

数学单元专题测试三十九 综合应用题

学校_____ 班级_____ 姓名_____

1. (' 02 上海)某商场在促销期间规定:商场内所有商品按标价的 80%出售;同时,当顾客在该商场内消费满一定金额后,按如下方案获得相应金额的奖券:

消费金额(元)的范围	[200,400)	[400,500)	[500,700)	[700,900)	...
获得奖券的金额(元)	30	60	100	130	...

根据上述促销方法,顾客在该商场购物可以获得双重优惠。例如,购买标价为 400 元的商品,则消费金额为 320 元,获得的优惠额为: $400 \times 0.2 + 30 = 110$ (元), 设购买商品得到的优惠率 $\frac{\text{购买商品获得的优惠额}}{\text{商品的标价}}$ 。试问:

(1)购买一件标价为 1000 元的商品,顾客得到的优惠率是多少?

(2)对于标价在[500 , 800](元)内的商品,顾客

购买标价为多少元的商品，可得到不小于 $1/3$ 的优惠率？

2. ('01 高考)从社会效益和经济效益出发，某地投入资金进行生态环境建设，并以此发展旅游产业，根据规划，本年度投入 800 万元，以后每年投入将比上年减少 $1/5$ 。本年度当地旅游业收入估计为 400 万元，由于该项建设对旅游业的促进作用，预计今后的旅游业收入每年会比上年增加 $1/4$ 。

() 设 n 年内(本年度为第一年)总投入为 α_n 万元，旅游业总收入为 b_n 万元。写出 α_n ， b_n 的表达式；

() 至少经过几年旅游业的总收入才能超过总投入？

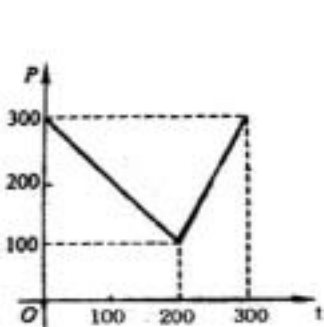
3. ('01 成都)某摩托车生产企业，上年度生产摩托车的投入成本为 1 万元/辆，出厂价为 1.2 万元/辆，年销售量为 1000 辆，本年度为适应市场需求，计划提高产品档次，适度增加投入成本。若每辆车投入成本增加的比例为 x ($0 < x < 1$)，则出厂价相应提高的比例为 $0.75x$ ，同时预计年销售量增加的比例为 $0.6x$ 。已知年利润 = (出厂价 - 投入成本) $\times$ 年销售量。

() 写出本年度预计的年利润 y 与投入成本增加

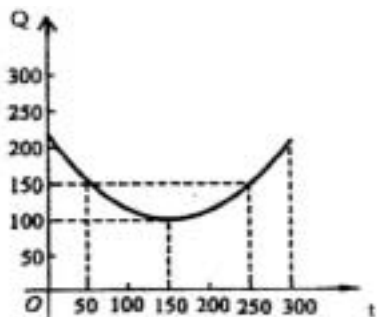
的比例 x 的关系式；

() 为使本年度的年利润比上年有所增加，问投入成本增加的比例 x 应在什么范围内

4. (' 02 黄冈) 某蔬菜基地种植西红柿，由历年市场行情得知，从二月一日起的 300 天内，西红柿市场售价与上市时间的关系用图一的一条折线表示；西红柿的种植成本与上市时间的关系用图二的抛物线段表示。



图一



图二

. 写出图一表示的市场售价与时间的函数关系式

$P=f(t)$ ；

写出图二表示的种植成本与时间的函数关系式

$Q=g(t)$ ；

. 认定市场售价减去种植成本为纯收益，问何时上市的西红柿纯收益最大？

(注：市场售价和种植成本的单位：元/ 10^2 kg，时间单位：天)

5. ('02 福州)某地区上年度电价为 0.8 元/kW·h，年用电量为 α kW·h。本年度计划将电价降到 0.55 元/kW·h 至 0.75 元/kW·h 之间，而用户期望电价为 0.4 元/kW·h，经测算，下调电价后新增的用电量与实际电价和用户期望电价的差成反比(比例系数为 k)，该地区电力的成本价为 0.3 元/kW·h。

() 写出本年度电价下调后，电力部分的收益 y 与实际电价 x 的函数关系式；

() 设 $k=0.2\alpha$ ，当电价最低定为多少时仍可保证电力部门的收益比上年至少增长 20%？

注：收益=实际用电量 R (实际电价-成本价)

6. ('02 西城)某产品生产厂家根据以往的生产销售经验得到下面有关生产销售的统计规律：每生产产品 x (百台)，其总成本为 $G(x)$ (万元)，其中固定成本为 2 万元，并且每生产 1 百台的生产成本为 1 万元(总成本=固定成本+生产成本)；销售收入 $R(x)$ (万元)满足：

$$R(x) = \begin{cases} -0.4x^2 + 4.2x - 0.8 & (0 \leq x \leq 5) \\ 10.2 & (x > 5) \end{cases}$$

假定该产品产销平衡，那么根据上述统计规律，

- () 要使工厂有赢利，产量 x 应控制在什么范围？
- () 工厂生产多少台产品时，可使赢利最多？
- () 求赢利最多时每台产品的售价。

参考答案

1. [解] (1) $1000 \times 0.2 + 130/1000 = 33\%$ 。

(2) 设商品的标价为 x 元，则 $500 \leq x \leq 800$ ，消费额： $400 \leq 0.8x \leq 640$ 。

$$\text{由已知得 (I) } \begin{cases} \frac{0.2x + 60}{x} \geq \frac{1}{3} \\ 400 \leq 0.8x < 500 \end{cases} \quad \text{或} \quad \text{(II) } \begin{cases} \frac{0.2x + 100}{x} \geq \frac{1}{3} \\ 500 \leq 0.8x \leq 640 \end{cases}$$

不等式组(I)无解，不等式组()的解为 $625 \leq x \leq 750$ 。

因此，当顾客购买标价在 $[625, 750]$ 元内的商品时，可得到不小于 $1/3$ 的优惠率。

2. 解：() 第 1 年投入为 800 万元，第 2 年投入为 $800 \times (1 - 1/5)$ 万元，……，第 n 年投入为 $800 \times (1 -$

$1/5)^{n-1}$ 万元。

$$\begin{aligned} \text{所以, } n \text{ 年内的总投入为 } a_n &= 800 + 800 \times (1 - \frac{1}{5}) + \cdots + 800 \times (1 - \frac{1}{5})^{n-1} \\ &= \sum_{k=1}^n 800 \times (1 - \frac{1}{5})^{k-1} = 4000 \times [1 - (\frac{4}{5})^n]; \end{aligned}$$

第 1 年旅游业收入为 400 万元, 第 2 年旅游业收入为 $400 \times (1+1/4)$ 万元, …… , 第 n 年旅游业收入为 $400 \times (1+1/4)^{n-1}$ 万元。

所以, n 年内的旅游业总收入为

$$b_n = 400 + 400 \times (1+1/4) + \cdots + 400 \times (1+1/4)^{n-1} = 400 \times \sum_{k=1}^n (5/4)^{k-1} = 1600 \times [(5/4)^n - 1]。$$

() 设至少经过 n 年旅游业的总收入才能超过总投入, $b_n - a_n > 0$ 。

即 $1600 \times [(5/4)^n - 1] - 4000 \times [1 - (4/5)^n] > 0$ 。化简得 $5 \times (4/5)^n + 2 \times (5/4)^n - 7 > 0$ 。

设 $x = (4/5)^n$, 代入上式得 $5x^2 - 7x + 2 > 0$,

解此不等式, 得 $x < 2/5$, $x > 1$ (舍去)。即 $(4/5)^n < 2/5$, 由此得 $n \geq 5$ 。

答: 至少经过 5 年旅游业的总收入才能超过总投入。

3. 解: (I) 由题意得 $y = [1.2 \times (1+0.75x) - 1 \times (1+x)] \times 1000(1+0.6x) (0 < x < 1)$, 整理得 $y = -60x^2 + 20x + 200$

($0 < x < 1$)。

() 要保证本年度的利润比上年度有所增加，必须

$$\begin{cases} y - (1.2 - 1) \times 1000 > 0, \\ 0 < x < 1. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} -60x^2 + 20x > 0, \\ 0 < x < 1. \end{cases} \quad \text{解不等式得 } 0 < x < \frac{1}{3}.$$

答：为保证本年度的年利润比上年度有所增加，投入成本增加的比例 x 应满足 $0 < x < 0.33$ 。

4. 解：I. 由图一可得市场售价与时间的函数关系为 $f(t) = \begin{cases} 300 - t, & 0 \leq t \leq 200, \\ 2t - 300, & 200 < t \leq 300; \end{cases}$

由图二可得种植成本与时间的函数关系为 $g(t) = \frac{1}{200}(t - 150)^2 + 100, \quad 0 \leq t \leq 300.$

() 设 t 时刻的纯收益为 $h(t)$ ，则由题意得 $h(t) = f(t) - g(t)$ ，

$$\text{即} \quad h(t) = \begin{cases} -\frac{1}{200}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{175}{2}, & 0 \leq t \leq 200, \\ -\frac{1}{200}t^2 + \frac{7}{2}t - \frac{1025}{2}, & 200 < t \leq 300. \end{cases}$$

当 $0 \leq t \leq 200$ 时，配方整理得 $h(t) = -\frac{1}{200}(t - 50)^2 + 100$ ，

所以，当 $t = 50$ 时， $h(t)$ 取得区间 $[0, 200]$ 上的最大值 100；

当 $200 < t \leq 300$ 时，配方整理得 $h(t) = -1/200(t - 350)^2 + 100$ ，所以，当 $t = 300$ 时， $h(t)$ 取得区间 $(200, 300]$ 上的最大值 87.5。

综上，由 $100 > 87.5$ 可知， $h(t)$ 在区间 $[0, 300]$ 上可以取得最大值 100，此时 $t = 50$ ，即从二月一日开

始的第 50 天时，上市的西红柿纯收益最大。

5. 解(): 设下调后的电价为 x 元/ $\text{kW} \cdot \text{h}$ ，依题意知用电量增至 $k/x - 0.4 + a$ ，电力部门的收益为

$$y = \left(\frac{k}{x - 0.4} + a \right) (x - 0.3) \quad (0.55 \leq x \leq 0.75)。$$

$$(II) \text{依题意有} \quad \begin{cases} \left(\frac{0.2a}{x - 0.4} + a \right) (x - 0.3) \geq [a \times (0.8 - 0.3)](1 + 20\%) , \\ 0.55 \leq x \leq 0.75. \end{cases}$$

$$\text{整理得} \quad \begin{cases} x^2 - 1.1x + 0.3 \geq 0, \\ 0.55 \leq x \leq 0.75. \end{cases} \quad \text{解此不等式得 } 0.60 \leq x \leq 0.75。$$

答: 当电价最低定为 0.60 元/ $\text{kW} \cdot \text{h}$ 仍可保证电力部门的收益比上年至少增长 20%。

$$6. \text{依题意, } G(x) = x + 2. \quad \text{设利润函数为 } f(x), \text{ 则 } f(x) = \begin{cases} -0.4x^2 + 3.2x - 2.8 & (0 \leq x \leq 5), \\ 8.2 - x & (x > 5). \end{cases}$$

() 要使工厂有赢利，即解不等式 $f(x) > 0$ ，

当 $0 \leq x \leq 5$ 时，解不等式 $-0.4x^2 + 3.2x - 2.8 > 0$ 。

即 $x^2 - 8x + 7 < 0$ ， $1 < x < 7$ ， $1 < x \leq 5$ ，

当 $x > 5$ 时，解不等式 $8.2 - x > 0$ ，得 $x < 8.2$ 。

$5 < x < 8.2$ 。

综上，要使工厂赢利， x 应满足 $1 < x < 8.2$ ，即产品应控制在大于 100 台，小于 820 台的范围内。

() $0 \leq x \leq 5$ 时， $f(x) = -0.4(x - 4)^2 + 3.6$ ，

故当 $x = 4$ 时， $f(x)$ 有最大值 3.6 而当 $x > 5$ 时， $f(x) < 8.2 - 5 = 3.2$ 。

所以，当工厂生产 400 台产品时，赢利最多。

()即求 $x=4$ 时的每台产品的售价。此时售价为 $R(4)/4=2.4$ (万元/百台)=240 元/台。