版权专有　侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

数学10年真题点评.1/陈文灯主编.—北京:北京理工大学出版社,2006.2
(考研白皮书系)
ISBN 7-5640-0707-9

Ⅰ.数...　Ⅱ.陈...　Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第007381号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
电子邮箱 / chiefeditor@bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京时代华都印刷有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 11.75
字　　数 / 286千字
版　　次 / 2006年2月第1版　2006年2月第2次印刷
定　　价 / 15.00元

图书出现印装质量问题,本社负责调换

需要全本请访问 www.ertongbook.com

前　言

一年一度的硕士研究生入学统一考试已经举行了十几届，积累了近百份数学试卷，这既是众多命题专家智慧和劳动的结晶，也是广大考研学子的宝贵财富。

历届的考研真题，除其内容外，还包含诸多有价值的信息，例如试题的形式、涵盖面、难度及试题所蕴涵的规律性，为了使考生在考研真题中汲取更多知识、掌握更多解题方法，我们将 1997 年～2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题做了精心的解析，编写成《考研数学·10 年真题点评》系列丛书，奉献给广大考研朋友，书中对每道真题通过“分析”、“详解”和“评注”三部分进行点评。在“分析”中用简明语言给出解题思路；在“详解”中用简捷、新颖方法给出详细解答；在“评注”中简单强调与真题有关的知识点及题解中使用的技巧，这里要特别指出的是，书中对 2004、2005 和 2006 年真题中的解答题，标明了参考的评分标准，使读者明了完整准确解题应有的步骤。

我们希望读者在使用本书时，不要轻易地翻阅真题的答案，只有当百思不得其解时才查阅答案；而且每做完一道真题，应回过头来仔细阅读书中有关这道真题的分析、详解和评注，进行比对和总结。如果能如此下功夫做完最近十年的数学考研真题，读完全书，我们深信读者在考研数学的基本概念和基本理论的理解上，在计算方法和计算技巧的掌握上都将获得一个飞跃，而且在解题能力和应考水平上也将有一个较大幅度的提高，从而更加从容地面对研究生入学考试。

由于成书时间仓促，书中疏漏之处在所难免，恳请广大读者和同仁指正。

编　者

2006 年 1 月

2006 年全国硕士研究生入学统一考试
数学一试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$ _____.

(2) 微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是_____.

(3) 设 $\sum$ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧,则 $\iint\limits_{\sum}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ _____.

(4) 点 $(2,1,0)$ 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离 $d=$ _____.

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}$ 为 2 阶单位矩阵,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$,则 $|\boldsymbol{B}|=$ _____.

(6) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布,则 $P\{\max\{X,Y\}\leqslant 1\}=$ _____.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x)>0$,$f''(x)>0$. Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量,Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x>0$,则

(A) $0<\mathrm{d}y<\Delta y$.　　(B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$.

(C) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$.　　(D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$.　　【　　】

(8) 设 $f(x,y)$ 为连续函数,则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 等于

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.　　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　【　　】

(9) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则级数

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 收敛.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛.　　【　　】

(10) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数,且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$,已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点,下列选项正确的是

(A) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$,则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

(B) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$,则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

(C) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

(D) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$. 【 】

(11) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维向量,$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,下列选项正确的是

(A) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(D) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关. 【 】

(12) 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$,再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 $\boldsymbol{C}$,记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,则

(A)$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$. (B)$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$.

(C)$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$. (D)$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$. 【 】

(13) 设 A,B 为随机事件,且 $P(B)>0$,$P(A\mid B)=1$,则必有

(A)$P(A\cup B)>P(A)$. (B)$P(A\cup B)>P(B)$.

(C)$P(A\cup B)=P(A)$. (B)$P(A\cup B)=P(B)$. 【 】

(14) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$,Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$,且

$$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\},$$

则必有

(A)$\sigma_1<\sigma^2$. (B)$\sigma_1>\sigma_2$.

(C)$\mu_1<\mu_2$. (B)$\mu_1>\mu_2$. 【 】

三、(本题共 9 小题,满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0\}$,计算二重积分

$$I=\iint_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(16)(本题满分 12 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$,$x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求该极限;

(Ⅱ) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

(17)(本题满分 12 分)

将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

(18)(本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数,且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

(Ⅰ)验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$;

(Ⅱ)若 $f(1)=0,f'(1)=1$,求函数 $f(u)$ 的表达式.

(19)(本题满分 12 分)

设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内,函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数,且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 证明:对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L,都有

$$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0.$$

(20)(本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1,\\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1,\\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=-1. \end{cases}$$

有三个线性无关的解.

(Ⅰ)证明方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$;

(Ⅱ)求 a,b 的值及方程组的通解.

(21)(本题满分 9 分)

设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3,向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

(Ⅱ)求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

(22)(本题满分 9 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, & -1<x<0,\\ \dfrac{1}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

令 $Y=X^2$,$F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数,求

(Ⅰ)Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(Ⅱ)$F\left(-\dfrac{1}{2},4\right)$.

需要全本请访问 www.ertongbook.com

(23)(**本题满分** 9 **分**)

设总体 X **的概率密度为**

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1,\\ 1-\theta, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ **是未知参数**$(0<\theta<1)$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ **为来自总体** X **的简单随机样本,记** N **为样本值** $x_1,x_2,\cdots,x_n$ **中小于** 1 **的个数. 求** θ **的最大似然估计.**

2005 年全国硕士研究生入学统一考试
数学一试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(1)曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为_____.

(2)微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为_____.

(3)设函数 $u(x,y,z)=1+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{18}$,单位向量 $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$,则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,3)}$ $=$_____.

(4)设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域,Σ 是 Ω 的整个边界的外侧,则 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_____.

(5)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为三维列向量,记矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3).$$

如果 $|\boldsymbol{A}|=1$,那么 $|\boldsymbol{B}|=$_____.

(6)从数 1,2,3,4 中任取一个数,记为 X,再从 $1,\cdots,X$ 中任取一个数,记为 Y,则 $P\{Y=2\}$ $=$_____.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7)设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内

(A)处处可导.　　(B)恰有一个不可导点.

(C)恰有两个不可导点.　　(D)至少有三个不可导点.　　【　】

(8)设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,"$M\Leftrightarrow N$"表示"M 的充分必要条件是 N",则必有

(A)$F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B)$F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C)$F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D)$F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.　　【　】

(9)设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$,其中函数 φ 具有二阶导数,ψ 具有一阶导数,则必有

(A)$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(B)$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.　　【　】

(10)设有三元方程 $xy-z\ln y+e^{xz}=1$，根据隐函数存在定理，存在点$(0,1,1)$的一个邻域，在此邻域内该方程

(A)只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$.

(B)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$和 $z=z(x,y)$.

(C)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$和 $z=z(x,y)$.

(D)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$和 $y=y(x,z)$.　　【　】

(11)设 λ_1,λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$线性无关的充分必要条件是

(A)$\lambda_1\neq 0$.　　(B)$\lambda_2\neq 0$.　　(C)$\lambda_1=0$.　　(D)$\lambda_2=0$.　　【　】

(12)设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geqslant 2)$阶可逆矩阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，则

(A)交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $\boldsymbol{B}^*$.　　(B)交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $\boldsymbol{B}^*$.

(C)交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $-\boldsymbol{B}^*$.　　(D)交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $-\boldsymbol{B}^*$.

【　】

(13)设二维随机变量(X,Y)的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，则

(A)$a=0.2,b=0.3$.　　(B)$a=0.4,b=0.1$.

(C)$a=0.3,b=0.2$.　　(D)$a=0.1,b=0.4$.　　【　】

(14)设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$为来自总体 $N(0,1)$的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则

(A)$n\overline{X}\sim N(0,1)$　　(B)$nS^2\sim\chi^2(n)$.

(C) $\frac{(n-1)\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$.　　(D) $\frac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1)$.　　【　】

三、解答题(本题共 9 小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 11 分)

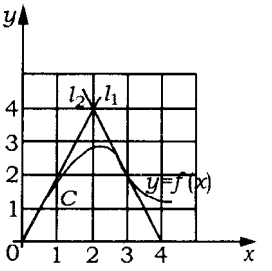
设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，$[1+x^2+y^2]$表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数，计算二重积分 $\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(16)(本题满分 12 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{n(2n-1)}\right)x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

(17)(本题满分 11 分)

如右图,曲线 C 的方程为 $y=f(x)$,点(3,2)是它的一个拐点,直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点(0,0)与(3,2)处的切线,其交点为(2,4). 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数,计算定积分 $\int_0^3(x^2+x)f'''(x)\mathrm{d}x$.



(18)(本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0$,$f(1)=1$. 证明:

(Ⅰ)存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(\xi)=1-\xi$;

(Ⅱ)存在两个不同的点 $\eta,\xi\in(0,1)$,使得 $f'(\eta)f'(\xi)=1$.

(19)(本题满分 12 分)

设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数,在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上,曲线积分 $\oint_L\dfrac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$ 的值恒为同一常数.

(Ⅰ)证明:对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C,有

$$\oint_C\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0;$$

(Ⅱ)求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

(20)(本题满分 9 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形;

(Ⅲ)求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

(21)(本题满分 9 分)

已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行是 (a,b,c),a,b,c 不全为零,矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$($k$ 为常数),且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的通解.

(22)(本题满分 9 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

求:(Ⅰ)(X,Y)**的边缘概率密度** $f_X(x)$,$f_Y(y)$;

(Ⅱ)$Z=2X-Y$ **的概率密度** $f_Z(z)$.

(23)(**本题满分** 9 **分**)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$**为来自总体** $N(0,1)$**的简单随机样本**,$\overline{X}$ **为样本均值**,**记** $Y_i=X_i-\overline{X}$,$i=1,2,\cdots,n$.

求:(Ⅰ)Y_i **的方差** DY_i,$i=1,2,\cdots,n$;

(Ⅱ)Y_1 **与** Y_n **的协方差** $\mathrm{cov}(Y_1,Y_n)$.

2004 年全国硕士研究生入学统一考试
数学一试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(1)曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为_____.

(2)已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$,且 $f(1)=0$,则 $f(x)=$_____.

(3)设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分,则曲线积分 $\int_L x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x$ 的值为_____.

(4)欧拉方程 $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+4x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0(x>0)$ 的通解为_____.

(5)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵,则 $|\boldsymbol{B}|=$_____.

(6)设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布,则 $P\{X>\sqrt{DX}\}=$_____.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7)把 $x\to0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t$,$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\mathrm{d}t$,$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t$ 排列起来,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是

(A)α,β,γ. (B)α,γ,β. (C)β,α,γ. (D)β,γ,α. 【 】

(8)设函数 $f(x)$ 连续,且 $f'(0)>0$,则存在 $\delta>0$,使得

(A)$f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.

(B)$f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少.

(C)对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$.

(D)对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$. 【 】

(9)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数. 下列结论中正确的是

(A)若 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(B)若存在非零常数 λ,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

(C)若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=0$.

(D)若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,则存在非零常数 λ,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$. 【 】

需要全本请访问 www.ertongbook.com

(10)设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$，则 $F'(2)$ 等于

(A)$2f(2)$.　　(B)$f(2)$.　　(C)$-f(2)$.　　(D)0.　　【　　】

(11)设 A 是三阶方阵，将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B，再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C，则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 Q 为

(A)$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.　　(B)$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(C)$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.　　(D)$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　【　　】

(12)设 A,B 为满足 $AB=0$ 的任意两个非零矩阵，则必有

(A)A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关.

(B)A 的列向量组线性相关，B 的列向量组线性相关.

(C)A 的行向量组线性相关，B 的行向量组线性相关.

(D)A 的行向量组线性相关，B 的列向量组线性相关.　　【　　】

(13)设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$. 若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于

(A)$u_{\frac{\alpha}{2}}$.　　(B)$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.　　(C)$u_{\frac{1-\alpha}{2}}$.　　(D)$u_{1-\alpha}$.　　【　　】

(14)设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 独立同分布，且其方差为 $\sigma^2>0$. 令 $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则

(A)$\mathrm{cov}(X_1,Y)=\frac{\sigma^2}{n}$.　　(B)$\mathrm{cov}(X_1,Y)=\sigma^2$.

(C)$D(X_1+Y)=\frac{n+2}{n}\sigma^2$.　　(D)$D(X_1-Y)=\frac{n+1}{n}\sigma^2$.　　【　　】

三、解答题(本题共 9 小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 12 分)

设 $\mathrm{e}<a<b<\mathrm{e}^2$，证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a)$.

(16)(本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时，为了减少滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9000kg 的飞机，着陆时的水平速度为 700km/h. 经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k=6.0\times10^6$). 问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少？(注 kg 表示千克，km/h 表示千米/小时.)

(17)(本题满分 12 分)

计算曲面积分　$I=\iint\limits_{\Sigma}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2(z\geqslant0)$ 的上侧.

(18)(本题满分 11 分)

设有方程 $x^n+nx-1=0$，其中 n 为正整数. 证明此方程存在唯一正实根 x_n，并证明当 $\alpha>1$ 时，

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.

(19)(本题满分 12 分)

设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数,求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

(20)(本题满分 9 分)

设有齐次线性方程组 $\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0,\\ \cdots\cdots\\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0,\end{cases}$ $(n\geqslant 2)$

试问 a 取何值时,该方程组有非零解,并求出其通解.

(21)(本题满分 9 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根,求 a 的值,并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

(22)(本题满分 9 分)

设 A,B 为随机事件.且 $P(A)=\frac{1}{4}$,$P(B|A)=\frac{1}{3}$,$P(A|B)=\frac{1}{2}$,令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生},\\ 0, & A\text{ 不发生};\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{ 发生},\\ 0, & B\text{ 不发生}.\end{cases}$$

求:(Ⅰ)二维随机变量 (X,Y) 的概率分布;

(Ⅱ)X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

(23)(本题满分 9 分)

设总体 X 的分布函数为

$$F(X;\beta)=\begin{cases}1-\frac{1}{x^{\beta}}, & x>1,\\ 0, & x\leqslant 1,\end{cases}$$

其中未知参数 $\beta>1$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,求:

(Ⅰ)β 的矩估计量;

(Ⅱ)β 的最大似然估计量.

2003 年全国硕士研究生入学统一考试
数学一试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(1)$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$_____.

(2)曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面的方程是_____.

(3)设 $x^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$,则 $a_2=$_____.

(4)从 $\mathbf{R}^2$ 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ 的过渡矩阵为_____.

(5)设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

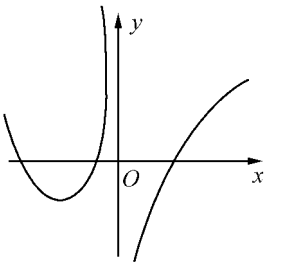
$$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则 $P\{X+Y\leqslant 1\}=$_____.

(6)已知一批零件的长度 X(单位:cm)服从正态分布 $N(\mu,1)$,从中随机地抽取 16 个零件,得到长度的平均值为 40cm,则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是_____.(注:标准正态分布函数值 $\Phi(1.96)=0.975,\Phi(1.645)=0.95$.)

二、选择题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,其导函数的图形如下图所示,则 $f(x)$ 有



(A)一个极小值点和两个极大值点.

(B)两个极小值点和一个极大值点.

(C)两个极小值点和两个极大值点.

(D)三个极小值点和一个极大值点. 【 】

(2)设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有

(A)$a_n<b_n$ 对任意 n 成立.

(B)$b_n<c_n$ 对任意 n 成立.

(C)极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在.

(D)极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在. 【 】

(3)已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续,且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$,则

(A)点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(B)点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

(C)点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点

(D)根据所给条件无法判断点(0,0)是否为 $f(x,y)$ 的极值点. 【 】

(4)设向量组Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,则

(A)当 $r<s$ 时,向量组Ⅱ必线性相关. (B)当 $r>s$ 时,向量组Ⅱ必线性相关.

(C)当 $r<s$ 时,向量组Ⅰ必线性相关. (D)当 $r>s$ 时,向量组Ⅰ必线性相关.

【 】

(5)设有齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=0$,其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵,现有四个命题:

①若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=0$ 的解,则秩$(\boldsymbol{A})\geqslant$秩$(\boldsymbol{B})$;

②若秩$(\boldsymbol{A})\geqslant$秩$(\boldsymbol{B})$,则 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=0$ 的解;

③若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=0$ 同解,则秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\boldsymbol{B})$;

④若秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\boldsymbol{B})$,则 $\boldsymbol{Ax}=0$ 与 $\boldsymbol{Bx}=0$ 同解.

以上命题中正确的是

(A)①②. (B)①③. (C)②④. (D)③④. 【 】

(6)设随机变量 $X\sim t(n)(n>1)$,$Y=\dfrac{1}{X^2}$,则

(A)$Y\sim\chi^2(n)$. (B)$Y\sim\chi^2(n-1)$. (C)$Y\sim F(n,1)$. (D)$Y\sim F(1,n)$. 【 】

三、(本题满分 10 分)

过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线,该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(1)求 D 的面积 A;

(2)求 D 绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

四、(本题满分 12 分)

将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数,并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

五、(本题满分 10 分)

已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$,$L$ 为 D 的正向边界. 试证:

(1)$\oint\limits_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint\limits_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$;

(2)$\oint\limits_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x\geqslant 2\pi^2$.

六、(本题满分 10 分)

某建筑工程打地基时,需用汽锤将桩打进土层. 汽锤每次打击,都将克服土层对桩的阻力而作功. 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比(比例系数为 k,$k>0$),汽锤第一次击打将桩打进地下 a m. 根据设计方案,要求汽锤每次击打桩时所做的功与前一次打时所做的功之比为常数 $r(0<r<1)$. 问

(1)汽锤击打桩 3 次后,可将桩打进地下多深?

(2)若击打次数不限,汽锤至多能将桩打进地下多深?

(注:m 表示长度单位米.)

七、(本题满分 12 分)

设函数 $y=y(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有二阶导数,且 $y'\neq 0$,$x=x(y)$是 $y=y(x)$的反函数.

(1)试将 $x=x(y)$所满足的微分方程$\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$满足的微分方程;

(2)求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0,y'(0)=\frac{3}{2}$的解.

八、(本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$连续且恒大于零,

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\,dv}{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\,d\sigma},G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\,d\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)\,dx},$$

其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}$,$D(t)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2\}$.

(1)讨论 $F(t)$在区间$(0,+\infty)$内的单调性.

(2)证明当 $t>0$ 时,$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$.

九、(本题满分 10 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$,求 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值与特征向量,其中 $\boldsymbol{A}^*$为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵.

十、(本题满分 8 分)

已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1:ax+2by+3c=0,$$
$$l_2:bx+2cy+3a=0,$$
$$l_3:cx+2ay+3b=0.$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$.

十一、(本题满分 10 分)

已知甲、乙两箱中装有同种产品,其中甲箱中装有三件合格品和三件次品,乙箱中仅装有三件合格品.从甲箱中任取三件产品放入乙箱后,求:

(1)乙箱中次品件数 X 的数学期望;

(2)从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

十二、(本题满分 8 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta,\\ 0, & x\leqslant\theta,\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 是未知参数. 从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots X_n$，记 $\hat{\theta}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

(1)求总体 X 的分布函数 $F(x)$；

(2)求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$；

(3)如果用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量，讨论它是否具有无偏性.

需要全本请访问 www.ertongbook.com