黄冈兵法·同步学案

初二代数

摇摇摇摇摇摇主摇编摇南秀山
摇摇摇摇摇摇副主编摇余梦摇余曙光
摇摇摇摇摇摇编摇者摇刘葆华等

陕西师范大学出版社

酝哉 蕴哉摇 目摇 录

初摇二摇代摇数

第八章　因式分解

8.1　提公因式法

学点探究分析

重点　因式分解的意义和要求，提公因式的方法.

难点　确定公因式的方法.

探究点　对因式分解意义和要求的辨析能力，准确而熟练地把某些多项式用提公因式法因式分解.

学习方法技巧

1. 对因式分解的意义的理解

要从三个方面去理解：

(1) 因式分解是对多项式而言的，一个单项式本身就是数与字母的积，不需要因式分解. 如 $4x^2y=2x^2\cdot 2y$ 只是一种恒等变形，不是因式分解.

(2) 因式分解与整式乘法是互逆的，例如，$(m+n)(m-n)=m^2-n^2$ 是整式乘法，$m^2-n^2=(m+n)(m-n)$ 是因式分解.

(3) 因式分解实质上是整式的一种恒等变形，变形前后，式子的值始终保持不变.

2. 因式分解的要求

(1) 因式分解的结果必须是几个整式的积的形式，而不是几个整式的积与某项的和差形式. 如 $(3x^2+6xy-12x)=3x(x+2y-4)$，$m^2+8m-9=(m-1)(m+9)$ 都是因式分解；而 $am+bm+c=m(a+b)+c$，右端不是积的形式，而是加的形式，所以不是因式分解；再如 $x+3=\frac{1}{x}(x^2+3x)(x\neq 0)$，右端虽是积的形式，但 $\frac{1}{x}$ 是分式，而因式分解只针对整式而言，故也不是因式分解.

(2) 因式分解的结果必须是每一个因式在有理数范围内不能再分解为止. 如①$m^5-m=(m^4-1)$；②$m^5-m=m(m^2+1)(m^2-1)$；③$m^5-m=$

$m(m-1)(m+1)(m^2+1)$. 应用整式乘法公式检查①、②、③均成立,但③才是把多项式 m^5-m 分解因式的结果.

(3) 最终分解结果仅相差一个数字因数的,可看作分解结果相同. 如① $4x^2-1=(2x+1)(2x-1)$;② $4x^2-1=4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$. 但习惯上写成①的形式.

3. 公因式的求法

多项式中每一项都含有的因式,叫公因式.

如 $3ma+3mb$ 中,每一项都有 $3m$,所以 $3m$ 是这个多项式的公因式.

公因式的构成如下:

(1) 系数:各项系数的最大公约数;

(2) 字母:各项都含有的相同字母;

(3) 指数:相同字母的最低次幂.

如 $9x^3y^3z-12x^2y+15x^3y^3$ 中,9, −12,15 的最大公约数是 3;各项都有的相同字母是 x, y;x 的最低次幂是 2, y 的最低次幂是 1,所以公因式是 $3x^2y$.

能力升级捷径

【例 1】 下列各式中由等号的左边到右边的变形,是因式分解的是(　　)

A. $(x+3)(x-3)=x^2-9$

B. $x^2+x-5=(x-2)(x+3)+1$

C. $a^2b+ab^2=ab(a+b)$

D. $x^2+1=x\left(x+\frac{1}{x}\right)$

思维技巧　本题考查因式分解的意义,培养学生对概念的辨析能力,养成严谨认真的学习态度. 解答本题时要对每个选择项按因式分解的定义进行审查.

解　A 是整式乘法运算;B 中等号的右边不是整式积的形式;C 满足因式分解定义. 所以是因式分解;D 中等号右边两项的乘积,不是整式积的形式. 故应选 C.

激活思维　1. 本题考查的是本节的第一个知识点,易错选 D,解题关键是透彻理解因式分解的定义.

2. 与本题类似的其他变形有:

下列从左到右的变形:(1) $15x^2y=3x\cdot5xy$;(2) $(a+b)(a-b)=a^2-$

b^2；(3) $a^2-2a+1=(a-1)^2$；(4) $x^2+3x+1=x\left(x+3+\frac{1}{x}\right)$．其中是因式分解的个数是（　　）

A．0个　　B．2个　　C．1个　　D．3个

解　选C．

【例2】　把下列各式分解因式：

(1) $-3x^2-6xy+x$；　　(2) $x^{2n}-x^n$．

思维技巧　应寻找所有项的公因式，再提公因式，公因式的系数应取所有项系数的最大公约数，字母取相同字母，并且相同字母取最低次幂．如果第一项系数是负数，一般应提出“－”号，括号内每项都要改变符号．特别注意：提出后的剩余因式不能漏项，准确确定系数．

解　(1) $-3x^2-6xy+x=-x(3x+6y-1)$；

(2) $x^{2n}-x^n=x^n(x^n-1)$．

激活思维　1．通常项的系数为“1”省略不写，但单项式单独成项时，不能漏掉，如(1)中$(3x+6y-1)$不能写成$(3x+6y)$；

2．提出公因式，剩余因式是原多项式的该项与公因式的商，如(2)中x^{2n}提出x^n剩下的应是x^n而不是x^2．

3．与本题类似的其他变形有：

已知　$a+b=13$，$ab=40$，求a^2b+ab^2的值．

解　$a^2b+ab^2=ab(a+b)$

当$a+b=13$，$ab=40$时

原式$=40\times13=520$

【例3】　把$\frac{1}{2}a^2(x-2a)^2-\frac{1}{4}a(2a-x)^3$分解因式．

思维技巧　题中两部分的系数都是分数，为了尽量使提取公因式后的括号内的各项系数为整数，就应提取各系数分母的最小公倍数的倒数，即为$\frac{1}{4}$．同时，提公因式是指提取公因式中相同的字母及其最低次幂，由于字母可以表示数、单项式、多项式，故本题中相同的字母是指$(x-2a)$，最低次幂是2．

解
$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}a^2(x-2a)^2-\frac{1}{4}a(2a-x)^3\\&=\frac{1}{2}a^2(x-2a)^2+\frac{1}{4}a(x-2a)^3\\&=\frac{1}{4}a(x-2a)^2(2a+x-2a)\\&=\frac{1}{4}ax(x-2a)^2\end{aligned}$$

激活思维　1. 要注意以 n 的奇偶来决定 $(a-b)^n$ 变为 $(b-a)^n$ 后是否需要在括号前添负号，$(2a-x)^3=-(x-2a)^3$，所以 $-\frac{1}{4}a(2a-x)^3=\frac{1}{4}a(x-2a)^3$.

2. 当公因式的构成比较复杂时，要按系数，单个字母及次数，代数式的顺序分步确定，特别要注意括号外是否改变了符号.

3. 与本题类似的其他变形有：

把　$x^3(x+y-z)(y+z-a)+x^2z(z-x-y)+x^2y(z-x-y)\cdot(x-z-a)$ 分解因式.

解　$x^3(x+y-z)(y+z-a)+x^2z(z-x-y)+x^2y(z-x-y)(x-z-a)$

$=x^3(x+y-z)(y+z-a)-x^2z(x+y-z)-x^2y(x+y-z)(x-z-a)$

$=x^2(x+y-z)[x(y+z-a)-z-y(x-z-a)]$

$=x^2(x+y-z)(xy+xz-xa-z-xy+yz+ya)$

$=x^2(x+y-z)(xz-xa-z+yz+ya)$

【例 4】　在一条宽阔的马路上，整齐排列着 10 个花坛，每个花坛的形状都像操场上的跑道圈那样两端呈半圆形，连接两个半圆的边缘部分是直的. 已知每个花坛的宽都是 6m，每个花坛边缘直的部分的长分别是 36m、25m、30m、28m、25m、32m、24m、24m、22m 和 32m，试求出这些花坛的总面积.

思维技巧　把生活中的实例转化为数学知识来求解是“数学建模”思想的运用，花坛的形状应归类到数学中的几何图形，进而求出面积. 可以把每个花坛都看作是一个长方形与两个半圆的和，即一个长方形与一个圆的和，圆的半径为 3m.

解法一　计算出每个花坛的面积，然后把 10 个面积的数值相加（计算略）.

解法二　$(36\times6+\pi\cdot3^2)+(25\times6+\pi\cdot3^2)+(30\times6+\pi\cdot3^2)+(28\times6+\pi\cdot3^2)+(25\times6+\pi\cdot3^2)+(32\times6+\pi\cdot3^2)+(24\times6+\pi\cdot3^2)+(24\times6+\pi\cdot3^2)+(22\times6+\pi\cdot3^2)+(32\times6+\pi\cdot3^2)$

$=(36\times6+25\times6+30\times6+28\times6+25\times6+32\times6+24\times6+24\times6+22\times6+32\times6)+10\times\pi\cdot3^2$

$=(36+25+30+28+25+32+24+24+22+32)\times6+10\times\pi\cdot3^2$

$=278\times6+90\pi\approx1951\ (m^2)$

激活思维　1. 两种解法的繁简程度相差很多，解法二所以简便是因为在局部上使用提公因式进行了因式分解；并运用加法的交换律与结合律去求 10 个花坛的边长和.

2. 凭借想像力，设想每个花坛的两端部分离开中间部分各组成一个圆，

而 10 个花坛的中间部分顺次首尾相接，形成一个很长的长方形，这样重新组合并不改变总面积.

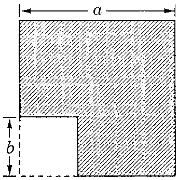
3. 本题实际上是一道算术题，如果将题目中的宽度和每个花坛边缘直的部分的长分别改为 mm 和 a_1m，a_2m，a_3m，…，a_{10}m，那么就完全成为代数题了. 由此可以看出，提公因式的正确性既是因为它逆用乘法分配律，又是因为它是从许许多多的实际问题的解决中抽象概括出来的办法，其正确性得到过无数次检验.

4. 与本题类似的其他变形有：

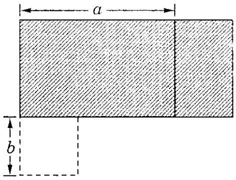
(1) (陕西省 2002 年) 如图 8－1①所示，在边长为 a 的正方形中挖掉一个边长为 b 的小正方形 ($a>b$)，把余下的部分剪拼成一个矩形 (如图 8－1②所示)，通过计算两个图形 (阴影部分) 的面积，验证了一个等式，则这个等式是 (　　)

A. $(a+2b)(a-b)=a^2+ab-2b^2$　　B. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

C. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$　　D. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$



图①



图②

图 8－1

解　选 D.

(2) 已知：$a-b-c=16$，求 $a(a-b-c)+b(c-a+b)+c(b+c-a)$ 的值.

解　$a(a-b-c)+b(c-a+b)+c(b+c-a)$

$=a(a-b-c)-b(a-b-c)-c(a-b-c)$

$=(a-b-c)(a-b-c)$

$=(a-b-c)^2$

$\because\ =a-b-c=16$，　$\therefore$ 原式 $=16^2=256$.

综合能力测试

基础能力测试

一、选择题

1．**多项式** $8x^{2n}-4x^{n}$ **提取公因式后，括号内的代数式是（　　）**

A．$4x^{n}$　　B．$2x^{n}-1$

C．$4x^{n}-1$　　D．$2x^{n-1}-1$

2．**把多项式** $m^{2}(a-2)+m(2-a)$ **分解因式等于（　　）**

A．$(a-2)(m^{2}+m)$　　B．$(a-2)(m^{2}-m)$

C．$m(a-2)(m-1)$　　D．$m(a-2)(m+1)$

3．$-x(a-x)(x-b)-mn(a-x)(b-x)$ **的公因式是（　　）**

A．$x(a-x)$　　B．$x(b-x)$

C．$-(a-x)(b-x)$　　D．$-m(n-1)(a-x)(b-x)$

4．**因式分解** $(x-y)^{2}-(y-x)$ **应为（　　）**

A．$(x-y)(x-y-1)$　　B．$(y-x)(x-y-1)$

C．$(y-x)(y-x-1)$　　D．$(y-x)(y-x+1)$

5．**若** $-2a^{n-1}-4a^{n+1}$ **的公因式是** M**，则** M **等于（　　）**

A．$2a^{n-1}$　　B．$-2a^{n}$

C．$-2a^{n-1}$　　D．$-2a^{n+1}$

6．**多项式** $(x+y-z)(x-y+z)-(y+z-x)(z-x-y)$ **的公因式是（　　）**

A．$x+y-z$　　B．$x-y+z$

C．$y+z-x$　　D．**不存在**

7．**计算** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{1999}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{2000}$ **的结果为（　　）**

A．$\left(-\frac{1}{2}\right)^{2000}$　　B．$-\left(\frac{1}{2}\right)^{2000}$

C．$\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{1}{2}$

8．**多项式** $3(x-y)^{2}-2(y-x)^{2}$ **分解因式，正确的是（　　）**

A．$(x-y)^{2}(3x-3y+2)$　　B．$(y-x)(3x-3y+2)$

C．$(y-x)^{2}(3x-3y)$　　D．$(x-y)^{2}(3x-3y-2)$

9．**分解因式** $a(a-b-c)+b(c-a+b)+c(b-a+c)$ **的结果是（　　）**

A. $(b+c-a)^2$　　B. $(a-b-c)(a+b-c)$

C. $-(a-b-c)^2$　　D. $(a-b-c)^2$

10. **下列各式分解因式正确的是（　）**

A. $10ab^2c+6ac^2+2ac=2ac(5b^2+3c)$

B. $(a-b)^3-(b-a)^2=(a-b)^2(a-b+1)$

C. $x(b+c-a)-y(a-b-c)-a+b-c=(b+c-a)(x+y-1)$

D. $(a-2b)(3a+b)-5(2b-a)^2=(a-2b)(11b-2a)$

11. **要使** $16(x-y)^3-24xy(y-x)=8(x-y)($　$)$ **成立，则括号内应填上（　）**

A. $2x^2-xy+2y^2$　　B. $2x-2y+3xy$

C. $2x^2-7xy+2y^2$　　D. $2x-2y-3xy$

二、填空题

12. **当** n **为______数时，**$(a-b)^n=(b-a)^n$ **当** n **为______数时，**$(a-b)^n=-(b-a)^n$. **（填“奇”或“偶”）**

13. $ab^2(x-y)^m+a^2b(x-y)^{m+1}=ab(x-y)^m$____________.

14. **如果多项式** $x^2+ax-42$ **分解因式后得到** $(x-6)(x+7)$**，则** $a=$____________.

15. $(a-b)^2(x-y)-(b-a)(y-x)^2=(a-b)(x-y)$__________.

16. **分解因式** $2a(b+c)-3(b+c)=$______________.

17. **已知** $a-2=b+c$**，则代数式** $a(a-b-c)-b(a-b-c)-c(a-b-c)=$______________.

18. **多项式** $18x^{n+1}-24x^n$ **的公因式是______，提公因式后，另一个因式是**______________.

19. **（淄博市　2002 年）观察数表**

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & -1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & -2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & -3 & & 3 & & -1 & & & \\
 & & 1 & & -4 & & 6 & & -4 & & 1 & & \\
 & 1 & & -5 & & \square & & -10 & & 5 & & -1 & \\
1 & & -6 & & \square & & -20 & & 15 & & -6 & & 1
\end{array}
$$

……

根据其中的规律，在数表中的□内填入适当的数.

20. **多项式** $15x^{m+1}-12x^{m+2}+27x^{2m+1}$**的公因式是______，提公因式**

初二代数

后，另一个因式是______.

三、分解因式

21. $x(a-b)(b-c)(c-a)-y(b-a)(c-b)(a-c)$；

22. $15x(a-b)^2-3y(b-a)$；

23. $(y+1)(y^2-1)-(y+1)^3$；

24. $2(1-x^2)+6a(x-1)^3$；

25. $(a+b)(2x-y)-(a+b)(x-2y)$；

26. $(x-m)^3(x-n)+(x-m)^2(n-x)$；

27. $x(a-b)+y(b-a)-z(a-b)$；

28. $(2x+3)(x-2y)+(x-2y)(x-1)+(2y-x)$；

29. $a(x+y-z)-b(z-x-y)-c(x-z+y)$；

30. $-a(b-a)^2-ab(a-b)^2+ac(b-a)^2$；

31. $ax(a-b+1)-ay(a-b+1)-az(b-a-1)$；

32. $(a-b)(a+b-1)+a-b$；

33. $(a-3)^2-(2a-6)$；

34. $-m^2n(x-y)^n+mn^2(x-y)^{n+1}$；

35. $-8x^{2n+2}y^{n+2}+12x^{n+1}y^{2n+3}$.

四、利用因式分解计算

36. $29\times19.99+41\times19.99+30\times19.99$；

37. $23\frac{3}{5}\times25-12\frac{2}{5}\times25+8\frac{4}{5}\times25$；

38. $1999\times1999+2000+1999$；

39. $9^3-9^2-8\times9^2$；

40. $(-2)^n+2(-2)^{n-1}$；

41. $39\times37-13\times3^4$.

五、先化简，再求值

42. 已知：$x^2+x-1=0$. 试求 x^3+2x^2+2001 的值.

43. 已知 $2x-y=\frac{1}{3}$，$xy=2$，求 $2x^4y^3-x^3y^4$ 的值.

44. 已知 $a-2=b+c$，求 $a(a-b-c)-b(a-b-c)-c(a-b-c)$ 的值.

探究能力测试

45. 利用因式分解计算：$\frac{2^{2002}}{2^{2002}-2^{2003}}$.

46. 设 n 为自然数，试判断 $3+3a+a(a+1)$ 是质数还是合数？并说明理由.

47. 一化工厂生产化学药品 ab^2 袋，另一化工厂生产同种化学药品 ba^2 袋，而第三家化工厂生产此种化学药品 $\frac{ab}{2}$ 袋，则这三家化工厂总计生产此种化学药品多少袋？(a、b 为化工厂生产数量保密代码)

48. 证明：$81^7-27^9-9^{13}$ 能被 45 整除.

8.2 运用公式法

学点探究分析

重点　平方差公式与完全平方公式.

难点　灵活运用公式进行变形与分解.

探究点　运用公式法分解因式的关键是弄清各公式的形式和特点，熟练地掌握公式，并根据所给多项式的特点选择适当的公式进行因式分解. 运用公式法进行因式分解是热点，在题目中出现的频率较高，故熟练掌握乘法公式的反用，是学好本节的一个关键. 运用公式法在实际应用中也有较好的运用，不仅应用于代数式化简、求值、证明恒等式和解方程等代数内容，而且在几何、三角方面也有应用；对于实际问题等应用创新题，它也是解决问题的有力的工具. 因此，它又是学好本节的又一关键.

学习方法技巧

1. 掌握公式的形式和特点

(1) 平方差公式　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. 其特点是：左边是两个数 a，b 的平方差，右边为这两个数的和与差的积，根据左边的特点，运用公式的条件为：①所给多项式有两项；②两项符号相反；③这两项分别可以化为一个数 (或整式) 的平方的形式. 如 $(x-3)^2-4y^2=(x-3)^2-(2y)^2=(x-3+2y)(x-3-2y)$.

(2) 完全平方公式　$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$，其特点是：左边首尾两项和是两个数的平方和，而中间的一项是这两个数的积的 2 倍，其符号可正可负，右边为这两个数的和或差的平方. 根据特点，故运用公式的条件是：①所给多项式有三项；②其中有两项的符号相同，并且这两项可化为两个数 (或整式) 的平方；③另一项为这两个数 (或整式) 的乘积的 2 倍. 如 $4a^2-12ab+9b^2=(2a)^2-2\cdot(2a)\cdot(3b)+(3b)^2=(2a-3b)^2$.

2. 理解公式的运用

在运用公式法分解因式时，首先要弄清公式中的字母既可以是数，也可以是单独字母，也可以是单项式，还可以是多项式，这样增加了运用公式的难度，而在许多情况下，不一定能直接使用公式，需要经过适当组合、变形，方可用公式分解，从而要求运用公式要灵活. 运用公式法一般可按以下步骤进行：

(1) 先看各项有没有公因式，如果有，就先提公因式，包括提系数，首项负号.

(2) 观察项数，根据需要把多项式中的某一整体当作一项，像 $(x+y)^2$ $(a-b)^2$，可以当作两项. 如果是二项式，就考虑用平方差公式 如果是三项式，就考虑用完全平方公式.

(3) 如果分解出来的因式还能分解，就必须继续分解彻底.

(4) 合理变形，巧妙运用. 如分解因式 $(x-y)^2-4(x-y-1)$ 时，将此多项式变形为 $(x-y)^2-4(x-y)+4$ 后，就可以运用完全平方公式进行分解.

能力升级捷径

【例 1】 把下列各式分解因式：

(1) $16-\frac{1}{25}m^2$；　(2) $(a+b)^2-1$；

(3) $-(x+2)^2+16(x-1)^2$；　(4) $-\frac{1}{4}xy^3+0.09xy$.

思维技巧　运用公式法分解因式，其关键在对于公式的识别和把要分解的多项式“对号入座”上. 首先应考虑有无公因式可提 ;其次，相当于公式中的字母 a、b 的，往往是以多项式或单项式出现的，我们应将其看作一个“整体”来替换公式中的字母，从而套用公式分解因式. (1) 中把 $16-\frac{1}{25}m^2$ 可写成 $4^2-\left(\frac{m}{5}\right)^2$；(2) 把“1”看成“$1^2$”，即可利用平方差公式分解因式；(3) 根据加法交换律，$-(x+2)^2+16(x-1)^2$ 可写成 $[4(x-1)]^2-(x+2)^2$；(4) 先提公因式 xy，得 $xy\left(-\frac{1}{4}y^2+0.09\right)$，然后利用平方差公式把 $-\frac{1}{4}y^2+0.09$ 继续进行分解因式.

解　(1) $16-\frac{1}{25}m^2=4^2-\left(\frac{1}{5}m\right)^2=\left(4+\frac{1}{5}m\right)\left(4-\frac{1}{5}m\right)$

(2) $(a+b)^2-1$

$=[(a+b)+1][(a+b)-1]$

$=(a+b+1)(a+b-1)$

(3) $-(x+2)^2+16(x-1)^2$

$= [4(x-1)]^2-(x+2)^2$

$= [4(x-1)+(x+2)][4(x-1)-(x+2)]$

$= (5x-2)(3x-6)$

$= 3(x-2)(5x-2)$

(4) $-\frac{1}{4}xy^3+0.09xy$

$= xy\left[0.3^2-\left(\frac{1}{2}y\right)^2\right]$

$= xy\left(0.3+\frac{1}{2}y\right)\left(0.3-\frac{1}{2}y\right)$

激活思维 1. **应用平方差公式分解的多项式必须是二项式，而这两项都必须是完全平方式，并且这两项的符号相反，只有符合这些条件的多项式才能用平方差公式分解，并且每个因式都必须分解到不能分解为止，所以** $3x-6$ **应继续分解为** $3(x-2)$.

2. **与本题类似的其他变形有：**

(宁波市 2002) 分解因式：$x^3-4x=$________.

解 x^3-4x

$= x(x^2-4)$

$= x(x+2)(x-2)$

【例 2】 把下列各式分解因式：

(1) $a^2-14a+49$；

(2) $9a^2+12a+4$；

(3) $-\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2$；

(4) $\frac{m^2(n+m)^2}{9}+\frac{2m(n+m)^3}{3}+(n+m)^4$.

激活思维 有些题虽不能提公因式，又不能用平方差，但从项及其系数或指数综合分析，可以找出其特点. 如 (1) **可直接用完全平方公式；**(2) **将** $9a^2$ **看作** $(3a)^2$，$4=2^2$，$12a=2\times3a\times2$，**视** $3a$ **为一个整体，显然可以直接应用完全平方公式分解因式；**(3) **先提公因式，按** x **降幂排列后，括号里恰是一个完全平方式；**(4) **先提公因式** $(m+n)^2$，**视** $(m+n)$ **为整体，即可应用完全平方式分解.**

解 (1) $a^2-14a+49=(a-7)^2$

(2) $9a^2+12a+4=(3a)^2+2\cdot3a\cdot2+2^2=(3a+2)^2$

(3) $-\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}(x^2-2xy+y^2)=-\frac{1}{2}(x-y)^2$

(4) $\dfrac{m^2(n+m)^2}{9}+\dfrac{2m(m+n)^3}{3}+(m+n)^4$

$=(m+n)^2\left[\dfrac{m^2}{9}+\dfrac{2}{3}m\cdot(m+n)+(m+n)^2\right]$

$=(m+n)^2\cdot\left[\dfrac{1}{3}m+(m+n)\right]^2$

$=(m+n)^2\cdot\left(\dfrac{4}{3}m+n\right)^2$

激活思维　1. **应用完全平方公式分解的多项式必须是三项式,其中首末两项和是两个数的平方和的形式,而中间的一项是这两个数的积的** 2 **倍.运用公式时,必须弄清哪一项相当于公式中的对应项,这对于准确掌握和运用公式很有好处.**

2. **把完全平方式分解因式时,要根据第二项(乘积项)的符号来选择运用哪一个完全平方式.当乘积项为正号时,应选用和的平方公式:**$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$**;当乘积项为负号时,应选用差的平方公式:**$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

3. **与本题类似的其他变形有:**

分解因式,若 $a^2+ma+\dfrac{1}{9}=(a+n)^2$**,则** $m=$______**,**$n=$______.

解　$\because$ $n^2=\dfrac{1}{9}$**,**$\therefore$ $n=\pm\dfrac{1}{3}$.

故 $a^2+ma+\dfrac{1}{9}=\left(a\pm\dfrac{1}{3}\right)^2$**,从而得** $m=\pm\dfrac{2}{3}$.

【例 3】　把下列各式分解因式:

(1) $(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$;

(2) $-1+a^4$;

(3) $(x+y)^2+4(x-y)^2-4(x^2-y^2)$.

思维技巧　**将几个公式综合运用进行因式分解是本节的难点.排除难点的办法是:首先要把每个公式的形式进行分析,掌握每个公式左、右两边的特点;应仔细观察,先从要分解的多项式的项数入手,如果是二次三项式就考虑用完全平方公式;如果是二项式考虑用平方差公式,然后再去验证要分解的多项式是否满足公式的特点.如第(2)式中,利用加法交换律后产生了平方差公式,分解后又产生了平方差公式;(1)式中,先利用平方差,再利用完全平方;(3)式中的最后一项用平方差公式分解后,看作中间项,就不难看出所给式子是一个完全平方式.**

解　(1)　$(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$

$=(a^2+b^2+2ab)(a^2+b^2-2ab)$

$=(a+b)^2(a-b)^2$

(2) $-1+a^4$

$=a^4-1=(a^2+1)(a^2-1)=(a^2+1)(a+1)(a-1)$

(3) $(x+y)^2+4(x-y)^2-4(x^2-y^2)$

$=(x+y)^2-4(x+y)(x-y)+4(x-y)^2$

$=[(x+y)-2(x-y)]^2$

$=(3y-x)^2$

激活思维 1. 把多项式中的各项的位置作适当的变换,这也是公式的一种变换形式,更是公式法的要求,要养成善于观察、分析题目结构特点的思维方法;把一个普通的公式加以变化,由特殊到一般,设想它的各种可能结构,再从具体的题目中去印证.这样,就可以举一反三,灵活运用.

2. 与本题类似的其他变形有:

(长沙市 2002 年)图 8-2 为杨辉三角系数表,它的作用是指导读者按规律写出形如 $(a+b)^n$(其中 n 为正整数)展开式的系数,请你仔细观察右图中的规律,填出 $(a+b)^4$ 展开式中所缺的系数,

$(a+b)=a+b$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

则 $(a+b)^4=a^4+$____ $a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

解 4.

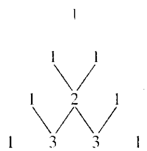


图 8-2

【例 4】 求证 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ 是一个完全平方式.

思维技巧 不能轻易地把前四个一次因式的乘积展开,那样会出现高次项、多项的混乱情形,不利于证明;但前四个一次因式展开又是必然的,故可部分展开,注意到 $1+4=2+3$,若利用乘法结合律,把 $(x+1)(x+4)$ 和 $(x+2)(x+3)$ 分别展开后就会出现 $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1$ 的形式,这就不难发现 (x^2+5x) 作为一个整体 a 同时存在于两个因式中,用换元法即得 $(a+4)(a+6)+1=a^2+10x+25$,易见完全平方式.

证明一 原式 $=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1$

$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+25$

$=(x^2+5x+5)^2$ ∴ 原命题成立

初二代数

证明二　原式 $=[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]+1$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1$

令　$a=x^2+5x+4$，则 $x^2+5x+6=a+2$，

原式 $=a(a+2)+1$

$=a^2+2a+1$

$=(a+1)^2$

即 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1=(x^2+5x+5)^2$

证明三　原式 $=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$

令　$m=\frac{1}{2}[(x^2+5x+4)+(x^2+5x+6)]=x^2+5x+5$

原式 $=(x^2+5x+5-1)(x^2+5x+5+1)+1$

$=(m-1)(m+1)+1=m^2=(x^2+5x+5)^2$

激活思维　1. 因式分解有着广泛的应用，更融合了许多数学思维方法，如换元法，有些题目需要变形凑成某个公式的形式，再用公式法分解因式，因此需要养成较强的观察能力、熟练的变形技能和良好的思维及学习习惯. 关键在于如何选用公式，如何通过变形满足乘法公式所需的条件.

2. 与本题类似的其他变形有：

已知 $a+b=5$，$ab=3$，求代数式 $a^3b-2a^2b^2+ab^3$ 的值.

解　$a^3b-2a^2b^2+ab^3$

$=ab(a^2-2ab+b^2)$

$=ab[(a+b)^2-4ab]$

将 $a+b=5$，$ab=3$ 代入上式得

原式 $=3\times[5^2-4\times3]=3\times13=39$

【例 5】　设 $x+2z=3y$，试判断 $x^2-9y^2+4z^2+4xz$ 的值是不是定值？如果是定值，求出它的值；否则请说明理由.

思维技巧　满足 $x+2z=3y$ 的 x、y、z 有无穷多组值. 求出任一组数代入（*）式：$x^2-9y^2+4z^2+4xz$，都能得到一个数，如果存在两组 x、y、z 的值，代入（*）式后所得的两个值不同，那么（*）式的值就不是定值.

但是，如果尝试几组 x、y、z 的值代入（*）值都是一样，那么就可以猜测对于任意一组 x、y、z 的值代入（*）都是定值. 当然，猜想的正确性要经过论证才能确定，所以要设法进行论证. 应把 $x+2z=3y$ 这一条件中字母间的关系特征和 $x^2-9y^2+4z^2+4xz$ 中字母间的关系作比较，寻找两者之间的共同点、巧合点，恰当运用条件. 尝试运用条件来化简多项式，以达到降次、消元的效果，从而断定最后结果是否为定值.