

数学单元专题测试三十七 求轨迹方程

学校_____ 班级_____ 姓名_____

一、选择题

1. ('01 朝阳) 已知动点 P 到定点 $F(1, 0)$ 和直线 $x=3$ 的距离之和等于 4, 则动点 P 的轨迹方程是()

(A) $y^2=4x$

(B) $y^2=-12(x-4)$

(C) $y^2=4x(x \leq 3)$ 或 $y^2=-12(x-4)(x > 3)$

(D) $y^2=\pm 4x$

2. ('01 西城) 设动点 P 是抛物线 $y=2x^2=1$ 上任意一点, 定点 $A(0, -1)$, 点 M 分 PA 所成的比为 2, 则点 M 的轨迹方程是 ()

(A) $y=6x^2-1/3$ (B) $y=3x^2+1/3$

(C) $y=-3x^2-1$ (D) $x=6y^2-1/3$

3. ('01 天津) 已知圆 $O: x^2+y^2=a$, $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, P_1, P_2 为圆 O 上关于 x 轴对称的两点, 则直线 AP_1 与直线 BP_2 的交点 P 的轨迹方程为 ()

(A) $x^2+y^2=2a^2$

(B) $x^2+y^2=4a^2$

(C) $x^2-y^2=4a^2$

(D) $x^2-y^2=a^2$ $\rho = |\cos \theta / 2 + \sin \theta / 2|$,

$$\begin{cases} x = \left| \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \right| \\ y = \frac{1}{2} (1 + \sin \theta) \end{cases}$$

4. (' 01 大连) 参数方程 $\begin{cases} x = \left| \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \right| \\ y = \frac{1}{2} (1 + \sin \theta) \end{cases}$ 表示 ()

(A) 过点 (1, 1/2) 的双曲线的一支

(B) 过点 (1, 1/2) 的抛物线的一部分

(C) 过点 (-1, 1/2) 的双曲线的一支

(D) 过点 (-1, 1/2) 的抛物线的一部分

5. (' 01 东城) 若 $\triangle ABC$ 的两个顶点 B、C 坐标分别是 (-1, 0) 和 (2, 0), 而顶点 A 在直线 $y=x$ 上移动, 则 $\triangle ABC$ 的重心 G 的轨迹心程是 ()

(A) $y=x-1/3$ (B) $y=x+1/3$

(C) $y=1/3x+1$ (D) $y=1/3x-1$

6. (' 01 天津) 动圆与 x 轴相切, 且被直线 $y=x$ 所截得的弦长为定值 2, 则动圆圆心的轨迹方程是 ()

(A) $x^2+y^2-2xy-2=0$ (B) $x^2-y^2-2xy+2=0$

(C) $x^2+y^2+2xy-2=0$ (D) $x^2-y^2+2xy+2=0$

7. ('01 丰台) 设动圆经过抛物线 $(x-5)^2=y+9$ 与 x 轴的两个交点, OC 是动圆的切线, 则切点 C 的轨迹方程是 ()

- (A) $x^2/4+y^2/64=1$ (B) $x^2+y^2=16$
 (C) $x^2+y^2=16(y \neq 0)$ (D) $x^2+y^2=25(x \neq 0)$

8. ('01 丰台) 动圆与 y 轴相切, 又与定圆 $x^2+y^2=1$ 外切, 那么动圆圆心的轨迹方程, 下面给出 4 种形式:

$$y^2=2(x+1/2) \text{ 或 } y^2=-2(x-1/2);$$

$$y^2=2(x+1/2), x>0;$$

$$y^2=2(|x|+1/2), x \neq 0;$$

$$y^2=-2(x-1/2), x<0.$$

其中正确的轨迹方程的个数是 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

9. ('01 长春) 函数 $y=1-\sqrt{2x-x^2}$ 的图像是 ()

- (A) 抛物线的一部分 (B) 椭圆的一部分
 (C) 圆的一部分 (D) 双曲线的一部分

二、填空题

10. ('01 长春) 抛物线的顶点在原点, 对称轴是 x

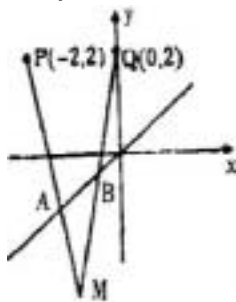
轴，且在直线 $y=2x$ 上截得的弦长为 $\sqrt{5}$ ，则抛物线的方程是_____。

11. (' 01 天津) 动点 $P(m, n)$ 在图 $x^2+y^2=1$ 上运动，那么动点 $Q(m-n, 2mn)$ 在直角坐标平面 x_0y 上的轨迹方程为_____。

12. (' 01 石家庄) 长为 2α 的线段 AB 的两个端点分别为 x 轴、 y 轴上滑动，则 AB 中点轨迹方程为_____。

三、解答题

13. (' 01 大连) 已知两点 $P(-2, 2)$ ， $Q(2, 2)$ 以及一条直线 $l: y=x$ 。设长为 $\sqrt{2}$ 的线段 AB 的在直线 l 上移动，如图求直线 PA 和 QB 的交点 M 的轨迹方程(要求把结果写成普通方程)。



14. (' 01 海淀) 设双曲线 $y^2/\alpha^2 - x^2/3=1$ 的焦点分

别为 F_1 、 F_2 ，离心率为 2。

() 求此双曲线的渐近线 L_1 、 L_2 的方程；

() 若 A 、 B 分别为 L_1 、 L_2 上的动点，且 $2|AB|=5|F_1 F_2|$ ，求线段 AB 的中点 M 的轨迹方程并说明轨迹是什么曲线。

15. (' 01 武汉) 设椭圆的中心为原点 O ，一焦点为 $F(0, 1)$ ，长轴和短轴的长度比为 t 。

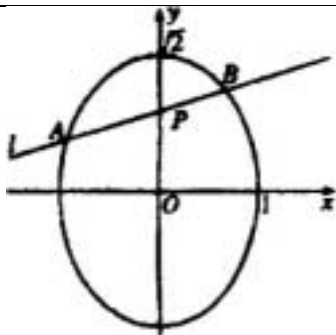
(1) 求椭圆的方程；

(2) 设经过原点且斜率为 t 的直线与椭圆在 y 轴右边部分的交点为 Q ，点 P 在直线上，且 $|OP|/|OQ|=t\sqrt{t^2-1}$ 。当 t 变化时，求点 P 的轨迹方程，并说明轨迹是什么图形。

16. (' 01 春季高考) 已知椭圆 C 的方程为 $x^2+y^2/2=1$ ，点 $P(\alpha, b)$ 的坐标满足 $\alpha^2+b^2/2 \leq 1$ 。过点 P 的直线 l 与椭圆交于 A 、 B 两点，点 Q 为线段 AB 的中点。求：

() 点 Q 的轨迹方程；

() 点 Q 的轨迹与坐标轴的交点的个数。



参考答案

1-5 CADBA 6-9 BCCC

10. $y^2=24x$ 11. $x^2=-(y-1)(|x| \leq 2\sqrt{3})$ 12. $x^2+y^2=a^2$

13. 由于线段 AB 在直线 $y=x$ 上移动， $|AB|=\sqrt{3}$ ，

设 $A(a, a)$ ，则 $B(a+1, a+1)$ ，其中 a 是参数。

$$\text{于是可得直线 } PA \text{ 与 } QB \text{ 的方程是 } y-2=\frac{a-2}{a+2}(x+2)(a \neq -2), \quad (1)$$

$$y-2=\frac{a-1}{a+1}x(a \neq -1). \quad (2)$$

以下是两种处理方法:

当 $\frac{a-2}{a+2}=\frac{a-1}{a+1}$, 即 $a=0$, 直线 PA 和 QB 平行, 无交点。

当 $a \neq 0$ 时, 直线 PA 和 QB 相交, 设交点为 $M(x, y)$, 由 (2) 式得,

$$y-2=(1-\frac{2}{a+1})x, \quad a+1=\frac{2x}{x-y+2},$$

$$a+2=\frac{2x}{x-y+2}+1=\frac{3x-y+2}{x-y+2}, \quad a-2=\frac{3y-x-6}{x-y+2}.$$

$$\text{将上述两式代入 (1) 式得 } y-2=\frac{3y-x-6}{3x-y+2}(x+2).$$

$$\text{整理得 } x^2-y^2+2x-2y+8=0, \quad \text{即 } \frac{(x+1)^2}{8}-\frac{(y+1)^2}{8}=-1. \quad (3)$$

当 $a=-2$ 或 $a=-1$ 时, 直线 PA 和 QB 仍然相交, 并且交点坐标也满足 (3) 式。所以 (3) 式即为所求动点的轨迹方程。

法 2: 由 (1)、(2) 求出交点

$$M(x, y) \begin{cases} x=\frac{a^2-a-2}{a}, & (4) \\ y=\frac{a^2-a+2}{a}. & (5) \end{cases} \quad (5)-(4) \text{ 得 } y-x=\frac{4}{a},$$

$$\therefore a=\frac{4}{y-x}. \quad (6) \quad \text{代入 (4) 整理即得 } \frac{(x+1)^2}{8}-\frac{(y+1)^2}{8}=-1.$$

14. 解: (1) 由已知得已知双曲线的离心率为

$\frac{\sqrt{a^2+3}}{a}=2$, 解得 $a^2=1$, 所以已知双曲线的方程为 $x^2 - y^2/3=1$ 它的渐近线 L_1 、 L_2 的方程为 $x-\sqrt{3}=0$ 和 $x+\sqrt{3}=0$

(2) 因为 $|F_1 F_2|=4$, $2|AB|=|F_1 F_2|$, 所以 $|AB|=10$
 设 A 在 L_1 上, B 在 L_2 上, 则可以设 $A(\sqrt{3}, y_1)$ 、 $B(-\sqrt{3}, y_2)$,

$$\sqrt{3(y_1 + y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 10.$$

设 AB 的中点 $M(x, y)$, 则 $x = \frac{\sqrt{3}y_1 - \sqrt{3}y_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. $\therefore y_1 - y_2 = \frac{2x}{\sqrt{3}}, y_1 + y_2 = 2y$,

代入①得 $12y^2 + \frac{4x^2}{3} = 100$, 即 $\frac{x^2}{75} + \frac{3y^2}{25} = 1$ 为中点 M 的轨迹方程, 轨迹为椭圆。

15. [解] 在(1)中, t 是作为定值的, 欲求椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a < b > 0)$, 即求 a, b 之值。按题设条件, 未知数 a, b 与已知数 $t, c=1$ (c 为半焦距) 之间的联系为 $a:b=t, a^2-b^2=1$ (此即问题的数学模型), 解得 $b^2 = \frac{1}{t^2-1}, a^2 = \frac{t^2}{t^2-1}$ 故所求椭圆的方程为 $\frac{x^2}{\frac{t^2}{t^2-1}} + \frac{y^2}{\frac{1}{t^2-1}} = 1$ 。

在(2)中, t 为变量, 实为参数。为了便于问题的化简, 不妨设 $t = \sec \theta$, 从而转化为 θ 为参数, 其中 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ 。这时椭圆方程为 $\frac{x^2}{\sec^2 \theta} + \frac{y^2}{\csc^2 \theta} = 1$ ①

经过原点 O , 斜率为 t 的直线方程为 $y = tx$, 即 $x - y \cos \theta = 0$ ②

由①、②求得 Q 点的坐标为 $(\frac{\sqrt{2}}{2} |\csc \theta|, \frac{\sqrt{2}}{2} |\sec \theta|)$ 。

设 P, Q 的坐标为 $(x, y), (x', y')$, 则由 O, P, Q 三点共线, 得

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{|OP|}{|OQ|} = t \sqrt{t^2 - 1} = \sec \theta \cdot \tan \theta. \quad \therefore x = x' \sec \theta \cdot \tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \sec \theta \cdot \tan \theta \cdot |\csc \theta|,$$

$$y = y' \sec \theta \cdot \tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \sec \theta \cdot \tan \theta \cdot |\sec \theta|.$$

$$\therefore \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sec \theta, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sec^2 \theta \end{cases} (0 < \theta < \frac{\pi}{2}) \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sec \theta, \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sec^2 \theta. \end{cases} (-\frac{\pi}{2} < \theta < 0).$$

消去参数 θ , 得 P 点的轨迹方程为 $y = \sqrt{2}x^2 (x > \frac{\sqrt{2}}{2})$ 和 $y = -\sqrt{2}x^2 (x < -\frac{\sqrt{2}}{2})$ 。

其轨迹是抛物线 $y = \sqrt{2}x^2$ 在直线 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 右侧的部分和抛物线 $y = -\sqrt{2}x^2$ 在直线 $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 左侧的部分。

16. 解(1) 设点 A, B 的坐标分别为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 点 Q 的坐标为 $Q(x, y)$ 。当 $x_1 \neq x_2$ 时, 设直线 l 的斜率为 k , 则 l 的方程为 $y = k(x-a) + b$ 。

$$\text{由已知 } x_1^2 + \frac{y_1^2}{2} = 1, x_2^2 + \frac{y_2^2}{2} = 1, \quad (1) \quad y_1 = k(x_1 - a) + b, y_2 = k(x_2 - a) + b, \quad (2)$$

$$\text{由(1)得 } (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0, \quad (3)$$

$$\text{由(2)得 } y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) - 2ak + 2b, \quad (4)$$

$$\text{由(3)、(4)及 } x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

$$\text{得点 } Q \text{ 的坐标满足方程 } 2x^2 + y^2 - 2ax - by = 0. \quad (5)$$

当 $x_1 = x_2$ 时, K 不存在, 此时 L 平行于 y 轴。因此 AB 的中点 Q 一定落在 x 轴上, 即 Q 的坐标为 $(a, 0)$ 。显然点 Q 的坐标满足方程(5)。综上所述, 点 Q 的坐标满足方程 $2x^2 + y^2 - 2ax - by = 0$ 。

设方程(5)所表示的曲线为 L ,

$$\text{则由 } \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 2ax - by = 0 \\ x^2 + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \text{ 得 } (2a^2 + b^2)x^2 - 4ax + 2 - b^2 = 0.$$

因为 $\Delta = 8b^2(a^2 + b^2/2 - 1)$, 由已知 $a^2 + b^2/2 \leq 1$

所以当 $a^2 + b^2/2 = 1$ 时, $\Delta = 0$, 曲线 L 与椭圆 C 有且只有一个交点 $P(a, b)$ 。

当 $a^2 + b^2/2 < 1$ 时, $\Delta < 0$, 曲线 L 与椭圆 C 没有交点。

因为 $(0, 0)$ 在椭圆 C 内, 又在曲线 L 上, 所以曲线 L 在椭圆 C 内。

故点 Q 的轨迹方程为 $2x^2 + y^2 - 2ax - by = 0$

$$(2) \text{ 由 } \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 2ax - by = 0, \\ x = 0, \end{cases} \text{ 解得曲线 } L \text{ 与 } y \text{ 轴}$$

交于点 $(0, 0)$, $(0, b)$ 。

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 2ax - by = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

解得曲线 L 与 x 轴交于点

$(0, 0)$, $(a, 0)$ 。

当 $a=0$, $b=0$, 即点 $P(a, b)$ 为原点时 , $(a, 0)$ 、 $(0, b)$ 与 $(0, 0)$ 重点, 曲线 L 与坐标轴只有一个交点 $(0, 0)$ 。

当 $a=0$ 时且 $0 < |b| \leq \sqrt{2}$, 即点 $P(a, b)$ 不在椭圆 C 外且在除去原点的 y 轴上时 , 点 $(a, 0)$ 与 $(0, 0)$ 重合 , 曲线 L 与坐标轴有两个交点 $(0, b)$ 与 $(0, 0)$ 。
同理 , 当 $b=0$ 且 $0 < |a| \leq 1$, 即点 $p(a, b)$ 不在椭圆 C 外且在除去原点的 x 轴上时, 曲线 L 与坐标轴有两个交点 $(a, 0)$ 与 $(0, 0)$ 。

当 $0 < |a| < 1$ 且 $0 < |b| < \sqrt{2(1-a^2)}$, 即点 $P(a, b)$ 在椭圆 C 内且不在坐标轴上时 , 曲线 L 与坐标轴有三个交点 $(a, 0)$ 、 $(0, b)$ 与 $(0, 0)$ 。