

数学单元专题测试三 函数(三)

学校_____ 班级_____ 姓名_____

一、选择题: 在每小题给出的四个选项中，只有一个正确的，把正确选项的代号填在机读卡的指定位置上。

1. ('02 成都) 已知集合 I 、 P 、 Q 满足 $I=P$
 $Q=\{0, 1, 2, 3, 4\}$, $P \cap Q=\{1, 3\}$, 则 $(\overline{P \cup Q}) \cap (P \cap Q)=$ ()

- (A) $\{0, 1, 3\}$ (B) $\{1, 2, 4\}$
 (C) $\{0, 2, 4\}$ (D) $\{1, 3, 4\}$

2. ('02 成都) 已知函数 $f(x)=\log_2(x^2-ax+3a)$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上是增函数，则实数 a 的取值范围是 ()

- (A) $(-\infty, 4)$ (B) $(-4, 4)$
 (C) $(-\infty, -4)$ (D) $(-4, 2)$

3. ('02 云南) 已知函数 $f(x)=2^x$, 若 $a < b$, 记 $P=\sqrt{f(a) \cdot f(b)}$, $Q=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$, $R=f(\frac{a+b}{2})$, 则 ()

- (A) $R < P < Q$ (B) $P < Q < R$ (C) $Q < P = R$ (D) $P = R < Q$

4. ('02 云南)(理科做)函数 $f(x) = \frac{|x-1|-a}{\sqrt{1-x^2}}$ 是奇函数, 则实数 a 的值为 ()

- (A) -1 (B) 1 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

(文科做)若函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(0, -1)$, 则函数 $f(x+4)$ 的反函数的图象必经过点 ()

- (A) $(-1, 4)$ (B) $(-1, -4)$
(C) $(-4, -1)$ (D) $(1, -4)$

5. ('02 南昌)已知 $f(x)$ 是周期为 2 的偶函数, 且在区间 $[0, 1]$ 上是增函数, 则 $f(-6.5)$, $f(-1)$, $f(0)$ 的大小关系为 ()

- (A) $f(-6.5) < f(0) < f(-1)$
(B) $f(-1) < f(-6.5) < f(0)$
(C) $f(0) < f(-6.5) < f(-1)$
(D) $f(-1) < f(0) < f(-6.5)$

6. ('02 广西)函数 $f(x) = a^x - \frac{a-x}{x-a-1}a+6$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 的图象经过点 $(5, 2)$, 且在区间 $(\frac{23}{4}, +\infty)$ 上恒有 $f^{-1}(x) < 0$, 则实数 a 的值是 ()

- (A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 或 $\frac{1}{2}$ (D) 不存在

7. ('02 广西)函数 $f(x)$ 的定义域为 $x \in \mathbb{R}$ ，且 $x > 1$ ，已知 $f(x+1)$ 为奇函数，当 $x < 1$ 时 $f(x) = 2x^2 - x + 1$ ，那么当 $x > 1$ 时， $f(x)$ 的递减区间是 ()

(A) $[\frac{4}{5}, \quad]$ (B) $(1, \frac{7}{4})$

(C) $[\frac{7}{4}, \quad]$ (D) $(1, \frac{4}{5})$

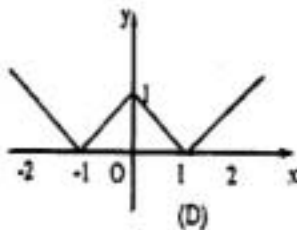
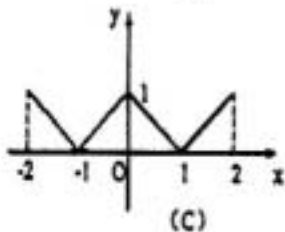
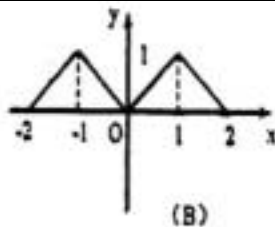
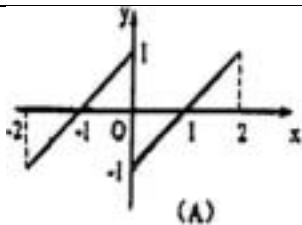
8. ('02 苏州)已知函数 $f(x) = \frac{a-x}{x-a-1}$ 的反函数是其本身，则实数 a 的值是 ()

(A) -2 (B) 2 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

9. ('02 丰台)已知 $a > 0$ ，若 $a > 1$ ，若 $P = \log_a(a^3 - 1)$ ， $Q = \log_a(a^2 - 1)$ ，则 P, Q 的大小关系为 ()

(A) $P > Q$ (B) $P < Q$ (C) $P = Q$ (D) 不确定

10. ('02 广西)函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2|x| + 1}$ ($|x| \geq 2$) 的大致图像是 ()



11. ('02 福建) 定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 不是常数函数，且满足 $f(x-1)=f(x+1)$ ， $f(1+x)=f(1-x)$ ，则 $f(x)$ ()

- (A) 是奇函数也是周期函数
- (B) 是偶函数也是周期函数
- (C) 是奇函数但不是周期函数
- (D) 是偶函数但不是周期函数

12. ('02 福建) 点集 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 分别表示函数 $f_1(x)=\sqrt{4+x}$ ， $f_2(x)=\sqrt{4+|x|}$ ， $f_3(x)=\sqrt{4-x}$ ， $f_4(x)=\sqrt{4-|x|}$ 的图象，给出以下四个命题： $C_1 \subseteq C_2$ ； $C_4 \subseteq C_3$ ； $C_1 \cap C_3 = C_2 \cap C_4$ ； $C_1 \cap C_3 = C_2 \cap C_4$ 其中正确的命题是 ()

(A) (B) (C) (D)

13. ('02 石家庄)若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是单调函数, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则方程 $f(x) = 0$ 在 $[a, b]$ 内()

(A)至少有一实根 (B)至多有一实根
(C)没有实根 (D)有唯一实根

14. ('02 石家庄)一辆中型客车的营运总利润 y (单位: 万元)与营运年数 x ($x \in \mathbb{N}$) 的变化关系如下表所示, 则客车的运输年数为()时, 该客车的年平均利润最大? ()

(A)4 (B)5 (C)6 (D)7

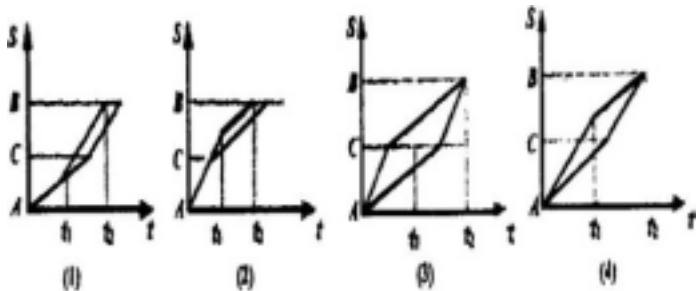
x (年)	4	6	8	...
$y = ax^2 + bx + c$ (万元)	7	11	7	...

15. ('02 长春)已知函数 $f(x)$ 是定义在实数集 \mathbb{R} 上的奇函数, 且 $f(x) = -f(x+2)$, 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) = \frac{x}{2}$, 那么使 $f(x) = -\frac{1}{2}$ 成立的 x 值为()

(A) $2n$ ($n \in \mathbb{Z}$) (B) $2n-1$ ($n \in \mathbb{Z}$)
(C) $4n+1$ ($n \in \mathbb{Z}$) (D) $4n-1$ ($n \in \mathbb{Z}$)

16. ('02 石家庄)甲、乙二人沿同一方向去 B 地，途中都使用两种不同的速度 v_1 与 v_2 ($v_1 < v_2$)，甲一半的路程使用速度 v_1 ，另一半的路程使用速度 v_2 ；乙一半时间使用速度 v_1 ，另一半的时间使用速度 v_2 ，关于甲、乙二人从 A 地到达 B 地的路程与时间的函数图象及关系，有下面图中 4 个不同的图示分析(其中横轴 t 表示时间，纵轴 S 表示路程)，则其中可能正确的图示分析为()

- (A) (1) (B) (3) (C) (1)或(4) (D) (1)或(2)



17. ('02 春季高考)函数 $f(x)=a^x$ ($a>0$ 且 $a \neq 1$) 对于任意的实数 x, y 都有 ()

- (A) $f(xy)=f(x)f(y)$ (B) $f(xy)=f(x)+f(y)$
 (C) $f(x+y)=f(x)f(y)$ (D) $f(x+y)=f(x)+f(y)$

18. ('02 春季高考)函数 $y = -\sqrt{1-x}(x \in [0, 1])$ 的反函数是 ()

(A) $y = x^2 - 1 (-1 \leq x \leq 0)$ (B) $y = x^2 - 1 (0 \leq x \leq 1)$

(C) $y = 1 - x^2 (x \geq 0)$ (D) $y = 1 - x^2 (0 \leq x \leq 1)$

19. ('01 高考)(理)函数 $y = \cos x + 1 (-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ 的反函数是 ()

(A) $y = -\arccos(x-1) (0 \leq x \leq 2)$

(B) $y = \arccos(x-1) (0 \leq x \leq 2)$

(C) $y = \arccos(x-1) (0 \leq x \leq 2)$

(D) $y = -\arccos(x-1) (0 \leq x \leq 2)$

(文)函数 $y = 2^{-x} + 1 (x > 0)$ 的反函数是 ()

(A) $y = \log_2 \frac{1}{x} - 1, x \in (1, 2)$

(B) $y = -\log_2 \frac{1}{x} - 1, x \in (1, 2)$

(C) $y = \log_2 \frac{1}{x} - 1, x \in (1, 2)$

(D) $y = -\log_2 \frac{1}{x} - 1, x \in (1, 2)$

20. ('02 西城)在 $f_1(x) = x^{\frac{1}{2}}, f_2(x) = x^2, f_3(x) = 2^x, f_4(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ 四个函数中, 当 $x_1 > x_2 > 1$ 时, 使 $\frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)] < f(\frac{x_1 + x_2}{2})$ 成立的函数是 ()

(A) $f_1(x) = x^{\frac{1}{2}}$ (B) $f_2(x) = x^2$

(C) $f_3(x) = 2^x$ (D) $f_4(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

二、填空:把答案填在题中的横线上。

21. ('02 江西)若实数 x 、 y 满足 $x^2+2y^2=1$, 则 x^2y^4 的最大值是_____。

22. ('02 南昌)(文)函数 $y=\log_2(4x-x^2)$ 的递增区间是_____。

(理)函数 $y=f(x)$ 的图象与 $y=2^x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 则函数 $y=f(4x-x^2)$ 的递增区间_____。

23. ('02 成都)函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-6x+17)$ 的值域为_____。

24. ('02 成都)设 $f(x)$ 的反函数是减函数, 且 $f(x)>0$, 给出下列函数: $y=\sqrt{f(x)}$; $y=-\frac{5}{f(x)}$; ③ $y=\log_2 f(x)$; ④ $y=\log_{\frac{1}{2}} f(x)$; ⑤ $y=(\frac{2}{3})^{f(x)}$; ⑥ $y=10^{f(x)}$ 。其中是增函数的序号是_____。

(注:把你认为正确的序号都填上)

三、解答题:解答应写出文字说明、证明过程或推演步骤。

25. ('02 成都)(本小题满分 12 分)

函数 $f(x)=\frac{1}{2}+\lg\frac{1-x}{1+x}$

()求此函数的定义域, 并判断该函数的单调性;

() 解关于 x 的不等式 $f[x(x-\frac{1}{2})] < \frac{1}{2}$ 。

26. (' 02 威海) (本小题满分 12 分)

求函数 $f(x) = \log_2 \frac{x+1}{x-1} + \log_2(x-1) + \log_2(p-x)$ 的定义域和值域。

27. (' 02 桂林) (本小题满分 12 分)

设 $f(x) = ax + \frac{1-x}{ax}$ ($a > 0$)。

() 利用函数单调性的定义，判断函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性；

() 设 $f(x)$ 在 $0 < x < 1$ 上最小值为 $g(a)$ ，求 $y = g(a)$ 的解析式。

28. (' 02 黄冈) (14 分)

(文) 已知 a, b 是实数，函数 $f(x) = x^2 + ax + 1$ ，且 $y = f(x+1)$ 在定义域上是偶函数。

() 求 a ;

() 如果在区间 $(- , -1)$ 上存在函数 $F(x)$, 使 $F(x)$ 满足 $F(x) \cdot f(x+1) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{8}{3}x + \frac{7}{3}$, 当 x 为何值时, $F(x)$ 取得最小值。

参考答案

1-5 CBDBC 6-10 BBAAC 11-15 BDDBD 16-20 DCCAA 21. $\frac{1}{27}$ 22 文 $(0, 2)$ 理 $x \in (0, 2)$ 23.

$(- , -3)$ 24.

25. 解: (1) 函数定义域满足条件 $\frac{1-x}{1+x} > 0$, $-1 < x < 1$, 函数的定义域为 $\{x | -1 < x < 1\}$, 令 $u = \frac{1-x}{1+x}$, 则 $u = \frac{2}{1+x}$, $x \in (-1, 1)$ 时 $(1+x)$ 是增函数, u 是减函数, 又 $y = \lg u$ 是增函数, $y = \lg \frac{1-x}{1+x}$ 是减函数, $y = \frac{1}{2} + \lg \frac{1-x}{1+x}$ 在 $(-1, 1)$ 上是减函数, 注: 用定义证明其是减函数也应给 3 分。

(2) $f(0) = \frac{1}{2}$, $f[x(x - \frac{1}{2})] < \frac{1}{2} = f(0)$, $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上减函数,

$$\therefore \begin{cases} x(x - \frac{1}{2}) > 0, \\ x(x - \frac{1}{2}) < 1, \end{cases} \quad \text{解这个不等式组, 得 } 0 < x < \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \text{ 或 } \frac{1}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{17}}{4},$$

故原不等式的解集为 $x | \frac{1-\sqrt{17}}{4} < x < 0$ 或 $1/2 < x < \frac{1+\sqrt{17}}{4}$ 。

26. 解: 由 $\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} > 0 \\ x-1 > 0 \\ p-x > 0 \end{cases}$ 解得函数 $f(x)$ 的定义域是 $(1, p)$ ($p > 1$) (未写 $p > 1$ 不扣分)。

所以, $f(x) = \log_2 [(x+1)(p-x)] = \log_2 [-x^2 + (p-1)x + p]$ ($1 < x < p$)

$$\text{设 } u = -x^2 + (p-1)x + p = -(x - \frac{p-1}{2})^2 + \frac{(p+1)^2}{4} \quad (1 < x < p)$$

(1) 当 $\frac{p-1}{2} < 1$, 即 $1 < p < 3$ 时, $0 < u < 2p-2$,

$f(x) < 1 + \log_2(p-1)$;

(2) 当 $\frac{p-1}{2} > 1$, 即 $p > 3$ 时, $0 < u < (p+1)^2/4$, $f(x)$

$2 \log_2(p+1) - 2$ 综上, 函数 $f(x)$ 当 $1 < p < 3$ 时, 值域是 $(-\infty, 1 + \log_2(p-1))$;

当 $p > 3$ 时, 值域是 $(-\infty, 2 \log_2(p+1) - 2]$ 。

27. 解: $f(x) = x + \frac{1}{ax} - \frac{1}{a}$ ($a > 0$)。

(1) 设 $x_2 > x_1 > 0$, 则 $f(x_2) - f(x_1) = x_2 + \frac{1}{ax_2} - (x_1 + \frac{1}{ax_1}) = (x_2 - x_1)(a - \frac{1}{ax_1x_2})$,

数学单元专题测试三

当 $x > \frac{1}{a} > 0$ 时, 有 $x_1 > \frac{1}{a}, x_2 > \frac{1}{a}$, 这时 $x_1 x_2 > \frac{1}{a^2}$, 所以 $a - \frac{1}{ax_1 x_2} > 0$, $\therefore f(x_2) > f(x_1)$;

当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时, 有 $0 < x_1 < \frac{1}{a}, 0 < x_2 < \frac{1}{a}$, 这时 $0 < x_1 x_2 < \frac{1}{a^2}$, 所以 $a - \frac{1}{ax_1 x_2} < 0$, $\therefore f(x_2) < f(x_1)$;

所以在区间 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上 $f(x)$ 是增函数; 在区间 $(0, \frac{1}{a})$ 上 $f(x)$ 是减函数.

(II) 当 $a \geq 1$ 时, 有 $0 < \frac{1}{a} \leq 1$, $\therefore f(x)$ 的最小值为 $g(a) = f(\frac{1}{a}) = 2 - \frac{1}{a}$.

当 $0 < a < 1$ 时, 有 $\frac{1}{a} > 1$, $\therefore f(x)$ 的最小值为 $g(a) = f(1) = a$. $\therefore y = g(a) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{a} (a \geq 1), \\ a (0 < a < 1). \end{cases}$

28. (1) $\because f(x+1) = (x+1)^2 + a(x+1) + 1$ 是 R 上的偶函数, $\therefore f(x+1) = f(-x+1)$ 即 $(x+1)^2 + a(x+1) + 1 = (-x+1)^2 + a(-x+1) + 1$, $\therefore 4x + 2ax = 0$, $\therefore a = -2$.

(2) $x \in (-\infty, -1)$ 得 $g(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{7}{3}$, 则 $F(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{3}x^2 \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{x^2}} - \frac{8}{3} = \frac{2\sqrt{7}}{3} - \frac{8}{3}$, 当 $\frac{1}{3}x^2 = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{x^2}$ 时等号成立, 又 $x \in (-\infty, -1)$, 则当 $x = -\sqrt{7}$ 时 $F(x)$ 取最小值 $\frac{2\sqrt{7}}{3} - \frac{8}{3}$.