高等学校教材

实变函数与泛函分析概要

（第三版）

第一册

郑维行　王声望　编

高等教育出版社

内容简介

本书第三版保持了内容精选、适用性较广并便于教学的特色，吸收很多高校教师使用本书中提的宝贵意见，参考现行教学大纲并考虑到当前教学发展的需要。修订时注意将一些论证写得详细些，并简化部分证明；全书各章均配上小结；对数学术语依现行标准统一订正；增加例题，调整习题，特别收取了近年来招考研究生的部分试题。此外，订正了书中的各种错误。篇幅略有增加。

全书共十章：第一篇包含集与点集、勒贝格测度、可测函数、勒贝格积分与函数空间 L^p 五章，第二篇包含距离空间、赋范线性空间与内积空间、赋范空间上的有界线性算子、内积空间上的有界线性算子与广义函数大意五章。每章后附有习题。

本书可作为综合大学、理工大学、师范院校的数学与应用数学、计算数学、统计数学等专业的教材，也可作为部分研究生、自学者的参考用书。所需预备知识为数学分析、线性代数(第一、二册)、常微分方程与复变函数(第二册)的基本内容。

序 言

本教材是我们在南京大学数学系多年教学的基础上产生的，这次编写时又增加了若干新内容。全书共分两篇。第一篇介绍实变函数论，内容包括点集、测度与可测函数，L 积分以及积分序列的极限的三大定理与傅比尼定理等。以勒贝格积分为重点，采用内、外测度的方法构造点集的测度，用简单函数的积分引进 L 积分，以期符合由浅入深、由特殊到一般的认识规律。L^p 空间专列一章，其中还包括在应用上极为重要的傅里叶变换，为过渡到第二篇提供典型的例子。第二篇讲述泛函分析的一些基本内容。如距离空间、赋范线性空间、希尔伯特空间等概念，线性分析的几条基本定理，全连续算子的黎斯－邵德尔理论，完备内积空间中有界自伴算子的谱论初步。书中给出不少例子以说明基本概念，为了使学生了解本学科中抽象的必要性与应用的广泛性，我们曾作了一定的努力。鉴于本课程是一门重要基础课，在数学教学中具有承上启下的作用，所以我们安排了某些内容，如微分与积分、L 积分与 R 积分的比较、压缩映象原理等，以便与数学分析、代数、方程等相联系；同时，还适当介绍了有关序集、抽象测度、LS 积分概念、拓扑空间大意等内容，为感兴趣的读者进一步学习近代数学与近代物理打下基础。各章末均附有习题，以供教学时选用。

本教材是为综合大学数学系同名课程而试编的，估计一学年126学时左右可以讲完(主要内容)。如果只安排一学期72学时的，则可选用第一章到第六章的基本内容。进修班、高等师范学校也可参考使用。

教材初稿曾得到程其襄、严绍宗、王斯雷、张奠宙，徐荣权、俞致寿教授等的细心审查与认真讨论，曾远荣、江泽坚、夏道行教授

专门阅览了手稿，他们都提出了许多宝贵意见，编者基本上都采纳了；函数论教研室的马吉溥、苏维宜、任福贤、何泽霖、宋国柱、王巧玲、王崇祜、华茂芬等同志协助阅读手稿，并参加了部分修改工作。编者在此谨对他们致以衷心的感谢。由于我们水平所限，加之时间仓促，书中错误在所难免，希望专家与同志们多多给予指正。

编　者

1978年10月于南京

第三版前言

我们十分感谢很多高校教师使用本书并提出宝贵意见。感谢高等教育出版社王瑜、李蕊同志建议再一次修订本书，以适应当前教学发展需要，还要感谢尹会成、秦厚荣、丁南庆教授的很有价值的建议与支持。本次修订中我们在保留原书内容精选、适用性较广的前提下，增加了一些例题和研究生试题，补充介绍若干常用概念如勒贝格点、全密点及反演公式等，每章后附上小结并订正一些错误。不知修改是否得当，还望广大读者赐教。我们经常获悉海内外学子说：读了实变函数与泛函分析后始感分析学的一些奥妙，对学习现代数学的兴趣增强了。如本书果真对他们有所帮助，则编者的修订当不算徒劳了。最后，我们谨对高等教育出版社文小西先生的细心审校与宝贵建议表示衷心感谢，还要对 *ATA* 编辑部的朱燕同志不辞辛劳为本书作出全部打印稿表示深深谢意。

编　者

2004 年 2 月于南京

第二版前言

在修订第二版中，我们做了若干少量的补充并修正了某些错误。习题也做了增加。这样，在使用本书时选择的自由度就加大了。

程其襄教授再一次通阅全稿并提出许多宝贵意见，编者不胜感谢。

广大教师与读者热情来信指出本书中的一些缺点与疏漏之处，编者谨对他们表示谢意。

编　者

1986 年 1 月于南京

第一篇

目　录

第　一　篇

第一章　集与点集 …… 3
§1　集及其运算 …… 3
§2　映射·集的对等·可列集 …… 7
§3　一维开集、闭集及其性质 …… 12
§4　开集的构造 …… 17
§5*　集的势·序集 …… 25
第一章习题 …… 37
第二章　勒贝格测度 …… 40
§1　引言 …… 40
§2　有界点集的外、内测度·可测集 …… 42
§3　可测集的性质 …… 50
§4　关于测度的几点评注 …… 60
§5*　环与环上定义的测度 …… 64
§6*　σ 环上外测度·可测集·测度的扩张 …… 69
§7*　广义测度 …… 80
第二章习题 …… 87
第三章　可测函数 …… 91
§1　可测函数的基本性质 …… 91
§2　可测函数列的收敛性 …… 101
§3　可测函数的构造 …… 109
第三章习题 …… 114

第四章　勒贝格积分 ………………………………………… 117
§1　勒贝格积分的引入 ………………………………… 117
§2　积分的性质 ………………………………………… 124
§3　积分序列的极限 …………………………………… 136
§4　R 积分与 L 积分的比较 ………………………… 145
§5*　乘积测度与傅比尼定理………………………… 154
§6　微分与积分 ………………………………………… 166
§7*　勒贝格－斯蒂尔切斯积分概念………………… 195
第四章习题 …………………………………………… 207
第五章　函数空间 L^p ……………………………………… 212
§1　L^p空间·完备性……………………………………… 212
§2　L^p空间的可分性 ………………………………… 220
§3　傅里叶变换概要 …………………………………… 231
第五章习题 …………………………………………… 249
参考书目与文献 ……………………………………………… 254
索引……………………………………………………………… 255

第一章　集与点集

数学分析中最重要的概念之一是黎曼(B. Riemann)积分，从黎曼积分的记号$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$可以看出，它含有两个要素与一个运算，即被积函数$f(x)$、积分区间$[a,b]$与积分运算．本篇的中心内容是勒贝格(H. Lebesgue)积分，它的记号是$\int_E f(x)\mathrm{d}m$，这里$f(x)$是可测函数，E是欧几里得(Euclid)空间中可测集，不必是区间，而积分运算依赖于所考虑的测度m．这是近代积分论中最重要的一种积分，讨论这种积分不仅是为了推广黎曼积分，而且是由于它本身在运算上的灵活性，这对进一步学习近代数学是十分必要的．同时，我们可以看到，数学分析中的一些重要结果也由此得到较为精确的说明．勒贝格积分理论的产生自有它的实际背景．我们将按照集、可测集与可测函数、积分的顺序来讨论，把有关积分的各个环节逐一弄清，进而掌握积分的完整概念，积分的性质及应用．本章先由基本概念——集与点集讲起．

§1　集及其运算

集或**集合**是数学中的一个基本概念．本书所研究的集合，均指具有确定内容或适合一定条件的事物的全体．对集合的这样的粗略理解不影响我们对本书主题的讨论，因而我们将不去谈集的严格定义．构成一个集的那些事物称为集的**元**或**元素**．元与集的关系是个别与整体的关系．例如，一个圆周上的点的全体成一集，它的元是点．以实数为系数的多项式全体成一集，它的元是实系数多项

式.书中恒约定,对给定的集,任一元要么属于它,要么不属于它,二者必居其一.

又如,直线上的一切开区间(a,b)成一集(或称**类**),这集的元是开区间.$[0,1]$上一切连续实函数构成一集.实轴上满足$|\cos x|\geqslant 1/2$的点构成一集且具体可写为

$$\{x\in\mathbf{R}:k\pi-\pi/3\leqslant x\leqslant k\pi+\pi/3,k\in\mathbf{Z}\},$$

这里$\mathbf{R}$表示实数集,$\mathbf{Z}$表示整数集.

本书常用拉丁文大写字母A,B等表示集,用小写字母a,b等表示集的元.

现在我们引进有关集的一些简单概念或术语.设A是一个集,a是它的元,就写为$a\in A$,读作a属于A,它的意义与A含有a相同.若元b不属于A,写为$b\overline{\in}A$或$b\notin A$.对于任何集A,我们恒约定$A\overline{\in}A$,即集A自身不能看成A的元.

若集A的元只有有限个,称A为**有限集**.不含任何元的集称为**空集**,用记号$\varnothing$表示.一个非空集,如果不是有限集,就称为**无限集**.

某些集之间可以有种种关系或性质.最基本的关系要算"包含"与"相等".设A,B是两个集,若A的每个元都属于B,称A是B的**子集**,记成$A\subset B$或$B\supset A$,分别读作A含于B或B包含A.若$A\subset B$且存在一个元$x\in B$而$x\overline{\in}A$,则称A是B的**真子集**.为了方便,规定空集$\varnothing$是任何集的子集.设A,B是两个集,若$A\subset B$与$B\subset A$同时成立,则称集合A与B**相等**,记成$A=B$.

设给定一集A与一性质π.用记号

$$\{a:a\in A,\pi(a)\}$$

表示A中具有性质π的元a所成的集,有时简记成$A\{\pi(a)\}$.例如,上面的一个例子可以写成$\{x:x\in\mathbf{R}$且$|\cos x|\geqslant\frac{1}{2}\}$或$\mathbf{R}\{x:|\cos x|\geqslant\frac{1}{2}\}$.关系式$\{a:a\in A,\pi_1(a)\}\subset\{a:a\in A,\pi_2(a)\}$的意义是:由性质$\pi_1(a)$可以推出性质$\pi_2(a)(a\in A)$.

下面引进集的运算.

定义 1.1 设 A,B 是两个集. 由 A 中的元以及 B 中的元全体所成的集称为 A,B 的**并**,记成 $A\cup B$(图 1);就是说

$$A\cup B=\{x:x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

由同时属于 A 与 B 两者的那些元所成的集称为 A 与 B 的**交**,记成 $A\cap B$(图 2),有时简写成 AB. 即

$$A\cap B=\{x:x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

由属于 A 而不属于 B 的那些元所成的集称为 A 与 B 的**差**,记成 $A-B$(图 3). 当 $B\subset A$ 时,差集又称为 B 关于 A 的**补集**,记成 $\mathscr{C}_A B$.

并集与交集概念可以推广到任意个集的情形. 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是一集族,这里 I 是指标集,α 在 I 中取值,那么它们的并与交分别定义为

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{a:\text{有某个 } \alpha\in I \text{ 使 } a\in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{a:\text{对一切 } \alpha\in I \text{ 有 } a\in A_\alpha\}.$$

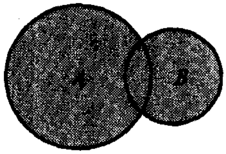

图 1 $A\cup B$

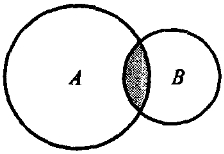

图 2 $A\cap B$

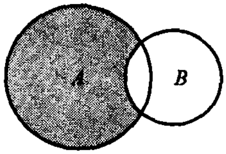

图 3 $A-B$

例 1 设 $A=\{2n-1:n\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{n\in\mathbf{Z}:|n|\leqslant 3\}$. 那么可求出

$$A\cup B=\{-2,0,2,2n-1:n\in\mathbf{Z}\},$$

$$A\cap B=\{-3,-1,1,3\},$$

$$A-B=\{2n-1:n>2 \text{ 或 } n\leqslant -2,n\in\mathbf{Z}\},$$

$$B-A=\{-2,0,2\}.$$

我们建立下列定理.

定理 1.1 对于集 E 与任意一集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$,恒有分配律

成立：

$$E\cap(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}(E\cap A_\alpha).$$

证 $x\in E\cap(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)$当且仅当$x\in E$且$x\in\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$或$x\in E$且存在$\alpha_0\in I$使$x\in A_{\alpha_0}$. 上述论断等价于$x\in E\cap A_\alpha$(对某个$\alpha_0$). 从而等价于$x\in\bigcup_{\alpha\in I}(E\cap A_\alpha)$. 这证明了所欲证的等式成立.

当我们在研究一个问题时，如果所考虑的一切集都是X的子集，这时便称X为**基本集**. 例如限制在数直线上研究各种不同的点集，那么数直线是基本集. 对于任一基本集X，差集$X-A$称为**A关于X的补集**或简称为**A的补集**，记成$\mathscr{C}_XA$或$\mathscr{C}A$.

容易看出，X关于自身的补集为空集，而空集关于X的补集为X，即$\mathscr{C}X=\varnothing$，$\mathscr{C}\varnothing=X$. 此外，任一集A取二次补集运算又回到自己：$\mathscr{C}\mathscr{C}A=A$，且

$$X=A\cup\mathscr{C}A,$$

右边两集互不相交，即它们没有公共元. 基本集这种简单分解称为X的互斥分解. 例如，设$\mathbf{R}$中的一切有理数集为$\mathbf{Q}$，无理数集为$\mathbf{I}$，那么$\mathbf{R}$便有下述互斥分解：

$$\mathbf{R}=\mathbf{Q}\cup\mathbf{I}.$$

定理 1.2 对于基本集X中的并集、交集的补集运算，有

(i) $\mathscr{C}(\bigcup_\alpha A_\alpha)=\bigcap_\alpha(\mathscr{C}A_\alpha)$;

(ii) $\mathscr{C}(\bigcap_\alpha A_\alpha)=\bigcup_\alpha(\mathscr{C}A_\alpha)$.

证 设$x\in\mathscr{C}(\bigcup_\alpha A_\alpha)$，则$x$不属于任何$A_\alpha$. 故$x$属于每个$A_\alpha$的补集$\mathscr{C}A_\alpha$，因此$x\in\bigcap_\alpha(\mathscr{C}A_\alpha)$. 由此可见

$$\mathscr{C}(\bigcup_\alpha A_\alpha)\subset\bigcap_\alpha(\mathscr{C}A_\alpha).$$

同理可证$\mathscr{C}(\bigcup_\alpha A_\alpha)\supset\bigcap_\alpha(\mathscr{C}A_\alpha)$. 这样(i)得证.

由于(i)对任意集族$\{A_\alpha\}$为真，应用到集族$\{\mathscr{C}A_\alpha\}$上得

$$\mathscr{C}(\bigcup_\alpha\mathscr{C}A_\alpha)=\bigcap_\alpha(\mathscr{C}(\mathscr{C}A_\alpha)).$$

两边取补集，注意 $\mathscr{C}(\mathscr{C}A_\alpha)=A_\alpha$，即得

$$\bigcup_\alpha(\mathscr{C}A_\alpha)=\mathscr{C}(\bigcap_\alpha A_\alpha).$$

即(ii)成立(左右调了位).

所证定理称为**德摩根**(De Morgan)**法则**. 它提供一种**对偶方法**，能将已证明的关于集的某种性质转移到它们的补集上去(参看后面的定理 3.3 与 3.5).

例 2 读者应注意，集的运算 $\cup,\cap,-$ 等看来好像与数的 $+,\times,-$ 类似，但其实不然. 例如，考察下列二式是否正确：

(i) $A(B-C)=AB-AC$,

(ii) $A-(B-C)=(A-B)\cup C$.

(i) 是正确的，证明如下：

取 X 为基本集，$X=A\cup B\cup C$. 那么

$$\begin{aligned}
\text{左边}&=A(B\mathscr{C}C)=(AB)\mathscr{C}C\\
&=AB\mathscr{C}A\cup AB\mathscr{C}C \qquad (AB\mathscr{C}A=\varnothing)\\
&=AB(\mathscr{C}A\cup\mathscr{C}C) \qquad (\text{利用定理 } 1.1)\\
&=AB\mathscr{C}(AC) \qquad (\text{利用定理 } 1.2(\text{ii}))\\
&=AB-AC=\text{右边}.
\end{aligned}$$

(ii)是不正确的. 例如，若 C 中有不含于 A 的元 c，那么右边含有 c，而左边恒是 A 的子集，不可能含有元 c.

类似地，式子 $A\cup(B-C)=A\cup B-C$ 也不正确，读者可自行考虑.

因此，在处理集的运算时要细心些，概念要理解准确，推导要有依据，切不可一味依照数的运算法则进行.

§2 映射·集的对等·可列集

我们知道，数学分析中所讲的函数可以看成是数集与数集之间的一种对应关系，或数集到数集的映射. 把函数概念一般化，得

到下面的定义.

定义 2.1 设 A,B 是两个非空集.若依一定的法则 f,对每个 $x\in A$,在 B 中有一个确定的元 y 与之对应,则称 f 是定义在 A 上而取值于 B 的**映射**,记成 $f:A\to B$,并将 x 与 y 的关系写成 $y=f(x)$.这时称 A 为 f 的**定义域**,而称

$$f(A)=\{f(x):x\in A\}$$

为 f 的**值域**,或 A 在映射 f 下的**像**.

注意,两个法则 f 与 g 的给出方式可能不同,如果它们有同一效果,即对一切 $x\in A$ 有 $f(x)=g(x)$,则认为它们表示同一映射.

设给定映射 $f:A\to B$,如果有 $B=f(A)$,就是说,f 的像充满整个 B,则说 f 是**满射或映上的**;如果对每个 $y\in B$,仅有唯一的 $x\in A$ 使 $f(x)=y$,则说 f 有**逆映射** f^{-1},**它是定义在 $f(A)$ 上而取值于 A 上的满射.当映射 $f:A\to f(A)$ 有逆映射时,称 f 是一一映射**.设 $A_0\subset A$,映射 g 在 A_0 上定义且它在 A_0 上的值与 f 相同,则称 g 是 f 在 A_0 上的**限制**,记为 $g=f|_{A_0}$.这时也称 f 是 g 在 A 上的**扩张**.

设给定两个映射 $f:A\to B,g:B\to C$,用记号 $g\circ f$ 表示 A 到 C 的映射,由关系 $g\circ f(x)=g(f(x))(x\in A)$定义,称为 f 与 g 的**结合**.设 $B_0\subset B$,用记号 $f^{-1}(B_0)$表示 B_0 在映射 f 下的**原像**,即

$$f^{-1}(B_0)=\{x:x\in A,f(x)\in B_0\}.$$

容易验明,若 $B_0\subset B,A_0\subset A$,则一般有

$$f(f^{-1}(B_0))\subset B_0,f^{-1}(f(A_0))\supset A_0.$$

如果 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 A 的子集族,$\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 B 的子集族,同样容易验证下列关系:

$$f(\bigcup_\alpha A_\alpha)=\bigcup_\alpha f(A_\alpha),f^{-1}(\bigcap_\alpha B_\alpha)=\bigcap_\alpha f^{-1}(B_\alpha).$$

今后我们常要用到**集 E 的特征函数**概念,记成 $\chi_E(x)$,它的定义是

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & 若\ x\in E,\\ 0, & 若\ x\overline{\in} E.\end{cases}$$

定义 2.2 设 A,B 为两个集,如果有一一映射 f 存在,使 $f(A)=B$,则称 A 与 B **成一一对应**或互相**对等**,记成 $A\sim B$.

对等概念是一种等价关系,它对于无限集的研究是十分重要的.关于对等,易见有下列性质:

(i) **自反性** $A\sim A$;

(ii) **对称性** 若 $A\sim B$ 则 $B\sim A$;

(iii) **传递性** 若 $A\sim B, B\sim C$,则 $A\sim C$.

由对等的定义可知,当两个有限集互相对等时,它们的元的个数必相同.至于无限集,采用元素个数一词就不适宜,但对等概念仍然可用.粗略地说,可以用对等概念对无限集的元的"个数"进行比较.

在所有无限集中,自然数集 $\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}$ 是最简单的一个.任何一个集,若与 $\mathbf{N}$ 对等,就称为**可列集**.换句话说,可列集的一切元可用自然数编号,使之成为无穷序列的形式:$a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1},\cdots$.可以举出许多可列集的例子.例如全体**正偶数集**依 $2n\leftrightarrow n$ 对应的方法与 $\mathbf{N}$ 成一一对应;$\mathbf{Z}$ 与 $\mathbf{N}$ 的对应方法如下:

$$0\leftrightarrow 1,(-1)^{n+1}\left[\frac{n}{2}\right]\leftrightarrow n,n=2,3,\cdots,$$

其中记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.这样,正偶数集与整数集均为可列集.

再举一个稍微复杂的例子:有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可列的.其实,可把非零有理数 r 写成既约分数的形式 $r=p/q$,这里 $q>0,p\neq 0,p,q$ 均为整数.称 $n=|p|+q$ 为 r 的"模".现规定 0 的模为 1,很明显,模为 n 的有理数的个数是有限的.于是把一切有理数按模的递增顺序编组,凡是模相同的编在同一组里,然后再依组的顺序把所有有理数逐个编号.这样,每个有理数得到了一个确定的号码,因而建立了 $\mathbf{Q}$ 与 $\mathbf{N}$ 之间的一一对应,这证明了有理数集 $\mathbf{Q}$ 的可列

性.

不难看出,可列集的子集至多是可列的.由此推知,实直线 $\mathbf{R}$ 上任一类互不相交的开区间集必为可列集或有限集.其实,在每个区间中取一有理数与这个区间对应,则不同区间对应于不同的有理数,故所述开区间类与有理数的一子集对等,因而至多是可列的.

可以断言,可列集是无限集中“元素的个数最少”的一类集.这句话的精确含义由下列定理表出.

定理 2.1 任何无限集含有一个可列子集.

证 设 A 是任给无限集.用归纳法,可作出 A 的子集列 $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 使每个 A_n 恰含 n 个元.其实,因 $A\neq\varnothing$,可取出 $a_1\in A$,并令 $A_1=\{a_1\}$.假定对任意自然数 n,用任何方式作出了 A 的子集 A_n,它有 n 个元,那么由于 $A-A_n$ 非空,可取 $a_{n+1}\in A-A_n$,令 $A_{n+1}=A_n\cup\{a_{n+1}\}$,则显见 A_{n+1} 是 A 的子集且含有 $(n+1)$ 个元.由此可见,所述序列 $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 存在.现在对每个 $n\in\mathbf{N}$,令

$$B_n=A_{2^n}-\left(\bigcup_{k=0}^{n-1}A_{2^k}\right).$$

那么,$\{B_n\}$ 是 A 中互不相交的子集类,并且看出,B_n 中元的个数不少于 $2^n-\sum_{k=0}^{n-1}2^k=1$,故每个 B_n 非空.我们由每个 B_n 中取一个元构成一个集 B,则易见 B 是 A 的可列子集.

定理证完.

由所证定理可以推出下列事实:**凡无限集必与它的一个真子集对等**.其实,设 A 是所给无限集,据定理 2.1,A 存在可列子集 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$.令 $B=A-\{a_1\}$,则 B 是 A 的真子集.作下列对应:

$$a\leftrightarrow a,\qquad \text{对 } a\in A-\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}},$$
$$a_k\leftrightarrow a_{k+1},\qquad \text{对 } k=1,2,\cdots.$$

易见这是 A 与 B 之间的一一对应,因而 A 与它的一个真子集 B 对等.所证事实是任何有限集所不具有的,它是无限集的一个特征