什 么 是 数 学

对思想和方法的基本研究
第二版

R · 柯朗
纽约大学柯朗数学研究院
H · 罗宾
拉特杰斯大学
著

I · 斯图尔特
沃里克大学数学研究院
修订

左 平 张饴慈 译

复旦大學 出版社

献给

欧内斯特、格特鲁德、汉斯

以及利奥诺尔·柯朗

内容简介

本书是世界著名的数学科普读物. 它搜集了许多经典的数学珍品,对整个数学领域中的基本概念与方法,做了精深而生动的阐述. 无论是数学专业人员,或是愿意做科学思考者都可以阅读此书. 特别对中学数学教师、大学生和高中生,都是一本极好的参考书.

R. Courant and H. Robbins
WHAT IS MATHEMATICS?
Oxford University Press, New York, 1964

什么是数学?
〔美〕R·柯朗　H·罗宾　著
左　平　张饴慈　译
复旦大学出版社

译 者 的 话

R·柯朗(Richard Courant)是当代对数学研究与数学教育都具有深远影响的数学家,是西方公认的数学权威.他1888年1月8日生于鲁布里尼茨(即现在波兰的鲁布里尼克(Lubliniec)),1910年在德国哥廷根大学获得博士学位,以后一直在哥廷根大学任教.在哥廷根时,他与D·希尔伯特关系甚密.1933年他离开纳粹德国,于1934年到美国纽约大学任教,并曾担任数学系主任和数学研究院院长,在此期间,该研究院成了世界最大的应用数学研究中心.1972年他在纽约去世.他对数学分析、函数论、数学物理、变分法等都有精深的研究.他不仅学识渊博,是当之无愧的大数学家,而且一生都从事和关心数学教育.他最伟大的贡献也许就是通过他的著作和个人交往使许多青年数学家得到宝贵的启示和巨大的鼓舞.

R·柯朗一生著作极丰,其中最著名的是《数学物理方法》(与希尔伯特合著)、《微积分》,还有就是《什么是数学》这本书.《什么是数学》出版以来,受到普遍的热烈欢迎,并被译成多种文字,一版再版,盛况至今不衰,成为数学世界名著之一.爱因斯坦和世界著名数学家H·外尔、M·莫尔斯等都对本书给予了高度评价(见本书封底).

时至今日,本书又由I·斯图尔特增写了新的一章而成为第二版.在新增的一章中,I·斯图尔特结合原书的内容,讲述了在柯朗写作年代尚未解决的一些重大数学问题(这些问题有的已经解决了,如:费马大定理、四色问题.有的取得了很大进展,如:哥德巴赫猜想.)以及现代数学的一些新方向、新分支.

1985年科学出版社出版过我们关于本书的译本(当时的书名为

《数学是什么》),曾受到读者热烈的欢迎. 今天,我们很乐意再次翻译这本书的第二版,相信必能受到新老读者的更大欢迎.

我们除了要再次感谢对我们 1985 版译本帮助良多的诸位朋友外,还要感谢汪宇先生和复旦大学出版社,使我们能将这第二版的新译本得以出版. 欢迎广大读者的批评与建议.

译者 2004 年 9 月

前　　言

1937 年夏，我还是一个年轻的大学生，我是通过阅读我父亲所写的《微积分学》那本书来学习微积分的. 我相信，那时，是他第一次想到要写一本关于数学方法和概念的初等读物，并且认为我有可能在这个方面给以帮助.

于是在随后的几年里，逐渐形成了《什么是数学》这本书. 我还能清晰地回忆起那紧张的编写时期，特别是 1940 和 1941 年的夏季，我协助 H・罗宾和我的父亲的情景.

当这本书出版的时候，其中若干本中有一个特别的扉页：数学——献给洛丽. 洛丽是我最小的妹妹，那时她 13 岁. 几年后，当我要结婚时，我父亲要求我妻子读懂《什么是数学》，她未能做得很好，不过她仍被接受进入我们的家庭.

很多年里，在纽约新罗彻尔的柯朗寓所的顶楼里放满了各种形状的铁丝框架，它们是用来做本书第七章第 11 节所述的肥皂膜实验的. 这些肥皂膜实验曾是孙儿们无限乐趣的源泉. 尽管我父亲没有再对他们重复这些实验，但他的孙儿中仍有一些人投身于数学及相关领域的研究.

自原书出版后未再认真准备新版本. 附有前言的修正版除了订正了一些明显的印刷错误外与原版基本没有什么区别；所有随后的印刷都与第三次修订本相同. 在我父亲生前最后的岁月里，他有时曾谈到使本书大规模现代化的可能性，但他不再有精力来完成此任务了.

因此，当 I・斯图尔特教授提议作现在这个修订本时，我是非常

高兴的. 他根据数学最新进展对若干章节增添了一些评论和扩展. 我们知道费马大定理和四色问题已经解决了；无穷小和无穷大量，这些过去在形式上使人不满意，并被当作有缺陷的概念，现在已经在“非标准分析”中再次获得肯定（我上大学时曾用了“无穷”这个词，我的数学教授当时指出“在我的班上不允许有‘坏’的语言”）. 此修订版的参考文献已经增加至当前. 我希望《什么是数学》这个新版本将再次在广大的读者中引起兴趣.

E · D · 柯朗

1995 年 9 月于纽约州的柏坡特

第二版序言

《什么是数学》这本书是一本数学经典名著，它收集了许多闪光的数学珍品. 它的目标之一是反击这样的思想："数学不是别的东西，而只是从定义和公理推导出来的一组结论，而这些定义和命题除了必须不矛盾外，可以由数学家根据他们的意志随意创造. "简言之，这本书想把真实的意义放回数学中去. 但这是与物质现实非常不同的那种意义. 数学对象的意义说的是"数学上'不加定义的对象'之间的相互关系以及它们所遵循的运算法则". 数学对象是什么并不重要，重要的是做了什么. 这样，数学就艰难地徘徊在现实与非现实之间；它的意义不存在于形式的抽象中，也不存在于具体的实物中. 对喜欢梳理概念的哲学家，这可能是个问题，但却是数学的巨大力量所在——我们称它为，所谓的"非现实的现实性". 数学联结了心灵感知的抽象世界和完全没有生命的真实的物质世界.

我第一次见到《什么是数学》这本书是在 1963 年，那时我正打算在剑桥大学谋求一席之地. 这本书被推荐给未来数学专业的学生阅读. 甚至到今天，任何想以先进的观点来看待大学数学的人，浏览这本书同样有益. 然而，你不必像一个崭露头角的数学家一样要从柯朗和罗宾的代表作中得到大量的信息和深刻的洞察. 你可以完全根据自己在数学方面的兴趣，基于你已有的数学背景知识，选取一部分内容进行舒心愉快的阅读. 中学代数，初等微积分，以及三角函数，再加上一点欧氏几何的帮助，有了这些方面的知识就足够了.

人们可能认为一本最后版本几乎是在 50 年前出版的书是过时

的了——它的术语已经陈旧,它的观点已与现代的形式不符了;但事实上,《什么是数学》这本书写得相当好,它所强调的解决问题的方法至今仍有效,它所选取的数学材料如此之好以至于没有一个单词或符号必须在新版中删去.

假如你认为这是因为数学从来没有什么改变,那么我请你去关注一下新增的一章"最新发展",它将向你展示数学的改变是多么迅速.这本书写得好,是因为尽管数学一直在发展,但书中选取的、有关历史上的著名发现的专题,都是很难抛弃的.对定理,你不可能不加以证明.事实上,你可能偶然间发现一个长期被接受的论证是错误的——这曾经发生过的.但这只表明,从一开始证明就是错误的.然而,新的观点通常会导致旧的论证过时,或对旧的事实不再感兴趣.《什么是数学》这本书没有过时,是因为所选取的材料展示出了无限完美的数学品位.

正规的数学就像拼写和语法一样,是一种对约定规则的正确应用.有意义的数学就像用来讲述有趣故事的报纸杂志;但不像某些报纸杂志,它的故事必须是真实的.最好的数学就应该像文学作品——故事来源于你眼前活生生的生活,致使你把精力与感情投于其中.就数学来说,《什么是数学》这本书是一部才华横溢的作品.新增的一章的主要目的是要把柯朗与罗宾所讲的故事延续到今天,例如,阐述了四色问题和费马大定理的证明.这些是在柯朗和罗宾写书时尚未解决的主要问题.现在它们已经被证明了.我发现了一个真实的数学上的诡辩(见第九章"最新进展"),我认为相关的这个特别的内容其观点已经变化了.柯朗和罗宾的论证,包括他们用的假设,是正确的.但是,那些假设不再像他们所做的那么合理了.

我并不试图介绍那些近来变得很著名的课题,比如:混沌、对称破缺,或者许多其他的有趣数学发现以及20世纪的数学发现.你可以通过很多途径找到那些发现,特别从我的书《从这儿通往无限》.那

本书可作为《什么是数学》这新版本的姊妹书. 我的宗旨是仅仅添加一些材料使得原先的东西与时俱进——虽然在一些特殊的情况下,我努力去做,而在其他场合我却没能这样.

什么是数学?

它是独特而唯一的.

I · 斯图尔特

1995 年 6 月于考文垂

对第一版修正版的序言

近些年来，在许多事情的推动下，人们对数学知识与训练的需要日益增加. 现今，除非学生和教师设法超越数学的形式主义，并努力去把握数学的实质，否则产生受挫和幻灭的危险将会更甚. 这本书就是写给这样的学生和教师的. 人们对第一版的反应鼓舞了作者，使作者敢于期望本书对读者会有所助益.

许多读者的批评使得本书作了多方面的修正与改进.

R · 柯朗

第一版序言

两千多年来,人们一直认为每一个受教育者都必须具备一定的数学知识.但是今天,数学教育的传统地位却陷入了严重的危机之中.而且遗憾的是,数学工作者要对此负一定的责任.数学教学有时竟演变成空洞的解题训练.这种训练虽然可以提高形式推导的能力,但却不能导致真正的理解与深入的独立思考.数学研究已出现一种过分专门化和过于强调抽象的趋势,而忽视了数学的应用以及与其他领域的联系.不过,这种状况丝毫不能证明紧缩数学教育的政策是合理的.相反,那些醒悟到培养思维能力的重要性的人,必然会采取完全不同的做法,即更加重视和加强数学教学.教师、学生和一般受过教育的人都要求数学家有一个建设性的改造,而不是听其自然,其目的是要真正理解数学是一个有机的整体,是科学思考与行动的基础.

某些传记性与历史性的名著以及富有启发性的普及读物,曾激起了潜在的一般兴趣.但是,借助轻松愉快的传授所得到的数学知识,决不会比通过最出色的新闻杂志对那些从未听过音乐的人进行音乐教育获得的更多.实际去接触活生生的数学内容是必不可少的.当然,应当避免走弯路或陷入技术性的细节.介绍数学不必过分注重通常例行的做法,也不应采取生硬的教条主义的态度,因为教条主义会掩盖动机和目的,妨碍人们作实事求是的努力.实际上,我们可以由最基本的事实出发,不必拐弯抹角而直达一个可以综览近代数学的实质和动力的有利位置.

现在这本书是朝此方向的一个尝试.因为所需知识估计在高

中课本中都可以找到，所以把它看成一本通俗读物也无妨. 但是，这并不意味着是对那种贪图省劲，不愿作任何努力的危险倾向的让步. 阅读本书要求读者在智力上比较成熟并乐意进行独立思考. 本书既是为初学者也是为专家，既是为学生也是为教师，既是为哲学家也是为工程师，既是为课堂教学也是为参考阅览而写的. 这个抱负可能是太大了. 这本书虽经若干年的准备，但在其他工作的压力下，却是在其真正完成之前出版，故不得不作某些折衷处理. 欢迎批评和建议.

无论如何，作者希望本书能对美国高等教育有所贡献，以表对这个国家给我的机会的谢意. 此书的计划与观点应由本人负责，而任何荣誉与奖赏则必须与 H·罗宾(Herbert Robbins)共享. 自从他参加这项工作以后，就全力以赴地完成了他的事项，并且本书能以现在这种形式完成，他的合作是决定性的因素.

我们要十分感谢许多朋友的帮助. 与玻尔(Niels Bohr)[①]、弗里特里希(Kurt Friedrichs)[②]和诺依格包尔(Otto Neugebauer)[③]的讨论影响到本书中哲学和历史的看法. Edna Kramer 从教师的立场上给出了许多建设性的意见. 形成本书最初想法的首次讲座纪录是由 David Gilbarg 提供的. 在手稿的写作和无数次的修改中，Ernest Courant、Norman Davids、Charles de Prima、Alfred Horn、Herbert Mintzer、Wolfgang Wasow 和其他一些人给予了帮助，并在很多细节上作了改善. Donald Flanders 提出了许多有价值的建议，并对打印稿作了仔细的校订. 这本书的图是由 John Knudsen、Hertha von Gumppenberg、Irving Ritter 和 Otto Neugebauer 绘制的. H. Whitney 给出了本书附录中的练习. 洛克菲勒基金教育委员会为课程的建设和论文提供了慷慨的支持，这些课程和论文后来成为本书

① 著名的物理学家，原子物理学的奠基人. ——译注
② 著名数学家，哥廷根学派的成员之一. ——译注
③ 著名数学史家，哥廷根学派的成员之一. ——译注

的基础. 也要感谢 Waverly 出版社,特别是 Grover C. Orth 先生,感谢他们极有成效的工作. 感谢牛津大学出版社,特别是 Philip Vaudrin 先生和 W. Oman 先生,感谢他们令人感动的主动精神和合作.

R · 柯朗

1941 年 8 月 22 日于新罗彻尔

本书的用法

本书虽是按系统的次序写就的,但并不要求读者逐页逐章地去读. 例如历史和哲学的介绍最好推迟到读完本书其余部分之后再看. 各章之间基本上是独立的. 每章开头通常是容易理解的,然后逐渐加深,到每章的末尾及补充就相当难了. 因此,对于那些想作一般了解甚于要求专门知识的读者来说,可以满足于一些有选择的材料,而略去详细讨论的部分.

数学基础较差的学生必须有所选择地阅读. 带星号(*)的部分和小体字印刷的部分在初次阅读时可以略去,这对理解后面的部分不会有多大影响. 再者,也不妨只研究读者最感兴趣的那些章节. 大部分的习题都是精选的,比较困难的则用星号标出. 读者如对其中的许多问题不能解决也不足为怪.

在“几何作图”和“极大与极小”这些章节中,高中教师能为课外活动小组或一些选定的学生找到有益的材料.

我希望本书既能为大学生、研究生,也能为对科学有真正兴趣的专业人员提供帮助. 本书也可作为关于数学基本概念的一个非常规的大学基础教材. 第三、四、五章可用作几何教材,而第六、八章合在一起形成一个自成系统的微积分教材,它不像通常的微积分课本,而是强调理解. 这些材料对于那些按特殊需要补充一些资料,以及想提供更多的例题以使内容更为生动的教师来说,都可当作初步教材. 散布在本书各个部分的大量习题以及书末增补的一些习题使本书更便于在课堂教学中使用.

我还希望专家们能对某些细节和含有进一步发展的萌芽的初步讨论感兴趣.

目　　录