上海徐汇教育丛书

从a_n到a_{n+1}

编著　陈永明　张建中　卢文红
阮夏丽　周胜东

上海交通大学出版社

内容提要

由于计算机的迅猛发展，与其关系密切的递推式数学考题常出现在每年的高考中，而中学数学教学中恰无此内容，这就造成严重脱节现象。本书就是针对此客观存在的不合理脱节，为全国高中师生补充这部分“营养”。

本书内容有从递推式求数列通项、部分和、极限，从通项求递推式等。书中备有大量例题和习题，大多出自全国高考题和美、日竞赛题。书末附有习题答案，供读者参考。

本书是中学师生的教学参考书，也可供有兴趣读者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

从 a_n 到 a_{n+1}/陈永明等编著. —上海：上海交通大学出版社，2003

(上海徐汇教育丛书)

ISBN7－313－03461－X

Ⅰ. 从... Ⅱ. ①陈... Ⅲ. 数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 071605 号

从 a_n 到 a_{n+1}

陈永明等 编著

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030)

电话：64071208 出版人：张天蔚

上海交大印务有限公司 印刷 全国新华书店经销

开本：880mm×1230mm 1/32 印张：7.625 字数：216 千字

2003 年 10 月第 1 版 2003 年 10 月第 1 次印刷

印数：1－6 050

ISBN7－313－03461－X/G・549 定价：11.50 元

目　　录

目　　录

前　　言

在数列中由 a_n 求 a_{n+1} 称为递推。近十几年来，我国的高考试题中常常出现有关递推式的题目，但是，高中课本里只有讲数列的通项公式和求和公式而没有讲到递推式这个内容，这就使中学师生在教学和学习中感到困难，甚至视为洪水猛兽，束手无策。

递推式这个知识，其实并不是新知识，但在过去没有引起重视。在数学家只用一张纸，一支笔就可以研究数学的年代，求数列的某项的值，用通项公式是最佳的手段。譬如，求某个数列的第 100 项的值，只要在通项公式中，令 $n=100$，立刻可以求出 a_{100} 了。如果利用递推式来求 a_{100}，你必须由 a_1 求得 a_2，再由 a_2 求出 a_3，……，最后由 a_{99} 求得 a_{100}。这自然是十分麻烦的事情。然而，自从电子计算机的广泛应用之后，情况发生了变化。计算机不怕复杂的计算，特别是重复的计算，那它是最拿手不过的了。正因为这一点，迭代就成为计算机进行计算时的常用方法，而迭代的数学基础就是递推式。因此，在计算机时代，递推式的价值被重新挖掘了，于是也就从“灰姑娘”变成骄傲的公主。

在这种背景下，高考试卷中出现有关递推式的题目是并不奇怪的。可惜，高中教材和高考似有脱节。不仅是教材，即使在可以用铺天盖地来形容的数学参考书里，也很少有完整论述递推式知识的书籍。为了满足广大中学师生和大学生学习的需要，笔者写出了这么一本书，将它奉献给读者，希望对想要了解递推式知识和掌握相关试题求解的朋友们有所帮助。

本书主要阐述从递推式求数列的通项、部分和、极限和从通项求递推式的方法，还对相关的理论问题作了一些简单的介绍。书中有大量的例题和习题，这些例题和习题有不少取材于各国的高考题和竞赛题，除日本的试题因为数量颇多，不一一列出外，其余都注明了出处，特别是我国的高考题，我们专门列出一章予以详尽讨论。

在本书的撰写过程中,参考了不少专著,在本书所附的参考文献中都已经列出,但本书的例题和习题来源广泛,实难一一列出,在此向有关学者和老师致谢。由于笔者水平有限,书中不免会有错误和缺点,敬请专家、广大数学老师和同学们提出宝贵意见。

编者

2003 年 8 月

序

记得余秋雨教授在他的《文化苦旅》中关于徐汇区有这么一些话："我认为上海文明的肇始者，是明代进士徐光启……"，"其安葬地以后也是他的家族世代汇居地，开始称为'徐家汇'。""……徐家汇成了传播西方宗教和科学文明的重镇。"并提出"因此有人认为，如果要把上海文明分个等级，最高的一个等级也可名之为徐家汇文明。"

秋雨先生的这番评价，着实让徐汇人深感历史赠予的一份厚礼，令我们自豪；历史的馈赠又赋予我们更重的使命和责任，使我们不怠地前行。的确，徐汇有着辉煌的文明史，有着深厚的文化底蕴。

在徐汇这块土地上，安息着古代纺织专家黄道婆，沉眠着近代文明的播火者、《几何原本》的翻译者徐光启，也浸渍了左联作家柔石、殷夫等前辈不屈的足印。

在徐汇这块土地上，近现代的大教育家蔡元培、著名音乐家贺禄汀、著名诗人柯灵等一大批文学艺术家曾生活或工作于此。目前生活或工作在徐汇区域内的有文学巨匠巴金；还有各领域的顶尖人才，包括在上海的近一半两院院士。

在徐汇这块土地上，集聚了10多所高等学府，有著名的上海交通大学、复旦大学医学院（原上海医科大学）、上海音乐学院等著名大学。同时，还集聚了一批声誉好质量高的中小学，是全市重点中学最集中的区。其中有全国著名的上海中学、南洋模范中学等一批重点学校；有6所百年老校，包括全国西洋式办学最早的学校——徐汇中学（创建于1849年）。成人教育领域也出现了如前进进修学院这样的知名品牌教育。

在徐汇这块土地上，汇聚了众多的科研院所。有中国科学院上海分院和它所属的上海天文台、有机化学研究所、药物研究所、植物生理研究所等10多个研究机构；有上海科学院和它所属的10多个研究机构；有中央部委、集团总公司，以及局属和高校所属的各种研究机构100多个，其中包括上海市教育科学研究院。近年来还诞生了许多民办的研究所。著名的国家级漕河泾高科技园区也设在徐汇区内。

在徐汇这块土地上，各类学校培养了千千万万各类人才，其中包括数学泰斗吴文俊院士。同时，也造就了一批名师，如德高望重的赵宪初老师。新近，上海市

评出了9位教育功臣，其中周小燕、唐盛昌和顾泠沅就工作于徐汇区区域内的教育单位和机构。除了上面提及的几位杰出教师之外，区内还有相当数量的特级教师、拔尖人才、学科带头人、中青年骨干教师，形成了优秀教师的人才“金字塔”。他们有着丰富的教学经验，是我区的宝贵财富。

在徐汇这块土地上生活着86万居民，其中具有大专以上文化程度的占五分之一。高中阶段的入学率已达98%；已基本普及了十二年教育；高等教育毛入学率为54%左右。

徐汇，人杰地灵。她是科学文化的火车头；她是人才的聚宝盆；她是教育的沃土。为了对得起“最高一个等级的上海文明”这样的赞誉，为了对得起数以万计的学子和家长，徐汇的教育工作者始终兢兢业业，不敢有丝毫懈怠，力争做出更新更佳的成绩。2001年，我区成为中国教育学会教育改革实验区，国家科技部、教育部等五部委授予的《中国青少年科技普及活动指导纲要》实验区，并被评为全国“双基”先进区。2003年徐汇区教育局又被正式批准成为联合国教科文组织亚太地区“教育革新为发展服务计划”中国联系中心，是目前全国唯一的区县级教育行政部门获批准的*UNESCO-APEID*联系中心。

为了总结我们的教育教学经验，为了和全国的同行们切磋交流，上海市徐汇区教育学会编辑了这一套《上海徐汇教育丛书》。本丛书是学科性质的书籍，涉及语、数、外、理、化等学科。对象主要是学生，也可供教师参考。起点是中等水平的学生，优秀学生亦能从中得益。

本丛书力图体现素质教育的思想和要求，并从这样的角度联系中考和高考。既讲知识，习题，更重视培养能力、素质；既讲传统知识和技能，又体现时代特征（如计算机、计算器，双语等领域）。

本丛书的一本书讲一个专题；每个专题力求有新意。专题可以是一个重点、难点，也可以是一种思想方法，或者是一个带综合性的课题。

编撰这样一部丛书是一个庞大的系统工程，我们还缺乏经验。希望我们这部丛书对埋头苦读的莘莘学子有所帮助，同时，希望我们这套丛书能够起到抛砖引玉的作用，并得到全国同行的指教。

杜　俭

上海市徐汇区教育学会会长

上海市徐汇区教师进修学院院长

2003年10月

项，这一点，我们都已知道了. 其实，也可以根据(1.1)式确定数列的各项. 在(1.1)式中，令 $n=1$，就得到

$$a_2=a_1+d=a+d;$$

再令 $n=2$，就可得到

$$a_3=a_2+d=(a+d)+d=a+2d;$$

令 $n=3$，又可得到

$$a_4=a_3+d=(a+2d)+d=a+3d,$$

一般地，

$$\begin{aligned}a_n&=a_{n-1}+d=[a+(n-2)d]+d\\&=a+(n-1)d.\end{aligned}$$

通项公式(1.2)的特点是可以直接算出随意指定的项的值. 譬如，计算第 100 项，只需在(1.2)式中令 $n=100$，立得

$$a_{100}=a+99d.$$

而用(1.1)式来计算 a_{100}，则必须先算出第 2 项，而后算 a_3，a_4，…，以至 a_{99}，最后才能算出所需的第 100 项 a_{100} 的值. 正是由于这种算法的特点是“一个接着一个依次算出的”，所以，我们把(1.1)式中的

$$a_{n+1}=a_n+d\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

叫做递推式。光有这个递推式还不行，还必须知道首项 a_1 的值，它是递推的起点. 因而在(1.1)式中还有

$$a_1=a,$$

a 称为这个数列的初始值.

由于(1.1)式和(1.2)式都可以确定等差数列，所以都可以作为等差数列的定义. 高中教科书里的等差数列就是利用(1.1)式定义的，也就是用递推式和初始值来定义的，这种定义方式叫数列的归纳定义.

高中课本中，等比数列的定义是：如果一个数列从第二项起，每一项与它前一项的比等于同一个常数，这个数列叫做等比数列，这个常数叫做等比数列的公比. 如果设等比数列的首项 a_1 等于 a，公比是 $q(q\neq 0)$，那么，上面的定义相当于

$$\begin{cases}a_1=a,\\a_{n+1}=a_nq\quad(n=1,2,3,\cdots).\end{cases}\tag{1.3}$$

不难看出，这也是归纳定义.

应该指出，(1.1)式和下列的(1.4)式：

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_n = a_{n-1} + d \quad (n = 2,3,4,\cdots) \end{cases} \tag{1.4}$$

是等价的. 尽管表面上看(1.1)式和(1.4)式是不一样的，但是在(1.1)式中，若令 $n=1$，就可以算出 a_2，而在(1.4)式中，只要令 $n=2$，也同样可以算出 a_2，所以，它们在本质上并没有差别.

同样地，(1.3)式和下面的(1.5)式：

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_n = a_{n-1}q \quad (n = 2,3,4,\cdots) \end{cases} \tag{1.5}$$

也是等价的.

一般地，用

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

和用

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_n = f(a_{n-1})(n = 2,3,4,\cdots) \end{cases}$$

确定的两个数列$\{a_n\}$是完全相同的.

有时会遇到更复杂的递推式. 例如，

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \quad (n = 1,2,3,\cdots) \tag{1.6}$$

就是一个较复杂的递推式，在(1.6)式中，令 $n=1$，得

$$a_3 = 3a_2 - 2a_1,$$

令 $n=2$，

$$a_4 = 3a_3 - 2a_2,$$

……

这个递推式的特点是，必须给出第 n，$n+1$ 项两项的值，才能得到第$n+2$ 项的值. 与这个递推式相适应，必须给出两个初始值 a_1 和 a_2，才能递推出各项的值.

用归纳方式定义的数列又称为循环数列. 用(1.1)式定义的等差数列，用(1.3)式定义的等比数列，它们的递推式都只是涉及了相邻两

条不共点,试回答下列各问题:1. 共有几个交点;2. 设 k 条直线将平面分成 $f(k)$ 个部分,求 $f(k-1)$ 和 $f(k)$ 的关系($2\leqslant k\leqslant n$);3. 求 $f(n)$ 的表达式.

分析 第 1 小题是容易解决的. 但本题的最终目的是第 3 小题,即求平面被割成的块数. 直接求第 3 小题中的 $f(n)$ 是会有些困难,但第 2 小题将有助于问题的解决.

一条直线将平面分成 2 个部分;两条直线将平面分成 4 个部分,比刚才多了 2 个部分;画第三条直线,它与先画的两条直线都相交,并且不共点,所以,第三条直线必定被分成三段. 与此相应地,平面被分割成的块数将增加 3 块;再画第四条直线,它与先画的三条直线形成三个交点,第四条直线被这三个交点分成四段,相应地,平面被分割的块数又将增加 4 块(见图 1-1);如此等等。

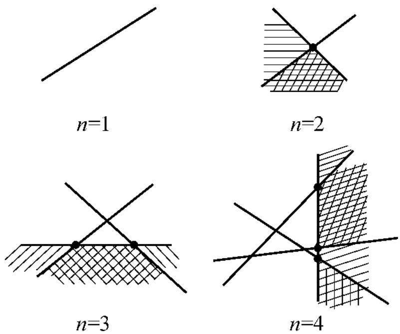


图 1-1

由上述可知,有

$$f(1)=2,$$
$$f(2)=f(1)+2,$$
$$f(3)=f(2)+3,$$
$$f(4)=f(3)+4,$$
$$\cdots\cdots,$$

这样,容易推出 $f(k)$ 和 $f(k+1)$ 的关系来.

解 1. 因为 n 条直线的任两条不平行,任三条不共点,所以,每两条直线必有一个交点. 由此,n 条直线的交点总个数为

$$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}.$$

2. 设 $k-1$ 条直线将平面分成 $f(k-1)$ 个部分. 再画第 k 条直线,它与前面画的 $k-1$ 条直线应有 $k-1$ 个交点. 这 $k-1$ 个交点将第 k

条直线分成 k 段，相应地，平面被分割的块数将增加 k 块．所以，

$$f(k)=f(k-1)+k \quad (2\leqslant k\leqslant n). \tag{1.7}$$

3．显然，

$$f(1)=2,$$

将 $k=2,3,\cdots,n$ 代入(1.7)式，得

$$f(2)=f(1)+2,$$
$$f(3)=f(2)+3,$$
$$\cdots\cdots$$
$$f(n-1)=f(n-2)+n-1,$$
$$f(n)=f(n-1)+n.$$

将上面这些式子相加，得

$$\begin{aligned} f(n) &= f(1)+[2+3+4+\cdots+(n-1)+n] \\ &= 2+\frac{(n+2)(n-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}(n^2+n+2). \end{aligned}$$

例 2(菲波那契数列)　有一对小兔，两个月内长成大兔，到第三个月就可以生下一对小兔，并且以后每月生下一对小兔，而所生的小兔，也同样到第二个月长成大兔，到第三个月生下一对小兔，以后也每月生下一对小兔．假设没有兔子死亡，问一年后共有几对兔子？

分析　设每月兔子的对数为

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

本题即求其中的第 13 项 a_{13}.

显然，

$$a_1=1;$$

第二个月后，这对小兔长成了大兔，但没有生殖，故

$$a_2=1;$$

到第三个月，这对大兔生下了一对小兔，所以

$$a_3=2,$$

注意，其中有一对大兔，一对小兔；到第四个月，一对小兔长成大兔，而

一对大兔又生下一对小兔，所以共有 3 对，即

$$a_4 = 3,$$

其中有两对是大兔，一对是小兔. a_4 比起 a_3 来多了 1. 这 1 对兔子是怎么会增加出来的呢？这是因为 $a_3(=2)$ 中有一对是大兔，它们生下了一对小兔的缘故. 可见，研究从某个月到它后面的一个月增加了几对兔子，只要观察某一个月中有几对大兔就可以了，而某一个月中大兔的对数就等于前面一个月的兔子总对数. 以 a_2, a_3, a_4 为例，a_4 由两部分构成：大兔对数和小兔对数. 其中，大兔对数就是 a_3，小兔对数（即增加的兔子对数）就是 a_3 中的大兔对数，也就是 a_2. 所以，$a_4 = a_2 + a_3$. 一般地，有

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n = 3, 4, \cdots).$$

解

$$\begin{aligned} &a_1 = 1, && a_2 = 1, \\ &a_3 = a_1 + a_2 = 2, && a_4 = a_2 + a_3 = 3, \\ &a_5 = a_3 + a_4 = 5, && a_6 = a_4 + a_5 = 8, \\ &a_7 = a_5 + a_6 = 13, && a_8 = a_6 + a_7 = 21, \\ &a_9 = a_7 + a_8 = 34, && a_{10} = a_8 + a_9 = 55, \\ &a_{11} = a_9 + a_{10} = 89, && a_{12} = a_{10} + a_{11} = 144, \end{aligned}$$

$$a_{13} = a_{11} + a_{12} = 233.$$

所以，一年之后，共有 233 对兔子.

这个问题是中世纪意大利数学家莱昂纳多·菲波那契首先提出的，所以被称为菲波那契问题. 问题中所涉及的数列

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$$

称为菲波那契数列.

例 3（“世界末日”问题） 在一块平板上竖起三根柱子 A, B, C，另外，有 n 片大小不同的、中间开着小孔的圆片. 开始时，如图 1-2 那样，把这些圆片套在 A 柱上，大的在下面，小的在上面. 现在，按下列规则将圆片从这根柱上移到另一根柱上：

(a) 一次只能移动一片；

(b) 不许把大圆片叠在小圆片上.

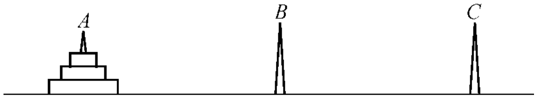


图 1-2

设把 A 柱上的 n 片圆片全部移到 C 柱所需的最少次数为 a_n. 试回答：1. a_1, a_2, a_3 是多少？2. a_n 和 a_{n-1} 间有怎样的关系？3. 求 a_n.

解　1. 显然，当 A 柱上只有一片圆片时，只需一次，就可以将它移到 C 柱，所以

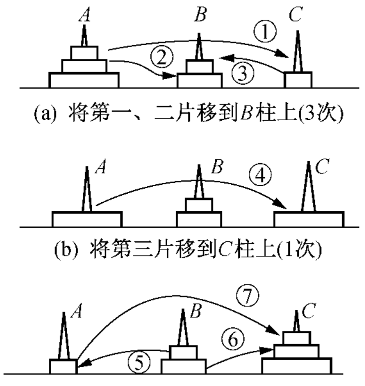
$$a_1 = 1.$$

当 A 柱上有两片圆片时，必须利用 B 柱作过渡，即先将第一片移到 B 柱，再将第二片移到 C 柱，最后将 B 柱上的小圆片移到 C 柱上. 这样，A 柱上的两片圆片就转移到了 C 柱上，并且小片压在大片上. 因此

$$a_2 = 3.$$

当 A 柱上有三片圆片时，应该怎样考虑呢？想要移动 A 柱上最底下的一片圆片，也就是第三片圆片，就必须将第一、二片圆片先搬到某一根柱上（当然是搬到 B 柱上比较恰当，注意，这需要用 $a_2=3$ 次），这样一来，就可以将第三片圆片从 A 柱上移到 C 柱上（这样又是 1 次）. 最后，将 B 柱上的两片圆片通过 A 柱过渡移到 C 柱上（这样又要 $a_2=3$ 次）. 所以，一共要 7 次，即

$$a_3 = 2a_2 + 1 = 7.$$



(a) 将第一、二片移到B柱上(3次)

(b) 将第三片移到C柱上(1次)

(c) 将第一、二片从B柱移到C柱上(3次)

图 1-3

2. 从第 1 小题的讨论中，不难知道 a_n 与 a_{n-1} 间的关系应是

$$a_n = 2a_{n-1} + 1.$$

3. 因为

$$a_n = 2a_{n-1} + 1,$$

$$a_{n-1}=2a_{n-2}+1,$$

两式相减,得

$$a_n-a_{n-1}=2(a_{n-1}-a_{n-2});$$

同理,有

$$a_{n-1}-a_{n-2}=2(a_{n-2}-a_{n-3}),$$

$$a_{n-2}-a_{n-3}=2(a_{n-3}-a_{n-4}),$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_3-a_2=2(a_2-a_1),$$

把以上$(n-2)$个式子相乘,得

$$a_n-a_{n-1}=2^{n-2}(a_2-a_1).$$

又因

$$a_1=1,\quad a_2=3,$$

所以

$$a_n-a_{n-1}=2^{n-1}.$$

同理可得:

$$a_{n-1}-a_{n-2}=2^{n-2},$$

$$a_{n-2}-a_{n-3}=2^{n-3},$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_2-a_1=2.$$

把这$(n-1)$个式子相加,得

$$a_n-a_1=2+2^2+\cdots+2^{n-1},$$

即

$$a_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1.$$

印度有一个古老的传说.相传在佛教圣地贝那勒斯的一个寺庙里有一块黄铜板,板上插着三根宝石针,第一根针上套着 64 片大小不等的金片,大的在底下,小的在上面.相传这是神在创世时留在那里的.不论白天黑夜,寺内都有一个僧人按照例 3 中所说的法则移动金片.神预言,当这 64 片金片都移到另一个针上时,世界末日就来临了.

根据计算,当所谓的“世界末日”来临时,金片将被移动过 $2^{64}-1$ 次.如果移动一次需要一秒钟,那么,共需化 58 万亿年.现代科学家估