中学基础知识与素质教育
ZHONGXUE JICHU ZHISHI YU SUZHI JIAOYU

丛书主编◎吴万用

高中数学
知识点与能力训练手册

ZHISHIDIAN YU NENGLI XUNLIANSHOUCE

马岩峰 杜晓彦◎主编

大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

图书在版编目（悦陨孕）数据

高中数学知识点与能力训练手册 蚰马岩峰，杜晓彦主编 援— 缘版 援— 大连：大连理工大学出版社，圆园园猿援圆

（中学基础知识与素质教育）

陨杂月晕 苑原远猿员原园圆园远源原愿

Ⅰ援高… Ⅱ援①马… ②杜… Ⅲ援数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ援郧远猿源援远园猿

中国版本图书馆 悦陨孕数据核字（圆园园猿）第 园苑缘愿源号

大连理工大学出版社出版

地址：大连市凌水河 邮政编码：员员远园圆源

电话：园源员员原源苑园愿愿园缘 传真：园源员员原源苑园员源远远 邮购：园源员员原源苑园圆远猿远

耘原皂葬蚤造：凿怎贼责枣岳凿造怎贼援藻凿怎援糟灶 哉砸蕴：澡贼贼责：辕辕憎憎憎援凿怎贼责援糟灶

大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：员愿缘皂皂伊圆远园皂皂 印张：圆缘援远猿 字数：远愿愿千字

印数：远园园员～苑远园园

员怨怨愿年远月第员版 圆园园猿年远月第缘版

圆园园猿年远月第愿次印刷

责任编辑：王 纪 责任校对：李艳楠

封面设计：孙宝福 版式设计：宋 蕾

定 价：猿圆援园园元

·目录

•Mu lu

概念篇

规　律　篇

综 合 篇

概念篇

集合与简易逻辑　第　章

一、集　合

知识点剖析

1. 集合

集合是一个不定义的概念或原始概念。对集合，我们只能作描述性说明：一组对象的全体形成一个集合(有时也简称集)。集合里的各个对象叫做这个集合的元素。

例如小于 5 的自然数就形成一个集合，其中 1，2，3，4 都是这个集合的元素。

集合常用大写字母 $A,B,C\cdots$ 表示，元素常用小写字母 $a,b,c\cdots$ 表示。

2. 集合具有以下特征

(1) 确定性：对于一个给定的集合，任何一个对象或者是这个集合中的元素，或者不是它的元素。这是集合的最基本特征。

(2) 互异性：集合中的任何两个元素都是能区分的(即互不相同的)，相同的对象归入任何一个集合时，只能算做这个集合的一个元素。

(3) 无序性：在一个集合中，通常不考虑它的元素之间的顺序，也就是说由 a,b 两个元素组成的集合与 b,a 两个元素组成的集合是相同的。

■ 说明　当集合中的元素可以用省略符号表示时，必须强调顺序，例如：

集合 $\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$

集合 $\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\}$ 等

3. 空集

不含任何元素的集合叫做空集，记作 $\varnothing$。

4. 属于

如果 a 是集合 A 的一个元素，就说 a 属于集合 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$(或 $a\overline{\in}A$)。根据空集的定义，对任何事物 a 都有 $a\notin\varnothing$。

5. 集合的表示法

集合常用的表示法有列举法、描述法与图形法。

把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法，叫列举法，例如 $A=\{$指南针，造纸，火药，印刷$\}$。

把集合中元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做描述法，它的一般形式为 $\{x\mid p(x)\}$，符号前面的 x 表示集合中元素的一般形式，而后面的 $p(x)$ 表示集合元素 x 的公共属性，例如：$A=\{n\mid n\in\mathbf{Z},n<8\}$。在不引起混淆的情况下，为了简便，有些集合用描述法表示时，可省去竖线及左边的部分，例如由所有圆组成的集合，可表示为{圆}。

■ 说明　① 列举法可以看清集合的元素，描述法可以看清集合元素的特征。

② 两种表示法里的“{}”都有“全体”“集合”的含义，因此，{全体整数}中的“全体”二字是多余的，应改为{整数}。

③ 除了用列举法和描述法来表示集合，还可以利用图形表示集合，也可以通过集合的运算来表示集合，例如 $A=\{1,2\}\cup\{2,3\}$。

6. 子集

对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$)。即任意一个 $a\in A\Rightarrow a\in B$，则 $A\subseteq B$，用文氏图表示 $A\subseteq B$，如图 1-1 所示。

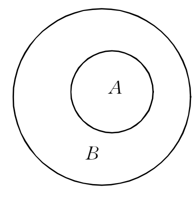


图 1-1

通常用 $\mathbf{N},\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$ 表示自然数集，整数集，有理数集，实数集，复数集，则有 $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}\subseteq\mathbf{C}$。

■ 说明　①“$\in$”和“$\subseteq$”有重要的区别。“$\in$”(属于)是不定义的，体现元素与集合间关系，例如 $a\in A$，其中 a 为集合 A 中的元素(尽管 a 本身也可能是一个集合)；而“$\subseteq$”(包含)体现集合与集合间关系，是通过“$\in$”

定义的，例如$\{a,b\} \subseteq \{a,b,c\}$。

②$\varnothing$ 是任何集合的子集，设 A 为任一集合，则 $\varnothing \subseteq A$。

③ 任何一个集合是它本身的子集，即 $A \subseteq A$

④$A \subseteq B, B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$。

7. 真子集

如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫集合 B 的真子集，记作 $A \subsetneqq B$（或 $B \supsetneqq A$）。即任意一个 $a \in A \Rightarrow a \in B$ 且存在 $b \in B$ 且 $b \notin A$，则 $A \subsetneqq B$。例：$\mathbf{N} \subsetneqq \mathbf{Z} \subsetneqq \mathbf{Q} \subsetneqq \mathbf{R} \subsetneqq \mathbf{C}$；设 A 为非空集合，则 $\varnothing \subsetneqq A$；若 $A \subsetneqq B$，且 $B \subsetneqq C$，则 $A \subsetneqq C$。

8. 集合相等

对于两个集合 A 与 B，如果 $A \subseteq B$，同时 $B \subseteq A$，我们就说这两个集合相等。即如果任意一个 $a \in A \Rightarrow a \in B$；任意一个 $x \in B \Rightarrow x \in A$，则 $A = B$。例如同解方程与同解不等式，其实质就是集合相等。

9. 交集

设有 A, B 两个集合，由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A, B 的交集，记作 $A \cap B$，即 $A \cap B = \{x | x \in A$ 且 $x \in B\}$。也就是说，A 与 B 的交集是由 A 与 B 的所有公共元素组成的集合。由交集定义可以推出以下几条性质：

(1)$A \cap A = A$；

(2)$A \cap \varnothing = \varnothing$；

(3)$A \cap B = B \cap A$。

其证明如下：

(1)$A \cap A = \{x | x \in A$ 且 $x \in A\}$

$= \{x | x \in A\} = A$

(2) 因 $A \cap \varnothing \subseteq \varnothing$（引用 $A \cap B \subseteq B$）

$\varnothing \subseteq A \cap \varnothing$（空集为任何集合的子集）

故 $A \cap \varnothing = \varnothing$（集合相等的定义）

(3)$A \cap B = \{x | x \in A$ 且 $x \in B\} = \{x | x \in B$ 且 $x \in A\} = B \cap A$

10. 并集

由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A, B 的并集，记作 $A \cup B$，即 $A \cup B = \{x | x \in A$ 或 $x \in B\}$。对于并集，要注意其中"或"的意义，用它连接的并列成分间不一定是互相排斥的，"$x \in A$ 或 $x \in B$"这一条件，包括下列三种情况：$x \in A$ 但 $x \notin B$；$x \in B$ 但 $x \notin A$；$x \in A$ 且 $x \in B$（很明显，适合第三种情况的元素 x 构成的集合就是 $A \cap B$，它不一定是空集）。还要注意，A 与 B 的公共元素在 $A \cup B$ 中只出现一次，因此，$A \cup B$ 是由所有至少属于 A, B 两者之一的元素组成的集合。

联系交集、子集和并集的定义有

$A \cap B \subseteq A$（或 B）$\subseteq A \cup B$

由并集定义可以推出以下性质：

(1)$A \cup A = A$

(2)$A \cup \varnothing = A$

(3)$A \cup B = B \cup A$

11. 补集

补集是相对于全集而言的。全集是相对于所研究的问题而言的一个相对概念，它含有与所研究问题有关的各个集合的全部元素，因此全集因研究问题而异，记作 U。例如研究数集时，常常把实数集 $\mathbf{R}$ 作为全集。在立体几何中，三维空间是全集，这时，平面是全集的一个子集。而在平面几何中，整个平面是全集。

补集：已知全集 U，集合 $A \subseteq U$，由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在集合 U 中的补集，记作 C_UA，即

$C_UA = \{x | x \in U$ 且 $x \notin A\}$ 如图 1-2 所示。

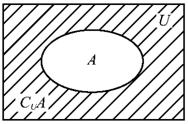


图 1-2

补集可以这样解释，如果从全集 U 中取出集合 A 的全部元素，则所有剩余下来的元素组成的集合就是 C_UA，由此，我们很容易想起"差"的概念，事实上，补集 C_UA 就是全集 U 与集合 A 的差集（如图 1-2）。

由补集定义可推出以下简单性质：

(i)$A \cup C_UA = U$

(ii)$A \cap C_UA = \varnothing$

(iii)$C_U(C_UA) = A$

12. 不等式的几个基本性质

(1) 如果 $a > b$，那么 $a + c > b + c$

(2) 如果 $a > b, c > 0$，那么 $ac > bc$

(3) 如果 $a > b, c < 0$，那么 $ac < bc$

以上不等式的基本性质是解不等式的基础。

13. $|x| < a$，$|x| > a$ 型的不等式（其中 $a \in \mathbf{R}$）

(1)$|x| < a$ 型($a \in \mathbf{R}$)

① 当 $a > 0$ 时，由绝对值意义可知它等价于一个一元一次不等式组，即 $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

② 当 $a \leqslant 0$ 时，$|x| < a$ 无解，而此时，不等式 $-a < x < a(a \leqslant 0)$ 也无解（因 $a > -a$，而 $a < 0$，故无解）。

由 ①② 可知：$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ 恒成立，其中 $a \in \mathbf{R}$。

(2)$|x| > a$ 型($a \in \mathbf{R}$)

同理，$|x| > a \Leftrightarrow x > a$ 或 $x < -a$，其中 $a \in \mathbf{R}$。其证明如下：

① 当 $a > 0$ 时，$|x| > a$，由绝对值意义可知 $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ 或 $x < -a$。

② 当 $a < 0$ 时，$|x| > a$ 的解集为 $\mathbf{R}$，而此时，$x > a$ 或 $x < -a$ 的并集也为 $\mathbf{R}$。如图 1-3。

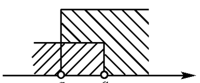


图 1-3

③ 当 $a = 0$ 时，$|x| > a$，即 $|x| > 0$，$\therefore x \neq 0$。

而此时，$x > a$ 或 $x < -a$，即 $x > 0$ 或 $x < 0$，即 $x \neq 0$。

综上所述，$|x|>a \Longleftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$，其中 $a\in \mathbf{R}$。

一般地，不等式 $|x|<a$ 的解集是 $\{x|-a<x<a\}$；不等式 $|x|>a$ 的解集是 $\{x|x>a$ 或 $x<-a\}$，其中 $a\in \mathbf{R}$。

14. $|ax+b|<c$，$|ax+b|>c$ **型不等式**（$c\in \mathbf{R}$）

把 $ax+b$ 看成一个整体时，可化为 $|x|<c$，$|x|>c$ 型不等式来解。

一般地，不等式 $|ax+b|<c$ 的解集是 $\{x|-c<ax+b<c\}$，据此，再求原不等式的解集；不等式 $|ax+b|>c$ 的解集是 $\{x|ax+b>c$ 或 $ax+b<-c\}$，据此再求原不等式的解集（其中 $c\in \mathbf{R}$）。

15. **一元二次不等式**

含有一个未知数并且未知数的最高次数是二次的不等式叫做一元二次不等式，它的一般形式是 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0(a\neq 0)$，其中 ax^2+bx+c 是实数域上的二次三项式。

16. **一元二次不等式的解法**

(1) 当 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$ 时，二次三项式 ax^2+bx+c 有两个实根 x_1,x_2，那么 ax^2+bx+c 总可以分解为：$a(x-x_1)(x-x_2)$。这样，解一元二次不等式就可归结为解两个一元一次不等式组。一元二次不等式的解集就是这两个一元一次不等式组解集的并集。

(2) 当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，ax^2+bx+c 总可以写成 $a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}]$，而 $[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}]$ 永远为正值，所以二次三项式 ax^2+bx+c 的值的正负号取决于二次项系数 a，如果 $a>0$，那么不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是实数集 $\mathbf{R}$，如果 $a<0$，那么不等式 $ax^2+bx+c>0$ 无解，它的解集是空集。

利用二次函数的图象，也可以求得一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$（或 $ax^2+bx+c<0$）的解集（其中 $a>0$），其解集情况讨论如下：

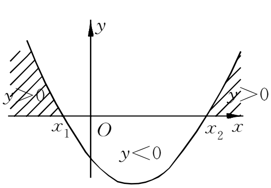


图 1-4

① 如果 $\Delta>0$，此时抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有两个交点（如图 1-4），即方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两相异实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$。那么不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x|x<x_1$ 或 $x>x_2\}$；不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是 $\{x|x_1<x<x_2\}$。

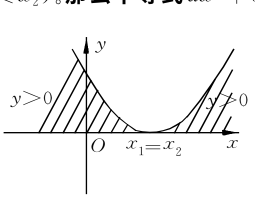


图 1-5

② 如果 $\Delta=0$，此时抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴只有一个交点（图 1-5），即方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等实根 $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$，那么，不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x|x<\frac{-b}{2a}$ 或 $x>\frac{-b}{2a}\}$，也即 $\{x|x\in \mathbf{R}$ 且 $x\neq\frac{-b}{2a}\}$；不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是空集 $\varnothing$。

③ 如果 $\Delta<0$ 时，此时抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴没有交点（如图 1-6）即方程 $ax^2+bx+c=0$ 无实根，那么不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为空集 $\varnothing$。

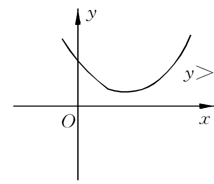


图 1-6

二次项系数为负的不等式可先化为二次项系数为正的不等式，再求它的解集。

品牌题解析

（一）基础题（判断题）

1. 与 1 非常接近的全体实数构成一个集合。（×）

2. 很著名的科学家的全体。（×）

在 1，2 中的“非常接近”及“很著名”皆不满足集合的确定性这一性质，即任给一个元素都可判断其是否在此描述的对象中。

3. 某班的全体女同学构成一个集合。（√）

4. 某班视力较差的学生。（×）

应注意 3 与 4 的重要区别在于限定词是否起到了作用，虽然皆有“某”这一限定词，但在 4 中再一次出现了“较差”这一“含糊”词。

5. $M=\{1,2\}$ 与 $N=\{2,1\}$ 表示同一个集合。（√）

6. $M=\{(1,2)\}$ 与 $N=\{(2,1)\}$ 表示同一个集合。（×）

5 正确是因为集合具有无序性，而 5 与 6 的重要区别在于集合中元素的类别不同即 5 表示的为数集而 6 表示的为点集。

7. $a\in\{a,b\}$ 及 $\{a\}\subsetneqq\{a,b\}$ 关系判断都正确。（√）

8. $\{a\}\subseteq\{\{a\},\{b\}\}$。（×）

应注意的是关系的相对性。（参照物）

9. 设 $A=\{a,b\}$ 且 $B=\{x|x\subseteq A\}$，则 $A\subseteq B$。（×）

应为 $A\in B$。

10. 若 $\{a,b\}\subseteq A\subsetneqq\{a,b,c,d,e\}$，则满足条件的集合 A 的个数为 7 个。（√）

做此题前首先应明确含有 n 个元素的集合其子集的个数为 2^n 个，其真子集及非空真子集的个数分别为 2^n-1、2^n-2 个，再次应了解“$\subseteq$”与“$\leqslant$”、“$\subsetneqq$”与“$<$”的辨证统一关系，因此 A 集合的个数与 $\{c,d,e\}$ 真子集的个数相同，即 $2^3-1=7$ 个。

11. 空集没有子集。（×）

12. 空集是任何集合的真子集。（×）

13. 任何集合必有两个或两个以上的子集。（×）

14. 用列举法表示集合时，只能表示有限集而不能表示无限集。(×)

11,12,13 皆可取 $\varnothing$ 作反例，因为 $\varnothing\subseteq\varnothing$，所以 11 错；空集为任何集合的子集且又为任何非空集合的真子集，故 12,13 错；所有圆所构成的集合{圆}为无限集，但其却是用列举法表示的集合，故 14 错。

（二）高考题

【例 1】 1998 年上海市高考试题 设全集为 $\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x^2-5x-6>0\}$，$B=\{x\mid |x-5|<a\}$（a 是常数），且 $11\in B$，则（　　）。

A. $\overline{A}\cup B=\mathbf{R}$　　B. $A\cup\overline{B}=\mathbf{R}$

C. $\overline{A}\cup\overline{B}=\mathbf{R}$　　D. $A\cup B=\mathbf{R}$

解　$A=\{x\mid x<-1$ 或 $x>6\}$，又因 $11\in B$，故 B 不是 $\varnothing$，所以 $a>0$，$B=\{x\mid 5-a<x<5+a\}$，又因 $11\in B$，故 $6<a$，所以 $A\cup B=\mathbf{R}$，故选 D。

【例 2】 2001 年北京市春招试题 集合 $M=\{1,2,3,4,5\}$ 的子集个数是（　　）。

A. 32　B. 31　C. 16　D. 15

解　含有 n 个元素的子集个数为 2^n 个，故选 A。

【例 3】 1996 年全国高考试题 已知全集 $I=\mathbf{N}$，集合 $A=\{x\mid x=2n,n\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x\mid x=4n,n\in\mathbf{N}\}$，则（　　）。

A. $I=A\cup B$　　B. $I=\overline{A}\cup B$

C. $I=A\cup\overline{B}$　　D. $I=\overline{A}\cup\overline{B}$

解　由已知易知 $B\subsetneqq A$。

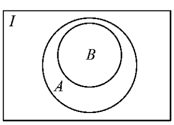


图 1-7

方法一　列举法 $A=\{0,2,4,6,\cdots\}$，$B=\{0,4,8\cdots\}$

方法二　描述法（抽象代换法）A：$x=2n,n\in\mathbf{N}$，B：$x=2\cdot(2n)=2\cdot m$，其中 $m\in\{$非负偶数$\}$，$\therefore A\cup\overline{B}=I$，故选 C。

【例 4】 1996 年上海市高考试题 已知集合 $M=\{(x,y)\mid x+y=2\}$，$N=\{(x,y)\mid x-y=4\}$，那么集合 $M\cap N$ 为（　　）。

A. $x=3,y=-1$　　B. $(3,-1)$

C. $\{3,-1\}$　　D. $\{(3,-1)\}$

解　$M\cap N$ 应为一个集合，$\therefore$ A,B 排除，又 $\because M,N$ 都是点集，$\therefore M\cap N$ 也应为点集，而 C 为数集，故选 D。

【例 5】 1999 年上海市高考试题 设集合 $A=\{x\mid |x-a|<2\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{2x-1}{x+2}<1\right\}$。若 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围。

解　由 $\dfrac{2x-1}{x+2}<1\Rightarrow\dfrac{2x-1}{x+2}-1<0$

$\Rightarrow\dfrac{2x-1-x-2}{x+2}<0\Rightarrow\dfrac{x-3}{x+2}<0$

$\Rightarrow$

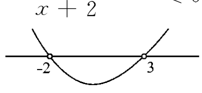


图 1-8

$\therefore -2<x<3$

由 $|x-a|<2$ 得 $a-2<x<a+2$，又 $\because A\subseteq B$

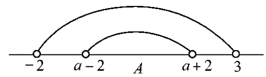


图 1-9

$\therefore$ 只须 $\left\{\begin{array}{l}a-2\geqslant-2\Rightarrow a\geqslant 0\\ a+2\leqslant 3\Rightarrow a\leqslant 1\end{array}\right.$

综上所述，有 $0\leqslant a\leqslant 1$

■ **说明**　靠集合间的相互关系求解参变量范围的问题的一般求解过程如下：

① 谁能具体先表示；

② 数形结合找关系；

③ 列出不等式（依关系）；

④ 求解不等式。

光标提醒　在演题中我们经常忽略 $\varnothing$ 是任何集合的子集这一十分重要的隐条件。

备注　求解分式不等式的一般步骤如下：

1) 移项；2) 通分；3) 整理；4) 分解因式；5) 拟数轴标根（对照本题）。1) 使不等式的一端为零；3) 使分子分母的最高次项均变为正数；5) 方法 $\left\{\begin{array}{l}\text{从右向左}\\\text{从上到下}\end{array}\right.$ 特别注意开与闭。

（三）备考题例

【例 1】 集合 $A=\left\{x\in\mathbf{Z}\,\middle|\,\dfrac{6}{3-x}\in\mathbf{N}^*\right\}$ 用列举法表示（　　）。

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{-3,-1,0,1,2\}$

C. $\{-3,0,1,2\}$　　D. $\{-2,-1,1,2\}$

解　设 $\dfrac{6}{3-x}=m\in\mathbf{N}^*$，$\therefore\dfrac{6}{m}=3-x$，$\therefore m$ 应为 6 的正约数，$\therefore m=1,2,3,6$，$\therefore$ 对应 $x=-3,0,1,2$，故选 C。

【例 2】 已知 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x>2+\sqrt{3}\}$，$a=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$，则（　　）。

A. $a\subseteq A$　B. $\{a\}\in A$　C. $a\in C_UA$　D. $a\in A$

解　$a=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$，$\therefore a\notin A\Leftrightarrow\{a\}\not\subseteq A\Leftrightarrow a\in C_UA$，故选 C。

【例 3】 集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid x^2-px+15=0\}$，$B=\{x\in\mathbf{Z}\mid x^2-5x+q=0\}$，若 $A\cup B=\{2,3,5\}$，则 A、B 依次是（　　）。

A. $\{3,5\},\{2,3\}$　　B. $\{2,3\},\{3,5\}$

C. $\{2,5\},\{3,5\}$　　D. $\{3,5\},\{2,5\}$

解　$\because A\cup B=\{2,3,5\}$，且 $15\neq n^2$，$\dfrac{5}{2}\neq n$ $(n=2,3,5)$，$\therefore A=\{x_1,x_2\}$ 且 $B=\{x_2,x_3\}$，即 $x_1\cdot x_2=15$，$x_2+x_3=5$ 且 $x_1,x_2,x_3\in A\cup B$，$\therefore x_1=5$ 且 $x_2=3$

且 $x_3=2$，∴ $A=\{3,5\}$，$B=\{2,3\}$，故选 A。

【例 4】　设 $A=\{x\,|\,|x-2|<3\}$，$B=\{x\,|\,|x-1|>1\}$，则 $A\cap B=$（　　）。

A. $\{x\,|-1<x<5\}$

B. $\{x\,|x<0$ 或 $x>2\}$

C. $\{x\,|-1<x<0\}$

D. $\{x\,|-1<x<0$ 或 $2<x<5\}$

解

$A\cap B$

$=\left\{\begin{array}{l}|x-2|<3\Rightarrow -3<x-2<3\Rightarrow -1<x<5\\ |x-1|>1\Rightarrow x-1<-1 \text{ 或 } x-1>1\Rightarrow x<0 \text{ 或 } x>2\end{array}\right\}$

$\Rightarrow -1<x<0$ 或 $2<x<5$，故选 D。

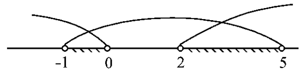


图 1-10

【例 5】　已知 $|x-a|<b$ 的解集为 $\{x\,|-3<x<9\}$，则 a,b 的值分别是（　　）。

A. $-3,9$　　B. $3,6$　　C. $3,9$　　D. $-3,6$

解　$|x-a|<b\Rightarrow -b<x-a<b\Rightarrow a-b<x<a+b$，又 ∵ 解集为 $\{x\,|-3<x<9\}$

∴ $\begin{cases}a-b=-3\\a+b=9\end{cases}$　解得　$\begin{cases}a=3\\b=6\end{cases}$

故选 B。

【例 6】　$-3<4x-4x^2\leqslant 0$ 的解集为（　　）。

A. $\left\{x\,|x\leqslant -\dfrac{1}{2} \text{ 或 } x\geqslant \dfrac{3}{2}\right\}$

B. $\left\{x\,|-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}\right\}$

C. $\{x\,|x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1\}$

D. $\left\{x\,|-\dfrac{1}{2}<x\leqslant 0 \text{ 或 } 1\leqslant x<\dfrac{3}{2}\right\}$

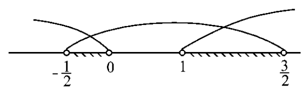


图 1-11

解　原不等式等价于 $0\leqslant 4x^2-4x<3$，即

$\left\{\begin{array}{l}4x^2-4x\geqslant 0\Rightarrow x\leqslant 0 \text{ 或 } x\geqslant 1\\ 4x^2-4x-3<0\Rightarrow -\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow$

$-\dfrac{1}{2}<x\leqslant 0$ 或 $1\leqslant x<\dfrac{3}{2}$，故选 D。

品牌题训练

（一）选择题

1. 下列各条件中不能确定一个集合的是（　　）。

A. 充分接近 $\sqrt{2}$ 的实数的全体

B. 某校身高不超过 1.7 m 的全体学生

C. 数轴上到原点的距离不超过一个单位的点的全体

D. 小于 100 的所有质数

2. 方程组 $\begin{cases}2x+y+6=0\\x-y+3=0\end{cases}$ 的解集是（　　）。

A. $\{(-3,0)\}$　　B. $\{-3,0\}$

C. $(-3,0)$　　D. $\{(0,-3)\}$

3. 集合 $A=\{$一条边为 1，一个角为 $40°$ 的等腰三角形$\}$ 中元素的个数为（　　）。

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 无数个

4. 设全集 $U=\mathbf{R}$，$M=\{a\,|a=x+\sqrt{2}y,x,y\in\mathbf{Q}\}$，则下列结论正确的是（　　）。

A. $M\subseteq\mathbf{Q}$　　B. $M\subseteq C_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$

C. $M\supsetneqq\mathbf{Q}$　　D. $M=\mathbf{Q}$

5. 全集 $U=\{a,b,c,d,e\}$，$N=\{b,d,e\}$，$M=\{a,c,d\}$，则 $C_U(M\cup N)$ 等于（　　）。

A. $\varnothing$　　B. $\{d\}$　　C. $\{a,c\}$　　D. $\{b,e\}$

6. 不等式 $x+2-x^2<0$ 的解集为（　　）。

A. $\{x\,|x<-1$ 或 $x>2\}$

B. $\{x\,|-1<x<2\}$

C. $\{x\,|-2<x<-1\}$

D. $\{x\,|x<-2$ 或 $x>1\}$

7. 绝对值大于 2 且不大于 5 的最小整数是（　　）。

A. $\varnothing$　　B. 2　　C. -2　　D. -5

8. 不等式 $3\leqslant |x|\leqslant 7$ 的解集是（　　）。

A. $3\leqslant x\leqslant 7$

B. $-7\leqslant x\leqslant -3$

C. $-7\leqslant x\leqslant -3$ 或 $x\geqslant 7$

D. $-7\leqslant x\leqslant -3$ 或 $3\leqslant x\leqslant 7$

9. 不等式 $(x+2)(3-x)>0$ 的解集为（　　）。

A. $\{x\,|x>3$ 或 $x<-2\}$　　B. $\{x\,|-3<x<2\}$

C. $\{x\,|x>2$ 或 $x<-3\}$　　D. $\{x\,|-2<x<3\}$

10. 集合 $A=\{a^2,a+1,-3\}$，集合 $B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，若 $A\cap B=\{-3\}$，则 a 的值是（　　）。

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. -1

11. 不论 x 为何值时，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 恒为负值的条件为（　　）。

A. $a>0,\Delta>0$　　B. $a>0,\Delta<0$

C. $a<0,\Delta<0$　　D. $a<0,\Delta>0$

12. 若不等式 $5-x>7|x+1|$ 与不等式 $ax^2+bx-2>0$ 的解集相同，则 a,b 的值分别为（　　）。

A. $a=-8,b=-10$　　B. $a=-1,b=9$

C. $a=-4,b=9$　　D. $a=-1,b=2$

（二）填空题

13. $A=\{(x,y)\,|ax-y^2+b=0\}$，$B=\{(x,y)\,|x^2-ay-b=0\}$，已知 $A\cap B\supseteq\{(1,2)\}$，则 $a=$ ________，$b=$ ________。

14. 已知 $A=\{x\,|x^2+(a+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，则 a 的取值范围为________。

15. 若关于 x 的方程 $x^2+ax+a^2-1=0$ 有一正根一负根，则 a 的取值范围为________。

16. 若三个关于 x 的一元二次方程 $x^2+4ax-4a+$

$3=0, x^2+(a-1)x+a^2=0, x^2+2ax-2a=0$ 中至少有一个方程有实根，则实数 a 的取值范围是_________。

【参考答案与提示】

（一）选择题

1.A　2.A　3.C　4.C　5.A　6.A　7.D　8.D
9.D　10.D　11.C　12.C

（二）填空题

13. $-3, 7$　14. $a>-4$

15. $-1<a<1$　16. $a\leqslant -\frac{3}{2}$ 或 $a\geqslant -1$

提示：

4.（易错题）当 $y=0$ 时集合 $M=Q$，此外当 $y\neq 0$ 时集合 M 也包含一部分无理数。

7.（易错题）设此数为 m，依题意则有 $2<|m|\leqslant 5$

10. $A\cap B=\{-3\}$，故有 $-3\in A$ 且 $-3\in B$

即 $\begin{cases} a-3=-3\Rightarrow a=0 \\ 2a-1=-3\Rightarrow a=-1 \\ a^2+1=-3\Rightarrow a\in\varnothing \end{cases}$

当 $a=0$ 时，$A=\{0,1,-3\}$，$B=\{-3,-1,1\}$，$A\cap B=\{0,1\}$，$\therefore a=0$（舍）

当 $a=-1$ 时，$A=\{1,0,-3\}$，$B=\{-4,-3,2\}$，$A\cap B=\{-3\}$，$\therefore a=-1$ 满足题意。

综上可知 $a=-1$。

12. $5-x>7|x+1|$

$\Rightarrow 7|x+1|<5-x$

$\Rightarrow\begin{cases} 5-x>0 \\ -(5-x)<7(x+1)<5-x \end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases} 5-x>0 \\ 7x+7<5-x \\ 7x+7>x-5 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x<5 \\ x<-\frac{1}{4} \\ x>-2 \end{cases}$

$\Rightarrow -2<x<-\frac{1}{4}$

又 $\because$ 两不等式的解集相同故不等式 $ax^2-bx-2>0$ 的解集应为 $\left\{x\mid -2<x<-\frac{1}{4}\right\}$ 故则有 -2，$-\frac{1}{4}$ 为二次方程 $ax^2-bx-2=0$ 的两实根且 $a<0$，由韦达定理可知 $\begin{cases} -2+\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{b}{a} \\ -2\times\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{2}{a} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=-4 \\ b=9 \end{cases}$

13. $\because A\cap B\supseteq\{(1,2)\}$，$\therefore (1,2)\in A$ 且 $(1,2)\in B$，$\therefore \left.\begin{cases} a-4+b=0 \\ 1-2a-b=0 \end{cases}\right\}\Rightarrow\begin{cases} a=-3 \\ b=7 \end{cases}$

14. 若 $A\cap \mathbf{R}^+=\varnothing$，则 A 有两类情形，(1) A 为 $\varnothing$，(2) 集合 A 中的元素均为非正数，倘若 $0\in A$，则有 $1=0$，显然不成立故集合 A 中元素皆为负数。

解法一　(1) A 为 $\varnothing$ 即 $\Delta<0$ 或 (2) $\begin{cases} \Delta\geqslant 0 \\ x_1+x_2<0 \\ x_1\cdot x_2>0 \end{cases}$

解法二　图象法（数形结合法）

即　$f(对)>0$ 或 $\begin{cases} f(对)\leqslant 0 \\ 对<0 \\ f(0)>0 \end{cases}$

其中：$f(x)=x^2+(a+2)x+1$

$对=-\frac{a+2}{2}$

15. 解法一　$\begin{cases} \Delta>0 \\ x_1\cdot x_2<0 \end{cases}$

解法二　$f(0)<0$

其中 $f(x)=x^2+ax+a^2-1$

16. 设 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 分别为一元二次方程 $x^2+4ax-4a+3=0$，$x^2+(a-1)x+a^2=0$，$x^2+2ax-2a=0$ 的判别式，依题意只须 $\Delta_1\geqslant 0$ 或 $\Delta_2\geqslant 0$ 或 $\Delta_3\geqslant 0$ 即可。

二、简易逻辑

知识点剖析

（一）逻辑联结词

1. 命题

初中数学中命题的概念为“判断一件事情的句子”，高中教材中定义为：“可以判断真假的语句”。其实质是一样的。语句是不是命题的关键在于能不能判断其真假，不能判断真假的语句就不是命题。

2. 开语句

有些语句无法确定其真假，如 $x<2$，这种含有变量的语句叫开语句（或条件命题）。

3. 逻辑联结词

“或”、“且”、“非”这些词叫逻辑联结词。记做：“$\vee$”、“$\wedge$”、“$\neg$”。

4. 简单命题

不含逻辑联结词的命题叫做简单命题，记作：$p, q, r, s, \cdots$（小写拉丁字母）。

5. 复合命题

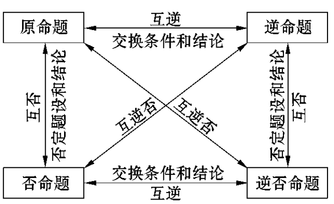
由简单命题与逻辑联结词构成的命题叫做复合命题。

■ **说明**　① 构成：“$p\vee q$”，“$p\wedge q$”，“$\neg p$”。
② 真值表

p	q	$p\vee q$	$p\wedge q$	$\neg p$
T	T	T	T	F
T	F	T	F	F
F	T	T	F	T
F	F	F	F	T

（二）四种命题

1. 四种命题及关系



■ 说明　(1) 互逆否的两个命题是等价命题。

原命题$\xLeftrightarrow{\text{等价于}}$逆否命题

逆命题$\xLeftrightarrow{\text{等价于}}$否命题

(2) 当判断一个否定性命题的真假性发生困难时，通常转化为判断它的逆否命题的真假。

2. 反证法

用反证法证明命题的一般步骤如下：

(1) 假设命题的结论不成立，即假设结论的反面成立。

(2) 从这个假设出发，经过推理论证得出矛盾。

(3) 由矛盾判定假设不正确，从而肯定命题的结论正确。

■ 说明　三种矛盾：

① 与原命题条件矛盾；

② 与假设结论矛盾；

③ 与某定理、公理、定义或公式等矛盾。

(三) 充分条件和必要条件

1. 充要条件

条件 A 与条件 B 的充分性与必要性关系，由定义判断方法简述如下：

(1)$A\Rightarrow B$，且 $B\nRightarrow A$，则 A 是 B 的充分非必要条件。

(2)$A\nRightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$，则 A 是 B 的必要非充分条件。

(3)$A\Leftrightarrow B$，则 A 是 B 的充分且必要条件。

(4)$A\nRightarrow B$ 且 $B\nRightarrow A$，则 A 是 B 的既非充分也非必要条件。

2. 对于否定形式的命题，常根据原命题与其逆否命题的等价性（即 $A\Rightarrow B$ 等价于 $\neg B\Rightarrow\neg A$）进行判断

例如，命题：“$x\neq 1$ 则 $x^2\neq 1$”。问：$x\neq 1$ 是 $x^2\neq 1$ 的什么条件？

此命题等价于：“若 $x^2=1$ 则 $x=1$”即“$x^2=1$ 是 $x=1$ 的什么条件？”易知答案为必要非充分条件。

品牌题解析

(一) 基础题(判断题)

1.“小李的学习成绩非常优秀”是命题。(×)

2.“正三角形难道不是等腰三角形吗？”是命题。(√)

3.“圆是中心对称图形吗？”是命题。(×)

由命题的定义即可以判断真假的语句。1. 多么优秀才算“非常优秀”；2.“难道不是 …… 吗？”即是；3. 回答有两种情况：(1) 是；(2) 不是，故不可判断。

4. 如果命题 p 为真，命题 q 为假，则 p 或 q 为真。(√)

5. 如果命题“p 或 q”为真，则命题 p 或命题 q 中至少有一个为真。(√)

6. 原命题为真，则其逆否命题也为真。(√)

7. 原命题为假，则其逆命题为真。(×)

8. 原命题为真，则其否命题不一定为真。(√)

9. $A\Rightarrow B$，则 B 是 A 成立的充分条件。(×)

10. $A\Leftarrow B$，则 A 是 B 成立的必要而不充分条件。(√)

11. $A=\{x|1<x<5\}$，$B=\{x|x>1$ 且 $x\neq 3\}$，则 $A\Rightarrow B$。(×)

12. $A=\{x|1<x<5\}$，$B=\{1<x\leqslant 5\}$，则 $A\Rightarrow B$。(√)

(二) 类比透析

【例 1】　$a\neq 1$ 或 $b\neq 2$ 是 $a+b\neq 3$ 成立的什么条件？

否式命题不易看，则看其逆否命题，因原命题与其逆否命题具有等价性。另一方面否定时也要注意其逻辑联结词的否定。(1) 是 ～ 非；(2) 任意 ～ 存在(有)；(3) 且 ～ 或；(4) 全(都) 是 ～ 不全是(至少有一个不是)，故其逆否命题为 $a+b=3\Leftarrow a=1$ 且 $b=2$，$\therefore$ $a\neq 1$ 或 $b\neq 2\Leftarrow a+b\neq 3$。故为必要非充分条件。

【例 2】　$A=\{x|2<x\leqslant 3\}$，$B=\{x|2\leqslant x\leqslant 3\}$，则 A 是 B 成立的什么条件？

想一想小范围 $\overset{?}{\Rightarrow}$大范围，小范围 $\overset{?}{\Leftarrow}$大范围。

答　小范围$\underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow}$大范围

“是男人”$\Rightarrow$“是人”，若称男人为小范围，从而可知“小范围”$\underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow}$“大范围”，特别值得注意的是“小范围”$\subsetneqq$“大范围”。

本题中的 $A\subsetneqq B$，故 $A\Rightarrow B$，$\therefore$ A 是 B 成立的充分而非必要条件。

■ 说明　关于条件的判断可借助下面准则。

谁是条件谁在前；“$\Rightarrow$”充分，“$\Leftarrow$”必要。

【例 3】　$a>\dfrac{1}{a}$ 成立的必要但不充分条件是(　　)。

A. $a>-1$　　B. $-1<a<0$

C. $-1<a<0$ 或 $a>1$　　D. $a<-1$ 或 $a>1$

不等式 $a>\dfrac{1}{a}$ 的解法，移、通、整、分、根。

(1)$a-\dfrac{1}{a}>0$　(2) $\dfrac{a^2-1}{a}>0$　(3) 略

(4) $\dfrac{(a-1)(a+1)}{a}>0$

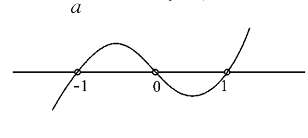
(5) 

图 1-12

$\therefore$ $-1<a<0$ 或 $a>1$，又 $\because$ 由题意可知选项是条件，$\therefore$ 条件应在前，即$\underset{(\text{大})}{\text{选项}}\Leftarrow\underset{(\text{小})}{\text{已知}}$，故选 A。

【例 4】　若 $a,b,c\in\mathbf{R}$，则 $b^2-4ac<0$ 是 $ax^2+bx+c>0$ 恒成立的什么条件？

A. 充分但不必要条件

B. 必要但不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分，也不必要

$ax^2+bx+c>0$ 恒成立 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}a>0\\ \Delta=b^2-4ac<0\end{cases} \text{或} \begin{cases}a=b=0\\ c>0\end{cases}$$

故选 D。

【例 5】 p 是 m 的充分条件，N 是 m 的必要条件，q 是 p 的充分条件，N 是 q 成立的充分条件，则 m 是 N 成立的什么条件。

依题意将 $p\Rightarrow m\Rightarrow N\Rightarrow q\Rightarrow p\Rightarrow m$。

故 m 是 N 成立的充要条件。

■ 说明　由 $A\Rightarrow\cdots\Rightarrow A$，则 $A\sim A$ 之间全是充要条件。

（三）备考题例

【例 1】 若命题 M 的否命题是命题 N 的逆否命题，则命题 M 是 N 的(　　)。

A. 逆命题

B. 否命题

C. 逆否命题

D. 命题 M 与 N 是同一个命题

解　设 M 为“若 A 则 B”型，则 M 的否命题为“若非 A 则非 B”，即为 N 的逆否命题，故命题 N 为“若 B 则 A”型。因此，此题选 A。

【例 2】 下列说法中正确的是(　　)。

①“$x^2\neq 1$”是“$x\neq 1$”的充分不必要条件

②“$x>4$”是“$x>5$”的必要不充分条件

③“$xy=0$”是“$x=0$ 且 $y=0$”的充要条件

④“$x^2<4$”是“$x<2$”的既不充分又不必要条件

A. ①②　B. ③④　C. ①③　D. ②④

解　① 否式命题不易分析，则看其逆否命题，即“$x=1$”$\Rightarrow$“$x^2=1$”，故正确。② 由小范围可推大范围，而反之不成立，故正确。③ 必要非充分。④“前小”“后大”故应为充分非必要，故此题选 A。

【例 3】 在下列说法中正确的是(　　)。

① 原命题为真，它的否命题为假

② 原命题为真，它的逆命题不一定为真

③ 一个命题的逆命题为真，它的否命题一定为真

④ 一个命题的逆否命题为真，它的否命题一定为真

A. ①②　　B. ②③　　C. ③④　　D. ②③④

解　原命题与其逆否命题具有等价性，逆命题与其否命题具有其等价性，且四种命题间只有以上两种绝对关系。因此 ① ×，②√，③√，④ ×，故选 B。

【例 4】 在下列各命题中不正确的命题个数为(　　)。

① 若 $x\in A\cup B$，则 $x\in A$ 且 $x\in B$

② 若 $x\in A\cup B$，则 $x\in A$ 或 $x\in B$

③ 若 $x\notin A$ 或 $x\notin B$，则 $x\notin A\cup B$

④ 若 $x\notin A$ 且 $x\notin B$，则 $x\notin A\cup B$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解　① 若 $x\in A\cup B\Leftrightarrow x\in A$ 或 $x\in B$（大），则 $x\in A$ 且 $x\in B$（小），∴ ×；②√；③ 等价于若 $x\in A\cup B$，则 $x\in A$ 且 $x\in B$，∴ ×；④√；故选 B。

【例 5】 设 A,B,C 是三个命题，如果 A 是 B 的充要条件，而 C 是 A 的充分不必要条件，那么 B 是 C 的(　　)。

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

解　依题意可知 $A\Leftrightarrow B, C\Rightarrow A$，∴ $C\Rightarrow A\Leftrightarrow B$，∴ $C\Rightarrow B$ 即 $B\Leftarrow C$，∴ B 是 C 的必要而非充分条件，故选 B。

【例 6】 “M 不是 P 的子集”的充要条件是(　　)。

A. 若 $x\in M$，则 $x\notin P$

B. 若 $x\in P$，则 $x\in M$

C. 存在 $x_1\in M$，使 $x_1\in P$，又存在 $x_2\notin P$，使 $x_2\in M$

D. 存在 $x_0\in M$，使 $x_0\notin P$

解　M 是 P 的子集 $\Leftrightarrow\forall\ x\in M$，则 $x\in P$；M 不是 P 的子集 $\Leftrightarrow\exists\ x\in M\quad \text{st}\ x\notin P$，故选 D。

■ 说明　其中 $\forall$ 表示任意；$\exists$ 表示存在；st 表示使得。

【例 7】 关于 x 的方程 $m^2x^2+(2m+1)x+1=0$ 有命题 p：方程有两个不等的实根，命题 q：$m>-\dfrac{1}{4}$，则 p 是 q 的(　　)。

A. 充分而不必要的条件

B. 必要而不充分的条件

C. 充要要件

D. 既不充分也不必要条件

解　命题 $p\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ \Delta=(2m+1)^2-4m^2\times 1>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow m>-\dfrac{1}{4}$ 且 $m\neq 0$（小），命题 q（大），∴ p 是 q 成立的充分而非必要条件，故选 A。

【例 8】 关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是：$\{x|\alpha<x<\beta\}(\alpha<\beta<0)$，则 $x\in\{x|cx^2-bx+a\leqslant 0\}$ 的充要条件是(　　)。

A. $x\in\left\{x|\dfrac{1}{\alpha}\leqslant x\leqslant-\dfrac{1}{\beta}\right\}$

B. $x\in\left\{x|\dfrac{1}{\beta}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{\alpha}\right\}$

C. $x\in\left\{x|x\leqslant-\dfrac{1}{\alpha}\text{ 或 }x\geqslant-\dfrac{1}{\beta}\right\}$

D. $x\in\left\{x|x\leqslant-\dfrac{1}{\beta}\text{ 或 }x\geqslant-\dfrac{1}{\alpha}\right\}$

解　则依题意分析可知 $a<0$ 且 α 与 β 为二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两实根，$\alpha<\beta<0$，又 ∵ $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}>0$，∴ $c<0$，又 ∵ $cx^2-bx+a=0$ 的两实根 x_1,x_2 的关系为 $x_1+x_2=\dfrac{b}{c}=\dfrac{-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=-\dfrac{1}{\alpha}+\left(-\dfrac{1}{\beta}\right)$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{a}{c}=\dfrac{1}{\alpha\cdot\beta}=\left(-\dfrac{1}{\alpha}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{\beta}\right)$，∴ $x_1=-\dfrac{1}{\alpha}$，$x_2=-\dfrac{1}{\beta}$，∵ $c<0$，$\alpha<\beta<0$，∴ 此题选 C。

【例 9】 “不等式 $|x-1|+|x+2|\leqslant a$ 的解集为非空”的充要条件是(　　)。

A. $a<3$　B. $a\geqslant 3$　C. $a>3$　D. $a>-3$

解法一　设 $f(x)=|x-1|+|x+2|$

$$\left.\begin{cases}(\text{i})x\geqslant 1,f(x)=2x+1\leqslant a\\(\text{ii})-2\leqslant x\leqslant 1,f(x)=3\leqslant a\\(\text{iii})x\leqslant -2,f(x)=-2x-1\leqslant a\end{cases}\right\}\begin{array}{c}\text{解集非空}\\\Downarrow\\f_{\min}(x)\leqslant a\end{array}$$

$$\begin{cases}3\leqslant a\\3\leqslant a,\therefore a\geqslant 3\\3\leqslant a\end{cases}$$

解法二　图象法。

解法三　不等式综合应用法

$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$，$f(x)\leqslant a$ 的解集非空，只须

$f_{\min}(x)\leqslant a$，$|x-1|+|x+2|\geqslant|-1-2|=3$

$\therefore f(x)\geqslant 3$，$\therefore f_{\min}(x)=3$，$\therefore a\geqslant 3$，故选 B。

反思　若 $f(x)\leqslant a$ 的解集为 $\mathbf{R}\Leftrightarrow f_{\max}(x)\leqslant a$。

品牌题训练

（一）选择题

1. 如果命题 p 是真命题，命题 q 是假命题，则在下列各结论中正确的为（　　）。

① 命题“p 且 q”为真命题

② 命题“p 或 q”是真命题

③ 命题“非 p”是真命题

④ 命题“非 q”是真命题

A. ①③　B. ②④　C. ②③　D. ①④

2. 如果命题“p 或 q”是真命题，则在下列各结论中正确的结论的个数为（　　）。

① 命题“p 且 q”是真命题

② 命题“p 且 q”是假命题

③ 命题“非 p 或非 q”是真命题

④ 命题“非 p 或非 q”是假命题

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

3. 在命题若 p 则 q 的逆命题，否命题，逆否命题中，真命题的个数最多为（　　）。

A. 0 个　B. 1 个　C. 2 个　D. 3 个

4. 在 $\triangle ABC$ 中“$B=60°$”是“三内角 A、B、C 满足 $2B=A+C$”的（　　）。

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

5. “$x\in A$ 且 $x\in B$”是“$x\in A\cap B$”的（　　）。

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　D. 既不充分又不必要条件

6. “$x\neq 3$ 且 $y\neq 5$”是“$x+y\neq 8$”的（　　）。

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　D. 既不充分又不必要条件

7. “$x\notin A$ 或 $x\notin B$”的充分不必要条件有（　　）。

①$x\notin A$ 且 $x\notin B$　②$x\in A$ 且 $x\notin B$

③$x\notin A$ 且 $x\in B$　④$x\in A$ 且 $x\in B$

A. 仅 ①　B. 仅 ①②

C. ①②③　D. ①②③④

8. 若命题 $p:\varnothing\subsetneqq\{0\}$，$q:0\notin\varnothing$，$r:\varnothing=\{0\}$，则下列复合题的判断中正确的有（　　）。

A. “p 且 q”与“p 且 r”都是真命题

B. “p 或 q”与“p 或 r”都是真命题

C. “p 或 r”与“q 且 r”都是假命题

D. “p 或 r”与“q 或 r”都是假命题

9. 在下列各结论中，正确的结论为（　　）。

①“p 且 q”为真是“p 或 q”为真的充分不必要条件

②“p 且 q”为假是“p 或 q”为假的充分不必要条件

③“p 或 q”为真是“p”为假的必要不充分条件

④“p”为真是“p 且 q”为假的必要不充分条件

A. ①②　B. ①③　C. ②④　D. ③④

10. 若“$A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$”的逆否命题为（　　）。

A. 若 A 不包含于 B，则 $A\cup B\neq B$

B. 若 $A\cup B\neq B$，则 A 不包含于 B

C. 若 $A=B$，则 $A\subseteq B$

D. 若 $A\cup B\neq B$，则 $A\subseteq B$

11. 设命题 p：集合 $A\cap B$ 是集合 $A\cup B$ 的子集；q：A 是 $A\cap B$ 的子集或是 $A\cup B$ 的子集，那么 p，q 的真假是（　　）。

A. p 真 q 假　B. p 真 q 真

C. p 假 q 真　D. p 假 q 假

12. 设 $a,b\in\mathbf{R}^-$，则“$a-\dfrac{1}{a}>b-\dfrac{1}{b}$”是“$a>b$”成立的（　　）。

A. 充分而不必要的条件

B. 必要而不充分的条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要的条件

（二）填空题

13. 用真假填空

（1）命题“若 $A\subseteq B$，是 $A\cup B=B$”是________命题。

（2）命题“若 $A\subseteq B$，是 $A\cap B=B$”是________命题。

（3）命题“若 $A\cap B=A\cup B$，则 $A=B$”是________命题。

（4）命题“若 $C_U(A\cap B)=(C_UA)\cap(C_UB)$，则 $A=B$”是________命题。

14. 用“p 或 q”、“p 且 q”、“非 p”填空：

（1）“方程 $x^2+4x-5=0$ 的解为 $x=1$ 或 $x=-5$”是________形式。

（2）若 $x\in A\cap B$，则“$x\in A$ 且 $x\in B$”是________形式。

（3）若 $x\in A$，则“$x\notin C_UA$”是________形式。

15. 命题 P：“若 $x\in A\cup B$，则 $x\in A$ 或 $x\in B$”，则非 P 是__________，P 的否命题__________。

16. 下列命题中真命题有：________（填序号）

① 命题“$a,b\in\mathbf{R}$，若 $a\neq 0$ 或 $b\neq 0$，则 $a^2+b^2\neq 0$”的逆否命题。

② 命题"若 $c<0$,则关于 x 的方程 $x^2+2x+c=0$ 有实根"的否命题。

③ $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 和 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 都是 $x-y$ 的因式。

④ 若 $a\in\mathbf{R}$,则 $a^0=1$。

⑤ 若 $A\cap B=\varnothing$,则 A、B 中至少有一个为空集。

⑥ 若 $A\cup B\neq\varnothing$,则 A、B 中至少有一个不为空集。

【参考答案与提示】

(一) 选择题

1.B 2.A 3.D 4.C 5.C 6.D 7.C 8.B 9.B 10.B 11.B 12.C

(二) 填空题

13.(1) 真 (2) 假 (3) 真 (4) 真

14.(1)p 或 q (2)p 且 q (3) 非 p

15.非 p 是若 $x\in A\cup B$,则 $x\notin A$ 且 $x\notin B$,p 的否命题 $x\notin A\cup B$,则 $x\notin A$ 且 $x\notin B$

16.①⑥

提示:

2.(易错题)p 或 q 为真只需其中之一为真即可,即一真一假或两均真,① 一真一假时不成立,② 两均真时不成立,③ 两均真时不成立,④ 一真一假时不成立。

3.若一命题的原命题及其逆命题均真,则其相应的四种命题皆真,例若 $A\cup B=A\cap B$,则 $A=B$。

6.(易错题)否式命题不易分析,则分析其逆否命题,但应特别注意本题与"$x\neq 3$ 或 $y\neq 5$ 是 $x+y\neq 8$"的什么条件。

7.应特别注意(1)本题为选项是条件,(2)否命题不易分析,则从其逆否命题着手,(3)借助图形分析更为简单。

12.$a-\dfrac{1}{a}>b-\dfrac{1}{b}\Rightarrow a-b+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}>0$

$$\Rightarrow(a-b)+\frac{(a-b)}{ab}>0\Rightarrow\left.\begin{array}{l}(a-b)\left(1+\dfrac{1}{ab}\right)>0\\ a,b\in\mathbf{R}^-\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow a-b>0$,即 $a>b$。

16.② 原命题等价于"若 $c<0$,则 $c\leqslant 1$",否命题为"若 $c\geqslant 0$ 则 $c>1$",由小范围可推大范围成立,反之则不然。③$x,y<0$,则不成立。④$a=0$ 时,a^0 无意义。⑤ 反例 $A=\{1,2\}$,$B=\{4,5\}$,又例 $A=\{圆\}$,$B=\{直线\}$。

函 数 第 章

一、映射与函数

知识点剖析

1. 映射

一般地，设 A,B 是两个集合，如果按照某种对应法则，f 对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有惟一的元素和它对应，这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射，记作 $f:A\to B$。如果给定一个从集合 A 到集合 B 的映射，那么和 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a 的象，a 叫做 b 的原象。

■ 说明　① 映射概念中涉及的两个集合 A,B，可以是数集，也可以是点集或其他集合，这两个集合有先后次序，从 A 到 B 的映射与从 B 到 A 的映射是截然不同的。

② 集合 A 中的任何一个元素都有象，并且象是惟一的，但允许集合 A 中不同的元素在集合 B 中有相同的象；映射也允许集合 B 中的元素在集合 A 中没有原象。例如：设 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{0,1,\frac{1}{2}\}$，对应法则 f 是“取倒数”，这时，由于 A 中的元素 0 无象，A,B,f 不能构成映射。

例如设 $A=\{a,b\}$，集合 $B=\{1,2\}$，则从集合 A 到集合 B 的映射有 4 个，如图 2-1。

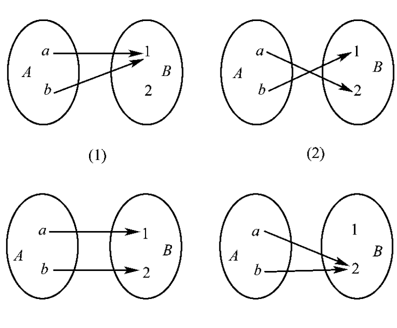


图 2-1

不难看出(1)(4)属于“多对一”型(A 中元素 a,b 在集合 B 中有相同象，且集合 B 中元素 2 在集合 A 中无原象)，(2)(3)属于“一对一”型。

③ 原象集一定是 A，象集 C 与目标集 B 的关系是：$C\subseteq B$，例如图 2-1 中(4)，原象集为 $A=\{a,b\}$，象集 C 为 $\{2\}\subset B$，(2)(3)中象集 $C=\{1,2\}=B$。

2. 函数

如果在某变化过程中有两个变量 x,y，并且对于 x 在某个范围内的每一个确定的值，按照某个对应法则，y 都有惟一确定的值和它对应，那么 y 就是 x 的函数，x 叫做自变量，x 的取值范围叫做函数的定义域，和 x 的值对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合叫值域(我们称用变量叙述的定义为函数的传统定义)。

用映射刻划的函数的近代定义可以这样叙述：设 A,B 都是非空的数的集合，f 是从 A 到 B 的一个对应法则，那么 A 到 B 的映射 $f:A\to B$ 就叫做 A 到 B 的函数，记作 $y=f(x)$，其中 $x\in A,y\in B$，原象集合 A 叫做函数 $f(x)$ 的定义域，象集合 C 叫做函数 $f(x)$ 的值域，很明显，$C\subseteq B$。

■ 说明　① 函数的近代定义与传统定义实质上是一致的，两个定义中的定义域、值域、对应法则是一样的，只不过出发点不同。传统定义出发点是运动变化观点，而近代定义却是从集合、对应的观点出发。从某种意义上说，函数的近代定义更具一般性。例如：函数：

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时}\end{cases}$$

用变量观点解释会显得十分勉强，但用集合、对应观点就十分自然。

② 函数是一种特殊的映射，集合 A,B 是非空数集；但映射不一定是函数。

③ 函数是从定义域 A 到值域 C 上的映射，且 C 中任何一个元素在 A 中都有原象，$(C\subseteq B)$。但 B 中不一定每一个元素在 A 中都有原象。例如：函数 $f(x)=x^2$ 是定义域 $A=\mathbf{R}$ 到集合 $B=\mathbf{R}$ 上的函数，值域 $C=\{0\}\cup\mathbf{R}^+$，但 $-5\in B$，-5 无原象。

④ 函数的核心是对应法则。一般地说，在函数记号 $y=f(x)$ 中，f 代表对应法则，等式 $y=f(x)$ 表明，对于