绝对收敛与条件收敛 …… 圆圆

十、函数项级数 …… 圆缘

十一、函数项级数的和的性质 …… 圆远

十二、幂级数 …… 圆怨

十三、傅里叶级数 …… 猿园

十四、多元函数的极限与连续性 …… 猿圆

十五、多元函数的导数 …… 猿缘

十六、高阶偏导数与多元函数的极值 …… 猿苑

十七、隐函数 …… 猿怨

十八、重积分 …… 源园

十九、第一型曲线与曲面积分 …… 源怨

二十、第二型曲线积分 …… 缘员

二十一、第二型曲面积分 …… 缘圆

二十二、反常积分 …… 缘源

二十三、瑕积分 …… 缘苑

二十四、有限区间上的含参变量积分 …… 缘远

二十五、无穷限的含参变量积分 …… 缘怨

第二章摇数列极限 …… 缘怨

第三章摇连续函数 …… 苑苑

一、连续函数的相关定义和基本性质 …… 苑苑

二、有关实数的基本性质 …… 苑远

三、连续函数的习题 …… 方法

第四章摇实数理论的七个基本定理 …… 题意
一、确界存在原理 …… 题意
二、柯西收敛准则 …… 题意
三、区间套原理 …… 题意
四、单调有界原理 …… 题意
五、致密性定理 …… 题意
六、聚点原则 …… 题意
七、有限覆盖定理 …… 题目

第五章摇导数 …… 题苑
一、导数的基本定义和性质 …… 题苑
二、阶的概念 …… 题意
三、常见阶公式 …… 题意
四、基本导数公式 …… 题意
五、关于导数的习题 …… 题意

第六章摇方程与不等式 …… 方法

第七章摇定积分 …… 方法
一、基本不定积分公式 …… 方法
二、关于定积分的重要定理摇可积函数的构造 …… 方法
三、微积分学基本定理摇变上限求导公式摇分部积分法 …… 方法
四、积分不等式摇积分中值定理 …… 方法
五、关于定积分的习题 …… 方法

第八章摇级数 …… 题源
一、数项级数的收敛定理 …… 题源
二、正项级数的收敛性判别定理 …… 题目
三、级数收敛的相关不等式摇泰勒公式 …… 题目
四、函数项级数的一致收敛性 …… 题目
五、函数项级数的一致收敛性判别定理 …… 题苑
六、函数项级数的和的性质 …… 题苑
七、幂级数 …… 题苑
八、傅里叶级数 …… 题苑
九、关于级数的习题 …… 题意

第九章摇多元函数的连续性和偏导数…… 圆圆
一、多元函数的极限和连续性定义及主要定理 …… 圆圆
二、多元函数的偏导数摇中值定理摇隐函数存在定理 …… 圆缘
三、常用结论 …… 圆缘
四、多元函数的连续性及偏导数的习题 …… 圆缘

第十章摇重积分…… 圆猿

第十一章摇曲线、曲面积分…… 猿远

第十二章摇反常积分和瑕积分…… 猿圆
一、反常积分的基本定义及收敛判别定理 …… 猿圆
二、瑕积分基本定义及收敛判别定理 …… 猿源
三、常见的收敛结论 …… 猿猿
四、关于反常积分和瑕积分的习题 …… 猿远

第十三章摇含参变量的积分 …… 猿缘
一、有限区间上含参变量的积分的性质 …… 猿缘
二、无穷区间上含参变量的积分的一致收敛性 …… 猿源
三、含参变量的积分的习题 …… 猿源

第一章

数学分析基本概念及主要结论

一、数列极限

极限是数学分析中非常重要的概念，极限的基本思想自始至终对解决分析中面对的问题起着关键的作用，分析中所有重要的概念，如导数、定积分、级数等均是利用极限提出的摇对极限的定义和基本性质的把握如何，是能否对整个数学分析基本理论有系统的认识的关键所在摇下面我们首先给出有关数列极限的主要定义和结论摇

员 点列 $\{\text{曾}_{\text{灶}}\}$ 以 $\text{曾}_{\text{园}}$ 为极限的定义摇对于任意给定的 ε 跃园，存在正整数 晕跃园，当 灶跃晕时，

$$\text{渣}_{\text{灶}}\text{原}\text{曾}_{\text{园}}\text{渣约}\varepsilon,$$

则称点列 $\{\text{曾}_{\text{灶}}\}$ 当 灶趋于无穷时以 $\text{曾}_{\text{园}}$ 为极限摇记为 $\text{遵}_{\text{灶}\to\text{肄}}\text{曾}_{\text{灶}}\text{越}\text{曾}_{\text{园}}$ 摇用数学符号简记为

$$\forall\varepsilon\text{跃园},\exists\text{晕跃园},\text{当灶跃晕}\Rightarrow\text{渣}_{\text{灶}}\text{原}\text{曾}_{\text{园}}\text{渣约}\varepsilon\text{摇}$$

例摇用 ε 原晕语言证明 $\text{遵}_{\text{灶}\to\text{肄}}\text{曾}_{\text{灶}}\text{越}\text{园}$ 摇 $\text{葬}_{\text{灶}}\text{跃员}$ 摇

证明摇设 $\text{葬}_{\text{灶}}\text{越员垣怎}$，由于 $\text{葬}_{\text{灶}}\text{跃员}$，所以 $\text{怎}_{\text{灶}}\text{跃园}$ 摇由二项式定理得

$$\text{葬}_{\text{灶}}\text{越员垣怎}^{\text{灶}}\text{越员垣灶怎}\text{垣}\frac{\text{灶}(\text{灶原员})}{\text{圆}}\text{怎}^{\text{圆}}\text{垣}\cdots\text{跃}\frac{\text{灶}(\text{灶原员})}{\text{圆}}\text{怎}^{\text{圆}},$$

因此 $\left|\frac{\text{灶}}{\text{葬}_{\text{灶}}}\text{原园}\right|\text{越}\frac{\text{灶}}{\text{葬}_{\text{灶}}}\text{约}\frac{\text{圆}}{(\text{灶原员})\text{怎}^{\text{圆}}}\text{约}\varepsilon$，解此不等式得 $\text{灶跃}\frac{\text{圆}}{\varepsilon\text{怎}^{\text{圆}}}\text{垣员}$ 摇应取 $\text{晕越}\left[\frac{\text{圆}}{\varepsilon\text{怎}^{\text{圆}}}\text{垣员}\right]$ 摇用 ε 原晕语言表达即为：$\forall\varepsilon\text{跃园}$，取 $\text{晕越}\left[\frac{\text{圆}}{\varepsilon\text{葬原员}^{\text{圆}}}\text{垣员}\right]$，当 灶跃晕时，有

$$\left|\frac{\text{灶}}{\text{葬}_{\text{灶}}}\text{原园}\right|\text{越}\frac{\text{灶}}{\text{葬}_{\text{灶}}}\text{约}\frac{\text{圆}}{(\text{灶原员})\text{怎}^{\text{圆}}}\text{约}\varepsilon\text{摇}$$

这说明 $\text{遵}_{\text{灶}\to\text{肄}}\text{曾}_{\text{灶}}\text{越}\text{园}$ 摇 $\text{葬}_{\text{灶}}\text{跃员}$ 摇

圆 点列 $\{\text{曾}_{\text{灶}}\}$ 不以 $\text{曾}_{\text{园}}$ 为极限的定义摇存在定数 $\varepsilon_{\text{园}}$ 跃园，对于任意 噪跃园，存在 $\text{灶}_{\text{噪}}$ 跃噪满足

$$\text{渣}_{\text{灶噪}}\text{原}_{\text{囤}}\text{渣} \geq \varepsilon_{\text{园}}\text{援}$$

用数学符号简记为 $\exists\,\varepsilon_{\text{园}}$ 跃园，$\forall$ 噪跃园，$\exists$ 灶噪跃噪，$\text{渣}_{\text{灶噪}}\text{原}_{\text{囤}}\text{渣} \geq \varepsilon_{\text{园}}$ 援

例摇用 ε 原晕语言证明 $\text{遭}_{\text{灶}\to\text{肄}}\text{皂}(\text{原员})^{\text{灶}} \neq \text{员}$ 援

证明摇取 $\varepsilon_{\text{园}}$ 越员，$\forall$ 灶跃园，令 噪越圆灶垣员跃灶，则有 $\text{渣}_{\text{圆灶垣员}}\text{原员渣越圆跃员越}\varepsilon_{\text{园}}$ 援

猿 $\text{遭}_{\text{灶}\to\text{肄}}\text{皂}_{\text{灶}}$ 存在的柯西收敛准则摇点列 $\{\text{皂}_{\text{灶}}\}$ 有有限极限的充要条件是对于任意给定的 ε 跃园，存在 晕跃园，当 皂，灶跃晕时，满足 $\text{渣}_{\text{皂}}\text{原}_{\text{灶}}\text{渣}\text{约}\varepsilon$ 援用数学符号简记为

$$\forall\,\varepsilon\text{ 跃园，}\exists\text{ 晕越晕}(\varepsilon)\text{，当 皂，灶跃晕} \Rightarrow \text{渣}_{\text{皂}}\text{原}_{\text{灶}}\text{渣}\text{约}\varepsilon\text{援}$$

例摇设 $\text{渣}_{\text{灶垣员}}\text{原}_{\text{灶}}\text{渣} \leq \frac{\text{员}}{\text{圆}}\text{渣}_{\text{灶}}\text{原}_{\text{灶原员}}\text{渣}(\text{灶} \geq \text{圆})$，证明 $\text{遭}_{\text{灶}\to\text{肄}}\text{皂}_{\text{灶}}$ 存在援

证明摇令 $\text{遭}_{\text{灶垣员}}$ 越 $\text{渣}_{\text{灶垣员}}\text{原}_{\text{灶}}\text{渣}$，于是有 $\text{园} \leq \text{遭}_{\text{灶垣员}} \leq \frac{\text{员}}{\text{圆}}\text{遭}_{\text{灶}}(\text{灶越员，圆}\cdots)$ 援利用归纳法可得

$$\text{遭}_{\text{灶垣员}} \leq \frac{\text{员}}{\text{圆}^{\text{灶原员}}}\text{遭}_{\text{圆}}\text{援}$$

又对于任意的 皂跃灶，$\text{皂}_{\text{皂}}\text{原}_{\text{灶}}\text{越}\sum_{\text{蚤越灶}}^{\text{皂原员}}(\text{皂}_{\text{蚤垣员}}\text{原}_{\text{蚤}})$，于是

$$\text{渣}_{\text{皂}}\text{原}_{\text{灶}}\text{渣越}\sum_{\text{蚤越灶}}^{\text{皂原员}}\text{遭}_{\text{蚤}} \leq \text{遭}_{\text{灶}}\sum_{\text{蚤越灶}}^{\text{皂原员}}\frac{\text{员}}{\text{圆}^{\text{皂原员原蚤}}}\text{约圆}\text{遭}_{\text{灶}} \to \text{园摇}(\text{灶}\to\text{肄})\text{援}$$

这表明 $\{\text{皂}_{\text{灶}}\}$ 是柯西列，所以 $\text{遭}_{\text{灶}\to\text{肄}}\text{皂}_{\text{灶}}$ 存在援

源 $\text{遭}_{\text{灶}\to\text{肄}}\text{皂}_{\text{灶}}$ 不存在的充要条件摇存在定数 $\varepsilon_{\text{园}}$ 跃园，对任意正整数 晕跃园，存在 灶，皂跃晕，满足

$$\text{渣}_{\text{皂}}\text{原}_{\text{灶}}\text{渣} \geq \varepsilon_{\text{园}}\text{援}$$

用数学符号简记为 $\exists\,\varepsilon_{\text{园}}$ 跃园，$\forall$ 晕跃园，$\exists$ 皂，灶跃晕，使 $\text{渣}_{\text{皂}}\text{原}_{\text{灶}}\text{渣} \geq \varepsilon_{\text{园}}$ 援

例摇用 ε 原晕语言证明 $\text{遭}_{\text{灶}\to\text{肄}}\left[(\text{原员})^{\text{灶}}\text{垣}\frac{\text{员}}{\text{灶}}\right]$ 不存在援

证明摇取 $\varepsilon_{\text{园}}$ 越员，$\forall$ 晕跃园，令 灶越晕垣员，皂越晕垣圆，有

$$\text{渣}_{\text{皂}}\text{原}_{\text{灶}}\text{渣越}\left|(\text{原员})^{\text{晕垣员}}\text{垣}\frac{\text{员}}{\text{晕垣员}}\text{原}(\text{原员})^{\text{晕垣圆}}\text{原}\frac{\text{员}}{\text{晕垣圆}}\right| \geq \text{圆原}\left(\frac{\text{员}}{\text{晕垣员}}\text{原}\frac{\text{员}}{\text{晕垣圆}}\right)\text{跃员，}$$

这说明 $\text{遭}_{\text{灶}\to\text{肄}}\left[(\text{原员})^{\text{灶}}\text{垣}\frac{\text{员}}{\text{灶}}\right]$ 不存在援

缘 点列收敛和子点列收敛的关系摇 $\text{遭}_{\text{灶}\to\text{肄}}\text{皂}_{\text{灶}}$ 不存在的充要条件是

$$\text{存在 }\{\text{皂}_{\text{灶噪}}\} \subset \{\text{皂}_{\text{灶}}\}\text{，}\{\text{皂}_{\text{灶噪}}\} \subset \{\text{皂}_{\text{灶}}\}\text{，满足 }\text{遭}_{\text{噪}\to\text{肄}}\text{皂}_{\text{灶噪}} \neq \text{遭}_{\text{噪}\to\text{肄}}\text{皂}_{\text{灶噪}}\text{援}$$

用数学符号简记为 $\exists\,\{\text{皂}_{\text{灶噪}}\} \subset \{\text{皂}_{\text{灶}}\}$，$\{\text{皂}_{\text{灶噪}}\} \subset \{\text{皂}_{\text{灶}}\}$，$\text{遭}_{\text{噪}\to\text{肄}}\text{皂}_{\text{灶噪}} \neq \text{遭}_{\text{噪}\to\text{肄}}\text{皂}_{\text{灶噪}}$ 援

·圆·

例摇证明$\underset{灶\to肄}{逢}\left[(原员)^{灶}垣\frac{员}{灶^{圆}垣员}\right]$不存在援

证明摇设$曾_{灶}$越$(原员)^{灶}垣\frac{员}{灶^{圆}垣员}$,则有$\underset{灶\to肄}{逢}曾_{灶}$越$\underset{灶\to肄}{逢}\left(员垣\frac{员}{源灶^{圆}垣员}\right)$越员,而$\underset{灶\to肄}{逢}曾_{灶}$越$\underset{灶\to肄}{逢}\left[原员垣\frac{员}{圆灶垣员^{圆}垣员}\right]$越原员援这说明$\underset{灶\to肄}{逢}\left[(原员)^{灶}垣\frac{员}{灶^{圆}垣员}\right]$不存在援

远 点列收敛的必要条件摇若$\underset{灶\to肄}{逢}曾_{灶}$存在,则$\{曾_{灶}\}$为有界点列援即存在酝跃园对任意灶,有$渣曾_{灶}\leqslant$酝援

苑 单调有界原理摇若$\{曾_{灶}\}$为单调有界点列,则$\underset{灶\to肄}{逢}曾_{灶}$存在援

例摇设葬跃园$曾_{圆}$跃园$曾_{灶\to员}$越$\frac{员}{圆}\left(曾_{灶}垣\frac{葬}{曾_{灶}}\right)$摇(灶越园,员,圆…),证明$\underset{灶\to肄}{逢}曾_{灶}$越$\sqrt{葬}$援

证明摇显然$曾_{灶}$跃园摇(灶越园,员,圆…)援又

$$曾_{灶\to员}越\frac{员}{圆}\left(曾_{灶}垣\frac{葬}{曾_{灶}}\right)\geqslant\sqrt{曾_{灶}}\frac{\sqrt{葬}}{\sqrt{曾_{灶}}}越\sqrt{葬}摇(灶越园,员,圆…),$$

因此有

$$曾_{灶\to员}越\frac{员}{圆}\left(曾_{灶}垣\frac{葬}{曾_{灶}}\right)\leqslant\frac{员}{圆}\left(曾_{灶}垣\sqrt{葬}\right)\leqslant\frac{员}{圆}\left(曾_{灶}垣曾_{灶}\right)越曾_{灶}摇(灶越园,员,圆…),$$

即点列$\{曾_{灶}\}$单调递减、下方有界援由单调有界原理知$\underset{灶\to肄}{逢}曾_{灶}$越糟存在,且糟$\geqslant\sqrt{葬}$跃园援于是由等式

$$曾_{灶\to员}越\frac{员}{圆}\left(曾_{灶}垣\frac{葬}{曾_{灶}}\right)知糟越\frac{员}{圆}\left(糟垣\frac{葬}{糟}\right),$$

解此方程得糟越$\sqrt{葬}$,即$\underset{灶\to肄}{逢}曾_{灶}$越$\sqrt{葬}$援

愿 数列极限运算的基本性质摇若$\underset{灶\to肄}{逢}曾_{灶}$和$\underset{灶\to肄}{逢}赠_{灶}$存在,则

葬 $\underset{灶\to肄}{逢}(曾_{灶}依赠_{灶})$越$\underset{灶\to肄}{逢}曾_{灶}$依$\underset{灶\to肄}{逢}赠_{灶}$;

遭 $\underset{灶\to肄}{逢}(曾_{灶}赠_{灶})$越$\underset{灶\to肄}{逢}曾_{灶}$$\underset{灶\to肄}{逢}赠_{灶}$;

糟 $\underset{灶\to肄}{逢}\left(\frac{曾_{灶}}{赠_{灶}}\right)$越$\frac{\underset{灶\to肄}{逢}曾_{灶}}{\underset{灶\to肄}{逢}赠_{灶}}$援

在糟中假设$\underset{灶\to肄}{逢}赠_{灶}\neq$园援

怨 数列的极限点摇$曾_{圆}$称为是$\{曾_{灶}\}$的极限点,如果存在子数列$\{曾_{灶噪}\}$使

$$\underset{噪\to肄}{逢}曾_{灶噪}越曾_{圆}援$$

点列$\{曾_{灶}\}$极限存在的充要条件是$\{曾_{灶}\}$的所有极限点相等援

员园 极限的夹逼定理摇设$\underset{灶\to肄}{逢}曾_{灶}$越$\underset{灶\to肄}{逢}赠_{灶}$越糟又

$$曾_{灶}\leqslant扎_{灶}\leqslant赠_{灶}摇(灶越员,圆…),$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com

则 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\frac{1}{2}$.

例 用夹逼定理证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}$.

证明 由不等式 $\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}<\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k+(n+1)^k}{n^{k+1}}<\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k+(n+1)^k+(n+2)^k+\cdots+(2n)^k}{n^{k+1}}$.

设 $a_n=\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$, $b_n=\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k+(n+1)^k+(n+2)^k+\cdots+(2n)^k}{n^{k+1}}$, 有

$$a_n<\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k+(n+1)^k}{n^{k+1}}<b_n,$$

由 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{k+1}$, 知 $\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k+(n+1)^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}$.

定理 点列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 单调递增上方有界, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 单调递减下方有界, 其极限存在, 设其为 e, 即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e.$$

e 有估计式, $0<e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\frac{1}{n!}\cdot\frac{\theta_n}{n}$, $0<\theta_n<1$.

定义 若 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$.

定义 斯笃兹 (Stolz) 定理

引理 设 $\{b_n\}$ 为严格递增的正无穷大量 ($b_1<b_2<\cdots$);

定理 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$;

推论 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=l$,

则 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=l$.

例 设 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}$.

证明 令 $b_n=n^2$, $a_0=0$, 则 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{b_n}$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^2-(n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2-\frac{1}{n}}=\frac{a}{2}.$$

斯笃兹定理是求数列极限非常有效的方法.

定义 上、下极限的定义 设 $\{a_n\}$ 为有界点列, 令 $\alpha_n=\sup_{k\geq n}\{a_k\}$, 则 $\{\alpha_n\}$ 单调递减有界, 则 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ 存在, 则有

$$\alpha_1\geq\alpha_2\geq\cdots\geq\alpha_n\geq\alpha_{n+1}\geq\cdots,\ \beta_1\leq\beta_2\leq\cdots\leq\beta_n\leq\beta_{n+1}\leq\cdots$$

且 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 有界, 于是 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lambda$, $\lim_{n\to\infty}\beta_n=\mu$, 存在且 $\lambda\geq\mu$, 我们称 λ, μ 分别为

$\{\text{曾}_{\text{灶}}\}$ 的上、下极限援记为

$$\overline{\text{遵}}_{\text{灶}\to\text{肄}}\text{曾}_{\text{灶}}\text{越粤越}\underline{\text{遵}}_{\text{灶}\to\text{肄}}\text{莽}_{\text{灶}},\ \underline{\text{遵}}_{\text{灶}\to\text{肄}}\text{曾}_{\text{灶}}\text{越月越}\overline{\text{遵}}_{\text{灶}\to\text{肄}}\text{遭}_{\text{灶}}\text{援}$$

员缘 上、下极限的 ε 原晕定义摇设 $\{\text{曾}_{\text{灶}}\}$ 为有界点列援

薛 $\overline{\text{遵}}_{\text{灶}\to\text{肄}}\text{曾}_{\text{灶}}\text{越粤}$:

员 对于任意给定的 ε 跃园,存在 晕跃园,当 灶跃晕$\Rightarrow$曾$_{\text{灶}}$约粤垣ε;

圆 存在正整数列 $\{\text{灶}_{\text{员}}\}$约灶$_{\text{圆}}$约…,满足 $\text{曾}_{\text{灶}_{\text{噪}}}$跃粤原$\varepsilon$援用数学符号分别简记为

员 $\forall\varepsilon$ 跃园,$\exists$ 晕, 灶跃晕$\Rightarrow$曾$_{\text{灶}}$约粤垣ε;

圆 $\exists$ 灶$_{\text{员}}$约灶$_{\text{圆}}$约…,$\Rightarrow$曾$_{\text{灶}_{\text{噪}}}$跃粤原ε援

遭 $\underline{\text{遵}}_{\text{灶}\to\text{肄}}\text{曾}_{\text{灶}}\text{越月}$:

员 对于任意给定的 ε 跃园,存在 晕跃园,当 灶跃晕$\Rightarrow$曾$_{\text{灶}}$跃月原ε;

圆 存在正整数列 $\{\text{灶}_{\text{员}}\}$约灶$_{\text{圆}}$约…,满足 $\text{曾}_{\text{灶}_{\text{噪}}}$约月垣$\varepsilon$援用数学符号分别简记为

员 $\forall\varepsilon$ 跃园,$\exists$ 晕, 灶跃晕$\Rightarrow$曾$_{\text{灶}}$跃月原ε;

圆 $\exists$ 灶$_{\text{员}}$约灶$_{\text{圆}}$约…,$\Rightarrow$曾$_{\text{灶}_{\text{噪}}}$约月垣ε援

员远 若 $\overline{\text{遵}}_{\text{灶}\to\text{肄}}\text{曾}_{\text{灶}}\text{越粤}$,$\underline{\text{遵}}_{\text{灶}\to\text{肄}}\text{曾}_{\text{灶}}\text{越月}$,则存在 $\{\text{曾}_{\text{灶}}\}$ 的子列 $\{\text{曾}_{\text{灶}_{\text{噪}}}\}$,$\{\text{曾}_{\text{灶}_{\text{噪}}}\}$ 满足

$$\underline{\text{遵}}_{\text{噪}\to\text{肄}}\text{曾}_{\text{灶}_{\text{噪}}}\text{越粤},\ \underline{\text{遵}}_{\text{噪}\to\text{肄}}\text{曾}_{\text{灶}_{\text{噪}}}\text{越月援}$$

员范 $\underline{\text{遵}}_{\text{灶}\to\text{肄}}\text{曾}_{\text{灶}}$ 存在的充要条件摇 $\overline{\text{遵}}_{\text{灶}\to\text{肄}}\text{曾}_{\text{灶}}\text{越}\underline{\text{遵}}_{\text{灶}\to\text{肄}}\text{曾}_{\text{灶}}$援

数列的上、下极限的定义对处理数学分析中的极限问题有时起着事半功倍的作用援上、下极限与极限的最大不同在于它总是存在的援关于上、下极限的应用见后面的例题援

二、函数的定义

员 函数定义摇设 阅$\subseteq$砸是实数集,如果对每个 曾$\in$阅,按照某种对应关系 枣有惟一确定的实数 赠与之对应,则称 阅与 枣确定一个函数 阅,枣援阅称为函数 阅,枣的定义域,对 曾$\in$阅,记 赠越枣曾 称为函数 阅,枣在 曾点的值援在一般情况下,用 赠越枣曾 表示函数援

圆 函数图像摇设 阅,枣是函数,称平面点集

$$\{\text{曾},\text{赠}\mid\text{赠越枣曾},\text{曾}\in\text{阅}\}$$

为函数 阅,枣的图像援

猿 反函数摇设 阅,枣是函数,用

$$\text{砸越}\ \text{赠}\mid\text{赠越枣曾},\text{曾}\in\text{阅}\}$$

表示函数的值域援称 赠越枣曾 的对应关系是一对一的,如果对于任意 $\text{曾}_{\text{员}}\neq\text{曾}_{\text{圆}}$,$\text{曾}_{\text{员}}$,$\text{曾}_{\text{圆}}\in$阅,有 枣$(\text{曾}_{\text{员}})\neq$枣$(\text{曾}_{\text{圆}})$援这时对任意的 赠$\in$砸,有惟一的 曾$\in$阅与之对应,使得 赠越枣曾 援这样就确定了在 砸上定义的新函数 砸,早,称为 阅,枣的反函数,记为

曾越枣员 赠,赠≦砸援

此时有 赠越枣曾 越枣枣员 赠),赠≦砸援若越枣员 赠 越枣员 枣曾)援

源 周期函数摇设函数 赠越枣曾在实直线上有定义,栽≧是一正数,若对任意曾≦砸,有

枣曾垣栽≧) 越枣曾,

则称 赠越枣曾为以 栽≧为周期的周期函数,栽≧称为 赠越枣曾的一个周期,如果存在栽员跃员是使上式成立的最小正数,则称 栽员为 赠越枣曾的最小正周期援

缘 复合函数摇设 阅,枣,哉,早是两个函数,且 砸越枣阅)≦哉,由此对任意的 曾≦阅,有惟一确定 赠越枣曾 ∈砸≦哉与之对应,于是对此 赠≦哉,有惟一确定的 扎越早赠与之对应,这就得到新的函数 扎越早 枣曾),曾≦阅称为 早,枣的复合函数援复合函数是数学分析中比较重要的函数概念,有关初等函数的定义及求导运算和积分运算都涉及了复合函数援

远 凸函数

葬 设 赠越枣曾在区间 陨上有定义,若对于任意 曾赠≦陨,赠≠园,员 有

枣赠曾垣 员原赠)曾 燥枣曾 垣 员原赠枣赠,

则称 赠越枣曾为区间 陨上的凸函数或称其在区间 陨上是凸的援若不等式严格成立,则称 赠越枣曾为区间 陨上的严格凸函数或称其在区间 陨上是严格凸的援凸函数的另一表达形式是对于任意的 曾员,曾圆≦陨,扎曾赠扎≦陨,有

$$\frac{枣赠曾员 原枣曾圆}{赠原曾} \leqslant \frac{枣扎曾员 原枣曾圆}{扎原曾} \leqslant \frac{枣扎曾员 原枣赠曾圆}{扎原赠}援$$

遭 若对于任意 曾赠≦陨,赠≠园,员 有

枣赠曾垣 员原赠)曾 燥枣曾 垣 员原赠枣赠,

则称 赠越枣曾为区间 陨上的凹函数或称其在区间 陨上是凹的援若不等式严格成立,则称 枣曾为区间 陨上的严格凹函数或称其在区间 陨上是严格凹的援凹函数的另一表达形式是对于任意的 曾员,曾圆≦陨,扎曾赠扎≦陨,有

$$\frac{枣赠曾员 原枣曾圆}{赠原曾} \geqslant \frac{枣扎曾员 原枣曾圆}{扎原曾} \geqslant \frac{枣扎曾员 原枣赠曾圆}{扎原赠}援$$

凸函数是数学分析中相当重要的函数概念,有关凸函数的性质的研究是数学分析中重要的问题之一,不但其主要结果在数学和其他学科得到了广泛的应用,而且数学分析中相当多的重要不等式就是利用凸函数的性质得到的援

苑 函数的确界与振幅摇设 赠越枣曾是有界函数,即存在常数 皂,酝,使得

皂≤枣曾≤酝,曾≦阅,

我们称

$$皂_{*}=\inf_{曾\in 阅}\{枣曾\},酝^{*}=\sup_{曾\in 阅}\{枣曾\}$$

为 赠越枣曾在 阅上的下确界与上确界,称

ω 越酝* 原皂* 越$\underset{曾\,阅}{\text{漆}}$ 原$\underset{曾\,阅}{\text{蛰}}$ 曾

为 赠越枣曾在 阅上的振幅,记为 ω 越ω (枣阅) 援

愿 几个重要的特殊函数

薛 振荡函数

$$\text{赠越}\begin{cases}\text{曾漆}\frac{\text{赶}\,\text{员}}{\text{曾}}, & \text{曾}\neq\text{园}\\ \text{园} & \text{曾越园援}\end{cases}$$

遭 黎曼函数

$$\text{砸曾越}\begin{cases}\frac{\text{员}}{\text{灶}}, & \text{曾越}\frac{\text{皂}}{\text{灶}},\text{皂跃园}\\ \text{员} & \text{曾越园}\\ \text{园} & \text{曾越无理数援}\end{cases}$$

糟 狄利克雷函数

$$\text{赠越}\begin{cases}\text{员摇摇摇曾越}\frac{\text{皂}}{\text{灶}},\text{皂}\geqslant\text{园}\\ \text{园摇摇摇曾越无理数援}\end{cases}$$

凿 符号函数

$$\text{漆}\frac{\text{赶}}{\text{曾}}\text{越}\begin{cases}\text{员} & \text{曾跃园}\\ \text{园} & \text{曾越园}\\ \text{原员} & \text{曾约园援}\end{cases}$$

三、函数极限

员 函数 枣曾当 曾趋于 $\text{曾}_{\text{园}}$以 粤为极限的定义摇对于任意给定的 ε 跃园,存在 δ 越δ (ε) 跃园,当 园约渣曾原$\text{曾}_{\text{园}}$渣约δ 时,渣枣曾 原粤渣约ε,则称函数 枣曾当 曾趋于 $\text{曾}_{\text{园}}$以 粤为极限,记为$\underset{\text{曾}\to\text{曾}_{\text{园}}}{\text{遭}}$ 枣曾 越粤援用数学符号简记为

$$\forall\varepsilon\text{ 跃园},\exists\delta\text{ 越}\delta(\varepsilon)\text{ 跃园,当 园约渣曾原}\text{曾}_{\text{园}}\text{渣约}\delta\Rightarrow\text{渣枣曾 原粤渣约}\varepsilon\text{援}$$

例摇证明$\underset{\text{曾}\to\text{园}}{\text{遭}}$ 漆$\frac{\text{赶}}{\text{曾}}$越园援

证明摇 $\forall\varepsilon$ 跃园,$\exists\delta$ 越δ (ε) 越ε 跃园,当 园约渣曾原园渣约$\delta\Rightarrow$ 渣$\frac{\text{赶}}{\text{曾}}$原园渣越渣$\frac{\text{赶}}{\text{曾}}$渣$\leqslant$ 渣渣约ε援

圆 函数 枣曾当 曾趋于 $\text{曾}_{\text{园}}$不以 粤为极限的定义摇存在定数 $\varepsilon_{\text{园}}$跃园,对任意 δ 跃园,存在 $\text{曾}_{\text{园}}$,满足 园约渣$\text{曾}_{\text{园}}$原$\text{曾}_{\text{园}}$渣约δ,且 渣枣$\text{曾}_{\text{园}}$) 原粤渣$\geqslant\varepsilon_{\text{园}}$援用数学符号简记为

$$\exists\varepsilon_{\text{园}}\text{跃园},\forall\delta\text{ 跃园},\exists\text{曾}_{\text{园}},\text{园约渣曾}_{\text{园}}\text{原}\text{曾}_{\text{园}}\text{渣约}\delta,\text{渣枣曾}_{\text{园}}\text{) 原粤渣}\geqslant\varepsilon_{\text{园}}\text{援}$$

猿 $\underset{\text{曾}\to\text{曾}_{\text{园}}}{\text{遭}}$ 枣曾存在的柯西收敛准则摇$\underset{\text{曾}\to\text{曾}_{\text{园}}}{\text{遭}}$ 枣曾存在的充要条件是:

对于任意给定的 ε 跃园,存在 δ 越δ (ε) 跃园,当 园约渣曾原$\text{曾}_{\text{园}}$渣约δ,园约渣曾原$\text{曾}_{\text{园}}$渣约δ

时，渣枣曾 原枣赠 渣约ε援用数学符号简记为

$\forall\varepsilon$跃园$\exists\delta$越δ（ε）跃园当 园约渣曾原曾园渣约δ，园约渣赠原曾园渣约$\delta\Rightarrow$渣枣曾 原枣赠 渣约ε援

源 $\underset{曾\to曾园}{\text{遵}}$枣曾不存在的充要条件是存在定数$\varepsilon_{园}$跃园对任意$\delta$跃园存在 曾$_{\delta}$，赠$_{\delta}$，满足 园约渣曾$_{\delta}$原曾园渣约$\delta$，园约渣赠$_{\delta}$原曾园渣约$\delta$，且 渣枣曾$_{\delta}$）原枣赠$_{\delta}$）渣$\geq\varepsilon_{园}$援用数学符号简记为$\exists\varepsilon_{园}$跃园$\forall\delta$跃园$\exists$曾$_{\delta}$，曾$_{园}$满足 园约渣曾$_{\delta}$原曾园渣约$\delta$，园约渣赠$_{\delta}$原曾园渣约$\delta$ 且 渣枣曾$_{\delta}$）原枣赠$_{\delta}$）渣$\geq\varepsilon_{园}$援

上述结论等价于：存在定数$\varepsilon_{园}$跃园点列 $\{$曾$_{灶}\}$，$\{$赠$_{灶}\}$，曾$_{灶}$，赠$_{灶}\neq$曾$_{园}$满足$\underset{灶\to肄}{\text{遵}}$曾$_{灶}$越$\underset{灶\to肄}{\text{遵}}$赠$_{灶}$越曾$_{园}$，且

$$渣枣曾_{灶}）原枣赠_{灶}）渣\geq\varepsilon_{园}援$$

例摇用ε原δ语言证明狄利克雷函数

$$赠越\begin{cases}员, & 曾越\dfrac{皂}{灶},皂\geq园\\ 园, & 曾越无理数援\end{cases}$$

在 曾越园处不连续援

证明摇取$\varepsilon_{园}$越$\dfrac{员}{圆}$，令 曾$_{灶}$越$\dfrac{员}{灶}$，赠$_{灶}$越$\dfrac{\pi}{灶}$，点列 曾$_{灶}$，赠$_{灶}\neq$园满足$\underset{灶\to肄}{\text{遵}}$曾$_{灶}$越$\underset{灶\to肄}{\text{遵}}$赠$_{灶}$越园，且

$$渣枣曾_{灶}）原枣赠_{灶}）渣越员跃\frac{员}{圆}越\varepsilon_{园}援$$

缘 数列极限与函数极限的关系：

海伦定理摇函数 枣曾当 曾趋于 曾$_{园}$以 粤为极限的充要条件是对于任意点列 $\{$曾$_{灶}\}$，曾$_{灶}\neq$曾$_{园}$，只要$\underset{灶\to肄}{\text{遵}}$曾$_{灶}$越曾$_{园}$，就有$\underset{灶\to肄}{\text{遵}}$枣曾$_{灶}$）越粤援用数学符号简记为

$$\underset{曾\to曾园}{\text{遵}}枣曾越粤\Rightarrow\forall\{曾_{灶}\},曾_{灶}\neq曾_{园},\underset{灶\to肄}{\text{遵}}曾_{灶}越曾_{园}\Rightarrow\underset{灶\to肄}{\text{遵}}枣曾_{灶}）越粤援$$

函数 枣曾当 曾趋于 曾$_{园}$极限存在的充要条件是对于任意点列 $\{$曾$_{灶}\}$，曾$_{灶}\neq$曾$_{园}$，只要$\underset{灶\to肄}{\text{遵}}$曾$_{灶}$越曾$_{园}$，就有$\underset{灶\to肄}{\text{遵}}$枣曾$_{灶}$）存在援用数学符号简记为

$$\underset{曾\to曾园}{\text{遵}}枣曾存在\Leftrightarrow\forall\{曾_{灶}\},曾_{灶}\neq曾_{园},\underset{灶\to肄}{\text{遵}}曾_{灶}越曾_{园}\Rightarrow\underset{灶\to肄}{\text{遵}}枣曾_{灶}）存在援$$

海伦定理为处理某些函数极限提供了新的方法，即利用数列极限来讨论函数极限援有些时候这种处理方法是很方便的援

利用与点列类似的方法可以定义函数的上、下极限援并有与点列的上、下极限完全平行的结果援

远 函数的上、下极限的定义摇设函数 枣曾在区间 $\{$曾$_{园}$原糟曾$_{园}$垣糟 糟跃园 上有界，对任意的$\delta\in$ 园糟，令

$$酝(\delta)越\underset{曾\in\{曾园原,曾园垣\}原\{曾园\}}{\text{溶责}}枣曾,皂(\delta)越\underset{曾\in\{曾园原,曾园垣\}原\{曾园\}}{\text{蚤枣}}枣曾$$

·愿·

分别是 δ 的单调递减和递增有界函数，因此 $\lim\limits_{\delta\to 0^+}f(\delta)$ 和 $\lim\limits_{\delta\to 0^+}g(\delta)$ 存在，我们分别称之为函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的上、下极限，记为

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}f(x)=\lim_{\delta\to 0^+}f(\delta),\quad \underline{\lim_{x\to x_0}}f(x)=\lim_{\delta\to 0^+}g(\delta).$$

定理 上、下极限的 ε-δ 定义　设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0-r,x_0)\cup(x_0,x_0+r)$ 上有界，则

(1) $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)=\beta$：

(i) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)<\beta+\varepsilon$；

(ii) 存在点列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n\neq x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\beta$.

用数学符号分别简记为：

(i) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)<\beta+\varepsilon$；

(ii) $\exists\{x_n\}$，$x_n\neq x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\beta$.

(2) $\underline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)=\beta$：

(i) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>\beta-\varepsilon$；

(ii) 存在点列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n\neq x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\beta$.

用数学符号分别简记为：

(i) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>\beta-\varepsilon$；

(ii) $\exists\{x_n\}$，$x_n\neq x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\beta$.

推论 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\alpha$ 的充要条件是

$$\underline{\lim_{x\to x_0}}f(x)=\overline{\lim_{x\to x_0}}f(x)=\alpha.$$

注 不等式准则　设 $f(x)$，$g(x)$ 在 x_0 处有极限且相等，又设存在 $r>0$ 使当 x 满足 $0<|x-x_0|<r$ 时

$$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x),$$

则函数 $h(x)$ 在 x_0 处有相等的极限，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}h(x)=\lim_{x\to x_0}g(x).$$

例 两个重要极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

四、连续函数的定义和基本性质

1. 连续函数的定义　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，$x_0\in I$，若

需要全本请访问 www.ertongbook.com