数学单元专题测试二十　空间的平行与垂直

学校__________　班级__________　姓名__________

一、选择题:

1.(’01 成都(三))有下列四个命题:

①过平面α外两点有且只有一个平面与平面α垂直；②互相平行的两条直线在同一平面内的射影必是平行线；③直线 l 上两个不同点到平面α的距离相等是 l∥α的必要非充分条件；④平面α内存在无数条直线与已知直线 l 垂直是 l⊥α的充分非必要条件其中正确命题的个数是　　　　　　　　　　（　　）

(A)0　(B)1　(C)2　(D)3

2.(’01 东城)设 a、b、c 表示三条直线，α，β表示两个平面，则下列命题中逆命题不成立的是

（　　）

(A)c⊥α，若 c⊥β，则α∥β

(B)b⊂β，　与α在β内的射影，若 b⊥c，则 a⊥b

(C)$b\subset\beta$，若 $b\perp\alpha$，则 $\beta\perp a$

(D)$b\subset\alpha$， $c\not\subset\alpha$，若 $c\parallel a$，若 $b\parallel c$

3.(’01 东城)直线 a，b 是不互相垂直的异面直线，平面 α， β 满足:$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，且 $\alpha\perp\beta$，这样的 α， β ( )

(A)不存在 (B)只有一对

(C)有有限对 (D)有无数对

4.(’01 西城)平面 $\alpha\perp\beta$，$\cap\beta=l$，点 $P\in\alpha$，$Q\in l$， 则 $PQ\perp l$ 是 $PQ\perp\beta$ 的 ( )

(A)充分不必要条件 (B)充要条件

(C)必要不充分条件 (D)既不充分也不必要条件

5.(’01 西城)(2001 年合肥市)设 l_1， l_2 是两条直线， α、β 是两个平面 ，A 为一点，有下列四个命题:①若 $l_1\subset\alpha$， $l_2\cap\alpha=A$ ，则 ι_1， ι_2 必为异面直线；②若 $l_1\parallel\alpha$，$l_2\parallel l_1$，则 $l_2\parallel\alpha$；③若 $l_1\subset\alpha$，$l_2\subset\beta$， $l_1\parallel\beta$，$l_2\parallel\alpha$，则 $\alpha\parallel\beta$；④若 $\alpha\perp\beta$，$l_1\subset\alpha$， 则 $l_1\perp\beta$ ，其中正确的命题个数是 ( )

(A)0 个 (B)1 个 (C)2 个 (D)3 个

6.(’01 丰台)(2001 年汕头市)对于直线 m， n 和平面 α、 β， α⊥β的一个充分条件是(　)

(A)m⊥n，m∥α， n∥β

(B)m⊥n ， α∩β=m ， n⊂α

(C)m∥n， ⊥β，m⊂α

(D)m∥n，m⊥α，n⊥β

7.(’01 丰台)已知 SO⊥PQR 所在的平面α于 0 点，且 SP=SQ=SR ，若△PQR 中，有 cosP·cosQ>sinP·sinQ，则 0 点　　(　)

(A)必在△PQR 的某一边上

(B)心在△PQR 的内部(不含边界)

(C)必在△PQR 的外部(不含边界)

(D)位置无法确定

8.(’01 朝阳)平面α内有一以 AB 为直径的圆，PA⊥α，点 C 在圆周上移动(不与 A、B 重合)，点 D、E 分别是 A 在 PC、PB 上的射影， 则　　(　)

(A)∠AED 是二面角 A-PB-C 的平面角

(B)∠ACD 是二面角 A-PC-B 的平面角

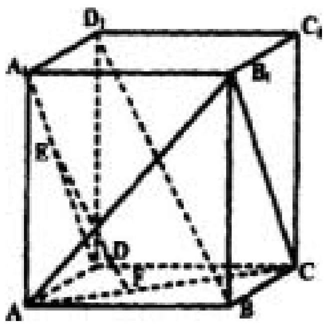
(C)∠EDA 是二面角 A-PC-B 的平面角

(D)∠DAE 是二面角 B-PA-C 的平面角

9.('01 崇文)平面α内有一个半径为 a 的圆 O，OP⊥α且 OP=a， PA 为α的一条斜线， PA=2a(A∈α)，B 为圆 O 上的任意一点，则 PA 在α内的射影与 AB 所成角中的最大角的正弦值为 (　　)

(A)$\frac{1}{2}$　　(B)$\frac{\sqrt{3}}{3}$

(C)$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(D)$\frac{\sqrt{3}}{2}$



10.('01 东城)如右图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，EF 是异面直线 AC 和 A_1D 的公垂线，则 EF 和 BD_1 的关系是 (　　)

(A)相交不垂直　(B)相交垂直

(C)异面直线　　(D)互相平行二、填空题:

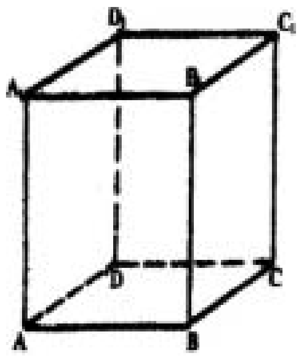
11.('01东城)(2001唐一中)设 l、m 是不重合的两条直线，α、β是不重合的两个平面，给出下列命题:

①若 l∥α，α⊥β，则 l⊥β；②若 l⊥m，l⊥α，m⊥β，则α⊥β；

③若 l⊥α，⊥β，m⊂β，则 l∥m；④若 l⊥β，⊥β，则 l∥α或 l⊂α

其中正确命题的序号是____。

12.('01 西城)已知如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，过点 A 作截面，使正方体的 12 条棱所在直线与截面所成的角皆相等，试写出满足这样条件的一个截面____。(注:只需任意写出一个。)



13.(’02 朝阳)正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，EF 是异面直线 AC 和 A_1D 的公垂线，则 EF 和 BD_1 的位置关系是____。

14.(’01 东城)α、β是两个不同平面， m、n 是平面α、β之外的两条不同直线，给出四个论断:①m⊥n；②α⊥β；③n⊥β；④m⊥α，以其中三个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，写出你认为正确的一个命题____。

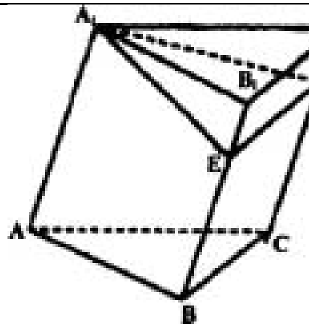
三、解答题

15.(’01 西城)如图，已知三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 的底面是边长为 2 的正三角形， 侧棱 A_1A 与 AB，AC 均成 45°角，且 $A_1E⊥B_1B$ 于 E，$A_1F⊥CC_1$ 于 F。

(Ⅰ)求证:平面 A_1EF⊥平面 B_1BCC_1；

(Ⅱ)求点 A 到平面 B_1BCC_1 的距离；

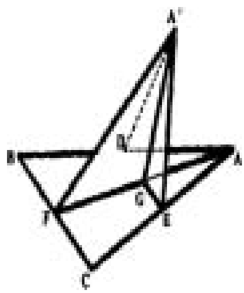
(Ⅲ)当 AA_1 多长时， 点 A_1 到平面 ABC 与平面 B_1BCC_1 的距离相等?



16.(’01 海淀)已知边长为α的正三角形 ABC 的中线 AF 与中位线 DE 相交于 G(如图)，将此三角形沿 DE 折成二面角 A′一 DE-B。

(Ⅰ)求证:平面 A′GF⊥平面 BCED；

(Ⅱ)当二面角 A′-DE-B 的余弦值为多少时， 异面直线 A′E 与 BD 互相垂直?证明你的结论。



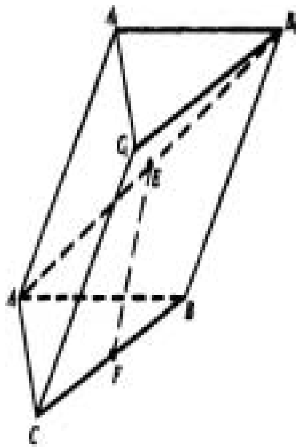
17.(’01 崇文)如图，已知斜三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$的底面是直角三角形，AC⊥CB，∠ABC =30°侧面 A_1ABB_1

是边长为α的菱形 ， 且垂直于底面，$\angle A_1AB=60°$，E、F分别是AB_1、BC的中点 。

(Ⅰ)求证:EF∥侧面A_1ACC_1；

(Ⅱ)求四棱锥$A-B_1BCC_1$的体积；

(Ⅲ)求EF与侧面A_1ABB_1所成角的正切值。



参考答案

1.B 2.C 3.D 4.B 5.A 6.C 7.C 8.A 9.B 10.D 11.②④ 12.截面 AB_1D_1 或截面 ACD_1 或截面 AB_1C 13.互相平行 14.①③④⇒②或②③④⇒①

15.(Ⅰ)解：由 $PD\perp$平面 $ABCD$，$BC\subset$平面 $ABCD$，得 $PD\perp BC$。

由 $AD\perp DC$，$AD\parallel BC$，得 $BC\perp DC$。又 $PD\cap DC=D$，则 $BC\perp$平面 PDC

所以$\angle BPC$ 为直线 PB 与平面 PDC 所成的角

令 $PD=1$，则 $DC=1$，$BC=\sqrt{2}$，可求出 $PC=\sqrt{2}$

由 $BC\perp$平面 PDC，$PC\subset$平面 PDC，得 $BC\perp PC$。

在 $Rt\triangle PBC$ 中，由 $PC=BC$ 得$\angle BPC=45^\circ$ 即直线 PB 与平面 PDC 所成的角为 45°

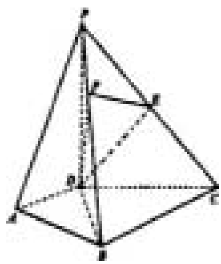
(Ⅱ)取 PC 中点 E，连 DE，则 $DE\perp PC$。由 $BC\perp$平面 PDC，$BC\subset$平面 PBC，

得平面 $PDC\perp$平面 PBC。则 $DE\perp$平面 PBC

作 $EF\perp PB$ 于 F，连 DF，由三垂线定理，得 $DF\perp PB$。

则$\angle DFE$ 为二面角 $D-PB-C$ 的平面角

在 $Rt\triangle PDC$ 中，求得 $DE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



在 Rt△PFE 中，求得 $EF=\frac{1}{2}$

在 Rt△DFE 中，求得 $\operatorname{tg}\angle DFE=\frac{DE}{EF}=\sqrt{2}$。

即二面角 $D-PB-C$ 的正切值为$\sqrt{2}$

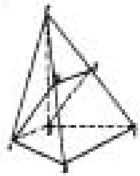
(Ⅲ)证：取 PB 中点 G，连 AG 和 EG。由三角形中位线定理得

$GE\parallel BC$，$GE=\frac{1}{2}BC$。　由已知，$AD\parallel BC$，$AD=\frac{1}{2}BC$。

$\therefore AD=GE$，$AD\parallel GE$。　则四边形 $AGED$ 为平行四边形，

$\therefore AG\parallel DE$

又 $AG\subset$平面 PAB，$DE\not\subset$平面 PAB，　$\therefore DE\parallel$平面 PAB。



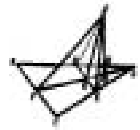
16.(Ⅰ)证明：$\because$△ABC 是正三角形，AF 是 BC 边中线，　$\therefore AF\perp BC$。

$\because D$、E 分别是 AB、AC 的中点，$\therefore DE\parallel BC$，$\therefore AF\perp DE$。

又 $AF\cap DE=G$，

$\therefore A'G\perp DE$，$FG\perp DE$，又 $A'G\cap FG=G$，$\therefore DE\perp$平面 $A'FG$。

又 $DE\subset$平面 $DECB$，　$\therefore$平面 $A'FG\perp$平面 $DECB$。



(Ⅱ)解：$\because A'G\perp DE$，$GF\perp DE$，　$\therefore\angle A'GF$ 是二面角 $A'-DE-B$ 的平面角。

$\because$平面 $A'GF\perp$平面 $BCED$，作 $A'O\perp AG$ 于 O，　$\therefore A'O\perp$平面 $BCED$。

设 $A'E\perp BD$，连结 EO 并延长交 AD 于 H，$\therefore EH\perp AD$。$\because AG\perp DE$，

$\therefore O$ 是正三角形 ADE 的垂心也是中心。

$\because AD=DE=AE=\frac{a}{2}$，$\therefore A'G=AG=\frac{\sqrt{3}}{4}a$，$OG=\frac{\sqrt{3}}{12}a$。

在 Rt△$A'OG$ 中，$\cos\angle A'GO=\frac{OG}{A'G}=\frac{1}{3}$。　$\because\angle A'GF=\pi-\angle A'GO$，

$\therefore\cos\angle A'GF=-\cos\angle A'GO=-\frac{1}{3}$。即当$\angle A'GF$ 的余弦值为 $-\frac{1}{3}$时，$A'E$ 与 BD 互相垂直。

17.(Ⅰ)证明：连结 A_1B，A_1C。　$\because A_1ABB_1$ 是菱形，且 E 是 AB_1 的中点，

$\therefore E$ 是 A_1B 的中点。　又 F 是 BC 的中点，　$\therefore EF\parallel A_1C$。

又 $A_1C\subset$平面 A_1ACC_1，　$EF\not\subset$平面 A_1ACC_1，　$\therefore EF\parallel$平面 A_1ACC_1。

(Ⅱ)解：$\because$平面 $A_1ABB_1\perp$平面 ABC，交线 AB，　$\therefore$在平面 A_1ABB_1 内，过 A_1 作 $A_1O\perp AB$ 于 O，

则 $A_1O\perp$平面 ABC，且 $h=A_1O=\frac{\sqrt{3}}{2}a$。

$\therefore V_{A_1-C_1CBB_1}=V_{柱}-V_{A-A_1B_1C_1}$

$$Sh-\frac{1}{3}Sh=\frac{2}{3}Sh=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot A_1O$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{1}{8}a^3。$$

(Ⅲ)解：在平面 ABC 内，过 F 作 $FH\perp AB$ 于 H，则 $FH\perp$侧面 A_1ABB_1。

连结 EH，则$\angle HEF$ 为 EF 与侧面 A_1ABB_1 所成的角。

在 Rt△FHB 中，$FH=\frac{1}{2}BF=\frac{\sqrt{3}}{8}a$，$BH=\frac{3}{8}a$。

在△HEB 中，$HE=\sqrt{(BE)^2+(BH)^2-2\cdot BE\cdot BH\cdot\cos\angle A_1BA}$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2+\left(\frac{3}{8}a\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{3}{8}a\cdot\cos60^\circ}=\frac{\sqrt{13}}{8}a。$$

在 Rt△EHF 中，$\operatorname{tg}\angle HEF=\frac{\sqrt{39}}{13}$。