

全国教育科学“十五”规划课题项目

数学方法论简明教程

主 编 章士藻

副主编 段志贵

陈汉平

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学方法论简明教程/章士藻主编. —南京:南京大学出版社,2006.5

(新世纪地方高等院校专业系列教材)

ISBN 7-305-04716-3

I. 数... II. 章... III. 数学方法—方法论—高等学校—教材 IV. 01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 035323 号

出版者 南京大学出版社

社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093

网 址 <http://press.nju.edu.cn>

出版人 左 健

丛 书 名 新世纪地方高等院校专业系列教材

书 名 数学方法论简明教程

主 编 章士藻

责任编辑 孟庆生 吴 华 编辑热线 025-83592146

照 排 南京南琳图文制作有限公司

印 刷 南京人民印刷厂

开 本 787×960 1/16 印张 16.5 字数 290 千

版 次 2006 年 7 月第 1 版 2006 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 7-305-04716-3/O·376

定 价 25.00 元

发行热线 025-83592169 025-83592317

电子邮件 sales@press.nju.edu.cn(销售部)

nupress1@public1.ptt.js.cn

* 版权所有,侵权必究

* 凡购买南大版图书,如有印装质量问题,请与所购
图书销售部门联系调换

新世纪地方高等院校专业系列教材

编 委 会

学 术 顾 问	王德滋	孙义燧	袁振国
	朱小蔓	谢安邦	
总 主 编	周建忠		
编委会主任	周建忠	左 健	
编委会副主任	金鑫荣		
编委会成员	(按姓氏笔画为序)		
	王兴林	左 健	许金生
	刘 建	刘海涛	刘周堂
	吴孝成	李进金	陈江风
	余三定	张庆利	金鑫荣
	周建忠	赵嘉麒	赵立兴
	郭 永	熊术新	黎大志
	薛家宝		

前 言

数学思想方法是数学的核心与灵魂,它不仅是数学的重要组成部分,而且是数学发展的源泉与动力。

中外数学家都十分重视数学思想方法的研究与应用。数学方法论是 20 世纪五六十年代,由著名数学教育家 G·波利亚创建的一门新兴学科,它涉及数学、哲学、逻辑学、思维科学和数学史等学科,是研究数学中发现、发明与创新等法则的一门学问。自 20 世纪 80 年代起,在著名数学教育家徐利治教授的倡导与带领下,我国在数学方法论的研究上,取得了一批重要的成果,为世人所瞩目。

日本著名数学教育家米山国藏说:“我搞了多年的数学教育,发现学生们在初中、高中接受的数学知识在毕业了进入社会后,几乎没有什么机会应用,所以通常是出校门不到一两年就很快忘掉了。然而,不管他们从事什么业务工作,唯有深深地铭刻于头脑中的数学精神,数学的思维方法、研究方法、推理方法和着眼点(如果培养这种素质的话),却随时地发生作用,使他们受益终生。”可见学习与研究数学思想方法,对培养人才具有十分重要的意义。

为此,数学方法论的教学在数学教育中的地位越来越突出。正由于这样,目前,数学方法论已成为我国高师院校和理工科大学数学系普遍开设的一门重要的必修或选修课程,数学思想方法已成为中小学数学新课程中十分重要的教学内容。

近 30 年来,我国出版数学方法论方面的著作数十种,大致可分为三类。一是国外名著的译著;二是国内学者立足于整个数学,特别是高等数学中数学思想方法研究的专著;三是中小学数学教师的研究心得,虽冠以数学方法论的美名,但大多实为具体解题方法的介绍,而一直缺乏针对中小学数学教师业务提高和高师院校教学需要的专著或教材。

因此,作者在数年教学实践中,对此作了有益的尝试。在教学中面对中小学课程改革的新形势,立足于为培养新型中小学师资需要进行选材、编排、举例与练习,本书就是在盐城师范学院数学方法论课程教学讲义基础上修改完善而成的。

本书共 10 章,在介绍数学方法论的学科性质、研究对象、发展简史、研究意义的基础上,结合实例介绍化归法、类比与归纳、联想与直觉、抽象方法、论证方法、模型方法、试验方法、美学方法等最重要最基本的数学思想方法及其数学语言的运用等.既包括数学中的逻辑方法,如化归法、抽象方法、论证方法、模型方法,又包括数学中的试验方法和数学中的发现、发明及创新的方法,如类比与归纳、联想与直觉、美学方法等.从主观愿望来说,本书以初等数学的方法论为重点,企图在宏观与微观的结合点上对数学方法论这一学科的基本问题进行讨论,力求兼顾特殊与一般、普及与提高、高师院校教学与中学教师业务进修,达到易教易学,以有助于当前高师院校教学和正确理解中学数学思想方法,指导中学数学思想方法教学的目的.

本书由章士藻教授组织编写、拟定纲目并统一定稿,其中由段志贵副教授承担第 4 章的编写,陈汉平同志承担第 7 章的编写,其余各章由章士藻编写.

在本书撰写过程中,我们研究了数学方法论的许多论著,参阅了大量的文献资料,因此,在一定意义上来说,本书也是我国从事数学方法论教学与研究诸多同仁共同劳动成果的结晶,我们谨向被列用有关文献的作者表示崇高的敬意.与此同时,本书的编纂与出版得到了盐城师范学院和南京大学出版社的大力支持,得到了姚林教授、季素月教授的热情指导,李善良、郑步春、吉海兵、左林、吴春祥、刘耀斌、钱明忠、郭曙光、戴凤鸣等同志的具体帮助,在此,一并表示衷心的感谢.

由于数学方法论是一门新兴学科,本身也在不断发展与完善之中,加之作者水平与条件所限,论述不全面或不当之处在所难免,敬请各位专家、读者批评赐教,以便进一步修改、完善.

编 者

2006 年 3 月

目 录

第 1 章 绪 论	1
§ 1.1 数学方法论	1
§ 1.2 数学方法论的性质与对象	4
§ 1.3 数学方法论的产生与发展	7
§ 1.4 研究数学方法论的意义	12
思考题	19
第 2 章 化 归	20
§ 2.1 化归方法概述	20
§ 2.2 化归的方向	21
§ 2.3 化归的策略	24
§ 2.4 化归的方法	30
§ 2.5 辩证地认识化归	42
思考题与练习题	44
第 3 章 类比与归纳	47
§ 3.1 类比法	47
§ 3.2 常见的几种类比	50
§ 3.3 归纳法	59
§ 3.4 数学归纳法	64
§ 3.5 类比与归纳的再认识	67
思考题与练习题	74
第 4 章 联想与直觉	76
§ 4.1 联 想	76
§ 4.2 直 觉	84
§ 4.3 联想与直觉在解题中的作用	88
思考题与练习题	97
第 5 章 数学的论证方法	99
§ 5.1 论证方法概述	99
§ 5.2 分析法与综合法	103
§ 5.3 直接证法与间接证法	105

§ 5.4	计算证法	109
§ 5.5	机器证法	116
	思考题与练习题	120
第 6 章	数学的抽象方法	122
§ 6.1	研究对象的抽象性	122
§ 6.2	数学抽象的基本形式	124
§ 6.3	研究方法的抽象性	133
§ 6.4	数学发展的一般规律	145
	思考题与练习题	148
第 7 章	数学的模型方法	149
§ 7.1	数学模型方法概述	149
§ 7.2	数学建模的一般步骤	154
§ 7.3	数学建模的基本方法	157
	思考题与练习题	164
第 8 章	数学的试验方法	166
§ 8.1	数学试验方法的基本思想	166
§ 8.2	试验与猜想	172
§ 8.3	非标准问题的试验求解	175
§ 8.4	优选问题的试验求解	182
	思考题与练习题	184
第 9 章	数学的美学方法	186
§ 9.1	数学与美	186
§ 9.2	数学美的基本特征	192
§ 9.3	研究数学美的意义	202
§ 9.4	数学审美能力的培养	205
	思考题与练习题	213
第 10 章	数学语言	215
§ 10.1	数学语言的特点	215
§ 10.2	数学名词	217
§ 10.3	数学符号	219
§ 10.4	数学图形	225
§ 10.5	数学语言的运用	226
	思考题与练习题	228
	参考答案	231
	参考文献	253

第1章 绪论

当前,人类社会正由工业时代向信息时代转变,世界性的新技术革命正在到来.在现代科学技术的飞速发展中,方法论正在迅速崛起,成为一门引人注目的新兴学科.

数学方法论是方法论学科中一门独立的学科,它在数学研究和教学中的地位与作用日益受到人们的普遍重视.本章首先对什么是数学方法论,数学方法论的学科性质、研究对象、发展简史和研究意义进行介绍.

§ 1.1 数学方法论

一、方法论

方法,是人们解决具体问题所采用的方式、途径或手段.科学方法,是指人们科学研究中所采用的一般方法.

方法论,是人们关于认识世界和改造世界的根本性的科学,是人们总结科学发现或发明的一般方法的理论.任何科学都有自己的研究方法,但个别包含着一般,各种具体方法中包含着一般方法,包含着思想方法的一般原则,这种从一般方法上研究方法问题的学问,即关于一般方法的理论就是方法论,或称为方法学.

不同的世界观决定了不同的方法论.马克思主义哲学认为,方法的使命是引导思维沿着正确的途径去认识客观世界,只有体现事物发展客观规律的认识方法才是科学的、行之有效的方法.在科学发展的进程中,按照辩证唯物主义的认识论,人们逐步总结出其中的固有规律和研究方法,这就是科学的方法论.

科学方法论一般包括三个层次.

第一层次:指各门科学中的一些具体的研究方法,它属于各门科学本身的研究对象.例如,物理学中的光谱分析法,化学中的定量分析法,数学中的反证法、同一法、待定系数法等.

第二层次:指许多学科都普遍适用的方法,即它不是一门学科所特有,而是从多学科中提炼出来的方法.例如,观察法、分析法、抽象法、实验法等.

第三层次:是指适用于一切自然科学与社会科学研究所运用的方法,即人们所说的哲学方法,或唯物辩证法.例如,调查法、矛盾分析法等.

二、数学方法论

1. 数学方法

顾名思义,数学方法是人们从事数学活动时所使用的方法.人们通过长期的实践,发现了许多运用数学思想的手段、门路或程序,同一手段、门路或程序被重复运用了多次,并且都达到了预期的目的,便成为数学方法.准确地说,数学方法是以数学为工具进行科学研究的方法,即用数学语言表达事物的状态、关系和过程,经过推导、运算和分析,以形成解释、判断和预言的方法.

对于数学方法,人们根据不同的标准作出不同的分类.按照抽象程度的不同,可以把数学方法作如下分类:

数学方法	{	具体方法(解题方法)
		一般方法(逻辑方法与试验方法)
		数学思想方法(具体方法与一般方法的概括)

具体方法就是各种具体的数学解题方法,例如反证法、同一法、待定系数法、解析法等.具体方法具有步骤明确、程序清楚、操作具体的特点,但适用范围较小,是最低层次的数学方法.具体方法,按其应用的普遍程度,也可分为多个层次.

例如,变换法有代数变换法、几何变换法、三角变换法.几何变换法有合同变换法、相似变换法、反演变换法;而合同变换法又有平移变换法、旋转变换法、对称变换法等等.

一般方法主要指各种逻辑方法与试验方法,具有较高的层次,研究的范围不是局限于某一数学分支,而是立足于整个数学,适用于各个数学分支.例如,从整体到部分的分析法,从部分到整体的综合法,从一般到特殊的演绎法,从特殊到一般的归纳法以及从特殊到特殊的类比法等都是逻辑方法.筛选法、优选法以及非标准问题解法等,都是试验方法.本书所介绍的数学方法论,侧重于一般数学方法的研究,而与侧重于具体方法的“解题研究”、“竞赛数学”有所不同.

在数学的产生与发展的过程中,数学问题、数学知识、数学思想、数学

方法这四者始终是相互结合、相互联系、协调发展的. 人们为解决实践与理论上提出的各种数学问题, 势必创造出各种不同的数学思想、方法, 相应的数学知识就接踵而至. 例如, 为解决高次代数方程公式解的问题, 伽罗华(E. Galois 1811~1832)创立了“群论”的思想, 从而开辟了抽象代数的研究领域; 笛卡儿(R. Descartes 1596~1650)创立了“形数结合”的思想, 从而建立了解析几何学; 牛顿(I. Newton 1642~1727)提出了“流数术”的思想, 从而创立了微积分学等等.

数学思想是一类具体数学方法或一般方法的概括, 是贯穿于该类数学方法中的思维策略和调节原则, 它制约着数学活动中主观意识的指向, 对方法的取舍、组合具有规范和调节作用. 例如, 形数结合的思想就是解析法、三角法、复数法、向量法、图解法等一类方法的概括, 其思维策略是把形与数这两个数学研究的基本对象联系起来作综合考察, 充分发挥代数与几何等学科理论各自的优势来解决问题, 把这一类方法的基本精神概括上升, 就形成了形数结合的思想.

初等数学中的基本数学思想是字母代数思想、逻辑推理思想、分解组合思想、转化变换思想、集合对应思想、形数结合思想等等. 但由于数学思想与数学方法密不可分, 因此, 这时人们又常将数学思想与这种数学思想概括下的具体方法或一般方法, 统称为数学思想方法.

2. 数学方法论

数学方法论是研究数学的发展规律, 数学的思想、方法、原则, 数学中的发现、发明和创新法则的学科. 它隶属于科学方法论的范畴, 是科学方法论在数学中的具体表现.

数学方法论有宏观和微观之分. 把数学置于各门科学以至客观世界中来认识, 侧重于对数学发展的外部规律以及数学人才成长规律的研究, 这属于宏观的数学方法论. 从数学的内在联系中讨论数学中的一般研究方法, 即着眼于数学的思想、观念, 数学研究的方法, 数学发现发明和创新法则等内部规律的研究, 这属于微观数学方法论的范畴. 显然, 要达到对数学本质及其规律的全面认识, 需要宏观与微观方法论的密切结合. 因此, 从这种意义上来说, 本书所讨论的, 虽然也涉及到宏观的数学方法论, 但它更着重于研究在微观意义上的一般数学思想方法的数学方法论.

这里需要指出:

第一, 数学方法论是一门新兴学科, 具有开放性的学科体系. 伴随着数学和其他科学的发展, 数学方法论的内容必然要得到不断调整和充实; 第二, 数学是一门历史悠久、分支繁多、层次鲜明的基础科学, 数学方法论

相应地也有不同的层次. 不仅初等数学与高等数学的方法论有着不同的内容, 就是近代数学与现代数学也有着不同的方法论研究对象. 本书将以初等数学的方法论为重点, 在初等数学与高等数学的结合上对数学方法论的若干基本问题展开讨论.

§ 1.2 数学方法论的性质与对象

一、数学方法论的学科性质

数学方法论是研究数学发现、发明的规律与原理的学说. 为了认识数学方法论的学科性质, 需要注意它同哲学、逻辑学、思维科学、数学史等相关学科的关系.

首先, 哲学是世界观, 也是认识论. 马克思主义的世界观与认识论是认识世界和改造世界的根本方法, 因此, 马克思主义哲学是世界观、认识论和方法论的辩证统一, 是最一般的方法论. 数学方法论作为科学方法论中的一个特殊领域, 是科学认识规律在数学中的反映和总结, 它的全部理论都离不开马克思主义哲学思想的指导.

其次, 逻辑学源于数学, 逻辑规律与逻辑方法作为重要的科学认识方法, 在数学研究中具有特殊的地位, 因而数学方法论的研究与逻辑学也密切相关.

第三, 数学方法实质上是数学思维活动的方法, 是数学思维活动的步骤、程序和格式, 它体现了人的意识的能动作用, 因而数学方法论的研究离不开思维科学的应用.

第四, 数学方法是与数学同时产生的, 数学方法的演变与数学科学的发展紧密相连. 因此, 探讨数学方法的产生与发展, 分析数学家的思维特点与方式, 研究数学人才成长的规律等, 都离不开对丰富的数学史料的分析. 也只有结合数学史的研究, 才能充分揭示数学的发展规律, 提炼出数学思想和方法的一般原则, 所以数学史是数学方法论丰富的源泉和重要依据.

第五, 对于数学方法论的研究, 一方面要以丰富的数学知识为背景材料, 另一方面要在对数学的纵向和横向联系的分析中揭示出蕴含的思想、方法、原理与模式, 因而数学方法论要以数学科学作为基本素材.

通过以上分析不难看出, 数学方法论是数学、哲学、逻辑学、思维科

学、方法学和数学史等科学的一门综合性、独立性的交叉学科。它以广阔的数学史为背景,重在数学与方法学的结合上,利用哲学、逻辑学和思维科学的理论,探讨数学的精神、观念、思想、方法、规划和模式,从而揭示数学的本质和发展规律。因此数学方法论有着自己特定的研究对象和丰富的内容。

这里,为认识数学方法论的学科性质,我们既需要注意它必须以马克思主义哲学思想为指导,这是认识世界、改造世界的根本方法,又需要注意它同相关学科的联系与区别。

数学方法论与科学方法论的区别:科学方法论是按照唯物主义的认识论,总结科学研究的一般规律与方法;数学方法论是科学方法论中的重要组成部分,但它更有自己的学科特性,有自己特定的研究对象和丰富的研究内容。

数学方法论与数学基础的区别:数学基础是研究数学对象、性质与方法的学科;数学方法论只是应用数学基础的有关成果进行研究的学科。

数学方法论与思维科学的区别:数学方法虽然实质上是思维活动的方法,数学方法论的研究离不开思维科学,但它又不宜过多地涉及思维科学领域中的思维问题。

数学方法论与逻辑学的区别:逻辑方法是重要的科学认识方法,在数学中具有特殊的地位;但数学方法论主要是讨论数学逻辑的特点、结构、方法与规律及逻辑在数学中的应用,并不是系统地研究逻辑学。

数学方法论与数学史的区别:数学方法论的研究,离不开对丰富的数学史料的分析,要结合史实研究数学思想方法,但它又不是纯数学史、科学史的研究。

数学方法论与数学的区别:数学方法论是数学的核心与灵魂,人们对数学方法论的研究,一方面需要以丰富的数学知识为背景材料,另一方面又要揭示数学所蕴含的观念、精神、原理、模式、思想、方法等。从某种意义上来说,数学方法论不同于数学的研究,但它的思想方法又是数学的重要组成部分,是数学知识体系中的深层次内容。

通过以上分析,可见数学方法论是在马克思主义哲学思想的指导下,研究数学的思想、方法、原则,数学中的发现、发明与创新的一门新兴学科,它隶属于科学方法论,是数学、数学基础、数学思维、数理逻辑、数学史等学科的交叉学科。当然,它不同于一般微观意义上的解题方法学、竞赛数学研究等。

二、数学方法论的研究对象

数学方法论的研究对象是一个重要的理论问题. 数学方法论作为一门独立的学科, 它的研究对象虽然涉及到数学本质、数学特征等数学基础问题, 但它更应侧重于以下 8 个方面的研究.

1. 关于数学功能的研究

众所周知, 数学具有多重功能. 其一, 科学功能, 即数学作为一种科学语言和科学方法, 它在自然科学、社会科学、哲学领域中具有方法论的价值; 其二, 思维功能, 数学作为一种思维工具, 是思维的体操, 是进行思维活动的载体; 其三, 社会功能, 即数学作为认识世界、改造世界的工具, 它在社会生产、经济、文化、教育等方面具有突出的地位与作用; 其四, 心理功能, 数学是人类一种宝贵的文化财富, 它在塑造人的健康完美的个性心理品质方面, 具有特殊的意义与作用. 在各门科学数学化趋势日益增强和数学应用更加广泛的今天, 认识数学的功能具有重要意义.

2. 关于数学内容辩证性质的研究

唯物辩证法指出, 客观世界充满着矛盾, 作为现实世界的侧面的反映, 数学中也必然充满着矛盾, 充满着唯物辩证法. 深入研究数学内容的辩证性质, 对于认识数学的本质与规律是十分有益的. 关于数学内容辩证性质的研究, 一是关于数学中矛盾的研究, 即数学中有哪些重要的矛盾, 它们的形式与发展规律是怎样的; 二是关于数学中辩证法内容的分析, 包括数学内容的辩证实质的分析和演进过程的分析等.

3. 关于数学中常用方法的研究

数学是一门工具科学, 又是一门方法科学. 它源于科学, 又服务于科学. 正因为如此, 数学方法在数学中有着特殊的重要地位. 这些常用方法, 既包括一般科学认识方法, 如观察、分析、综合、比较、分类、抽象、概括等, 又包括数学特有的抽象方法、公理化方法、模型方法、构造方法、试验方法、化归方法、映射方法等. 对这些方法进行深入研究, 以便进一步发挥数学的功能, 这是十分必要的.

4. 关于数学思想方法的研究

数学在其漫长的发展过程中, 不仅建立了严密的知识体系, 而且形成了一套行之有效的思想方法, 总结这些思想方法形成和发展的规律, 有助于深化对数学的认识, 并促进数学的发展. 这里又包含两方面内容: 其一, 从整体上研究数学思想方法的系统进化, 如从算术到代数, 从综合几何到几何代数化, 从常量数学到变量数学, 从必然数学到或然数学, 从明晰数

学到模糊数学,从手工证明到机器证明等几次重大数学思想方法突破的孕育、产生及其规律的分析;其二,研究数学思想方法的个体发育,即对每一种数学思想方法的结构、功能、演变发展规律及其在数学发展中的地位、作用的分析探究等。

5. 关于数学思维的研究

数学活动的核心是数学思维活动.成功的思维活动离不开正确的思维方法.对数学思维的结构、特征及其一般模式的深入研究,对促进数学发展、发挥数学功能和提高人才素质无疑是极为重要的.这里,主要研究数学思维及其特征,数学基本思维方法及其类型、层次等.

6. 关于数学推理的研究

数学是演绎的科学,逻辑推理是经常而重要的数学活动.掌握数学中的归纳、类比、演绎等推理方法对数学的学习和研究有重要价值,但推理又是多样性的,对各种推理方法的研究,主要是探讨各种方法的原理、规则、结构和程序,并分析它们在数学发展和数学教学中的地位与作用等.

7. 关于数学语言的研究

数学语言,又叫符号语言,它使用字、词、符号、图形,是一种改进过的自然语言,具有精练、准确、清晰,可“变元”,词、词义、符号三位一体,直观语言(图形与符号)与抽象语言(词义)互释互译的特点,是其他学科语言所无法比拟的.数学方法论不可忽视对数学语言的研究,应包括对数学语言的特点、功能与发展的研究等.

8. 关于数学人才成长规律的研究

巨大数学宝库的建立,无疑是一代又一代数学家在其中作出了杰出的贡献.众多数学家数学思想的产生、演变,数学成就的获得有其外部环境与内在条件,如果我们对其加以进一步挖掘、提炼,在今天来说,对深化数学教育改革,培养创造性人才具有十分重要的意义.

§ 1.3 数学方法论的产生与发展

古往今来,凡是对数学作出重大贡献的数学家和哲学家都十分关注数学的发展规律以及它的思想方法和研究方法.数学方法与数学同时产生并同步发展,因此,一部数学的发展史,就是数学方法论产生和演进的发展史.

一、数学方法的积累

从远古时代到公元前 6 世纪是数学的萌芽时期,也是数学方法产生和积累的时期.在这个时期,人类根据生活和生产的需要,研究了物体分配、土地丈量、天文历算等许多实际问题.在解决这些问题的过程中,不仅形成了自然数、分数、几何图形等概念,创立了初步的算术与几何,而且总结和积累了一些数学研究的方法.

例如,在算术中,印度人创立了十进位记数法,采用了十位制记数系统.在几何中,人们依靠不充分的观察方法和简单的逻辑推理直观地把握图形的性质,形成了简单的测量方法和实验方法.在流传至今的古埃及纸草文献和巴比伦的楔形文字中,就有算术运算的方法、几何计算的方法、典型算术题的解法和开平方的方法等.在我国战国时期的《考工记》一书中记载了尺、规、竿、绳一类简单量器的资料,在汉代的著作《周髀算经》中也记载了用“矩”测量的方法和解方程的方法等等.

这个时期的数学知识是零乱的,数学还未形成成为独立的科学,人们对数学方法的研究也仅仅局限于解决实际问题中个别的、具体的方法.虽然如此,数学方法的产生和不断积累已经预示着数学方法论的萌芽.

二、数学方法论的萌芽

从公元前 6 世纪到 17 世纪初期,是常量数学时期.在这个时期,一方面数学研究的对象已经从实际事物的性质中抽象出来,并理想化为数与形等纯粹的数学研究对象;另一方面人们运用了逻辑方法把零乱的数学知识整理成了演绎体系.此外,数学引入了自己的符号系统,数学的表述、计算、推理和证明的方法都日趋完善.这样,数学就从解决实际问题发展成为独立的科学,并形成了算术、几何、代数、三角等分支.

这个时期人们对数学方法的总结和研究开始深入,出现了许多新的数学思想和数学方法.例如,古希腊的杰出思想家亚里士多德(Aristotle 公元前 384~前 322)对观察、分类等方法进行了研究,在其著名的《工具论》一书中创立了形式逻辑,并论述了归纳法和演绎法,总结了演绎推理的三段论法;另一位古希腊学者欧几里得(Euclid 约公元前 330~前 275)在他的巨著《几何原本》中创立了公理化的思想和方法;我国古代数学家刘徽在《九章算术注》中记述了“割圆术”,这是极限思想的萌芽;英国数学家约翰·耐普尔(J. Napier 1550~1617)发明了对数方法;英国著名哲学家弗兰西斯·培根(F. Bacon 1561~1626)在他的名著《新工具》中,系统

地阐述了实验方法与归纳方法及其应用,并创立了归纳逻辑等等。

在数学方法论的萌芽阶段,不仅观察、实验的方法得到完善,成为16~17世纪重要的科学方法,而且不断产生了各种数学思想和方法。人们对数学思想的不断研究和数学方法的大量涌现,为数学方法论学科的形成奠定了基础。

三、数学方法论的形成

以法国数学家笛卡儿1637年出版《几何学》一书为起点到19世纪20年代,是变量数学时期,也是数学方法论的形成时期。

在这个时期,数学研究对象从常量到变量、从离散量到连续量、从简单图形到复杂图形、从静态到动态的扩展,使数学发生了根本的变化。解析几何的诞生实现了数与形的结合,使数学由分散趋于统一。微积分的发明奠定了分析学的基础,以函数为研究对象的级数、微分方程、复变函数等分析理论相继建立,微分方程、概率论等相关分支学科也应运而生。数学分析庞大的学科群不仅成为数学与自然科学的纽带,也为许多实际问题的解决提供了有效的方法。

在变量数学时期,随着科学由积累材料进入整理阶段,许多学科纷纷建立和发展起来,各种科学方法特别是数学方法得到了比较充分的研究。方法论大师、著名法国数学家笛卡儿的著作《更好地指导推理和寻求真理的方法谈》(简称《方法谈》)的发表,标志着数学方法论的初步形成。

数学方法论的形成主要表现在两个方面:第一,坐标法和微积分的出现,实现了数学思想方法的重大突破,从此辩证法进入了数学,成为数学方法论的哲学基础。第二,出版了大量的数学方法论专著,相应的研究有了突破性进展,例如,笛卡儿在《几何学》一书中创立了形数结合的思想方法,在《方法谈》一书中论述了演绎方法,并制定了一系列的方法论原则;英国著名的数学家、物理学家牛顿在《自然哲学的数学原理》中对实验、假说、归纳推理等方法进行了系统的研究和总结等等。

四、数学方法论的发展

从19世纪20年代到现在,是近代和现代数学时期,也是数学方法论作为一门学科的建立和发展时期。

在这个时期,数学各分支都达到了比较完善的程度,数学的研究对象发生了重大变化,向着更加一般化、抽象化和多样化的方向发展。几何学由研究现实的一维、二维和三维空间发展到高维空间和非欧空间;代数从

研究数的代数运算发展到研究抽象的代数结构;分析从研究函数发展到研究函数的函数.在代数、几何、分析的基础上出现了拓扑学、泛函分析、微分几何、微分方程和逻辑代数等许多新的交叉学科.不仅如此,这个时期数学的应用也有了长足的进展,建立了随机过程论、控制论、信息论、模糊数学、计算数学、规划论、对策论、排队论等许多应用数学的理论.

随着近代和现代数学的发展,数学方法论作为一门独立的学科已经建立并有了相应的发展,其重要标志有四个方面:

第一,出现了许多具有划时代意义的数学思想方法,导致了数学基础学科的重大变革.例如,俄国数学家罗巴切夫斯基(N. I. Lobatchevsky 1792~1856)和德国数学家黎曼(B. Riemann 1826~1866)从否定欧氏几何第五公设出发,分别创立了“罗氏几何”与“黎氏几何”,使几何学发生了深刻的革命,并导致了现代公理化方法的诞生;法国数学家伽罗华从全新的观念出发引入了“群”的概念,创立了群论的思想方法.非欧几何与群论的出现,是数学史上具有划时代意义的事件,也是数学思想方法发展到新阶段的里程碑.法国数学家柯西(A. L. Cauchy 1789~1857)和德国数学家魏尔斯特拉斯(K. Weierstrass 1815~1897)运用极限的思想方法使微积分达到了严密化和标准化;德国数学家康托儿(G. Cantor 1845~1918)创立了集合论的理论和思想方法,为微积分奠定了稳固的理论基础.极限与集合论思想方法的出现,对于整个数学基础的研究,尤其对现代数学结构的探讨,具有极大的促进作用.

第二,数学中的各种科学认识方法和逻辑方法趋于成熟和完善.例如,英国哲学家穆勒(J. S. Mill 1806~1873)在其《逻辑体系》一书中,深入总结了归纳方法,提出了求同法、差异法、求同差异共同法、剩余法和共变法五条归纳原则,使归纳法达到了科学的形式化.德国数学家赫尔德(O. L. Holder 1859~1937)在《数理方法论》和《几何学中的观点和思想》等著作中,对演绎方法、归纳方法、公理化方法和假说方法等进行了科学的研究和总结,使这些方法趋于完善.

第三,许多数学家和哲学家转向对数学思想方法的研究,出现了研究方法论的学术团体和学术会议.例如,法国著名数学家庞加莱(J. H. Poincare 1854~1912)多年来致力于数学思想和创造法则的研究,他在1903~1908年间发表了方法论专著《科学与假设》《科学之价值》《科学与方法》等.德国大数学家希尔伯特(D. Hilbert 1862~1943)1900年在第二届国际数学家代表大会上所作关于《数学问题》的著名演讲,论述了数学问题在数学发展中的巨大作用,后来成为一本极有价值的数学方法论著