2005 年全国硕士研究生入学考试
数学一试题

一、填空题(本题共 6 小题，每小题 4 分,满分 24 分把答案填在题中横线上)

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为_____.

(2) 微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为_____.

(3) 设函数 $u(x,y,z)=1+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{18}$，单位向量 $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$，则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,3)}$ =_____.

(4) 设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域，Σ 是 Ω 的整个边界的外侧，则

$$\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\text{_____}.$$

(5) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维列向量，记矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\ \boldsymbol{B}=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3).$$

如果 $|\boldsymbol{A}|=1$，那么 $|\boldsymbol{B}|$=_____.

(6) 从数 1,2,3,4 中任取一个数，记为 X，再从 $1,\cdots,X$ 中任取一个数，记为 Y，则 $P\{Y=2\}$=_____.

二、选择题(本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分.每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内(　　).

(A) 处处可导　　(B) 恰有一个不可导点

(C) 恰有两个不可导点　　(D) 至少有三个不可导点

(8) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，“ $M\Leftrightarrow N$ ”表示“ M 的充分必要条件是 N ”，

需要全本请访问 www.ertongbook.com

则必有(　　).

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是奇函数

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是偶函数

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是周期函数

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是单调函数

(9) 设函数

$$u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t,$$

其中函数 φ 具有二阶导数，ψ 具有一阶导数，则必有(　　).

(A) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　(B) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

(C) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　(D) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(10) 设有三元方程 $xy-z\ln y+\mathrm{e}^{xz}=1$，根据隐函数存在定理，存在点(0,1,1)的一个邻域，在此邻域内该方程(　　).

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$

(11) 设 λ_1,λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 α_1,α_2，则 α_1，$\boldsymbol{A}(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是(　　).

(A) $\lambda_1\neq 0$　　(B) $\lambda_2\neq 0$　　(C) $\lambda_1=0$　　(D) $\lambda_2=0$

(12) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geq 2)$ 阶可逆矩阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{A}^*$,$\boldsymbol{B}^*$ 分别为 A，B 的伴随矩阵，则(　　).

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $\boldsymbol{B}^*$　　(B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 列得 $\boldsymbol{B}^*$

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得-$\boldsymbol{B}^*$　　(D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得-$\boldsymbol{B}^*$

(13) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，则(　　).

(A) a=0.2,b=0.3　　(B) a=0.4,b=0.1

(C) a=0.3,b=0.2　　(D) a=0.1,b=0.4

(14) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ $(n \geq 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则(　　).

(A) $n\overline{X} \sim N(0,1)$　　(B) $nS^2 \sim \chi^2(n)$

(C) $\dfrac{(n-1)\overline{X}}{S} \sim t(n-1)$　　(D) $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1, n-1)$

三、解答题(本题共 9 小题，满分 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15) (本题满分 11 分)

设

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\},$$

$[1 + x^2 + y^2]$ 表示不超过 $1 + x^2 + y^2$ 的最大整数.计算二重积分 $\iint\limits_D xy[1 + x^2 + y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

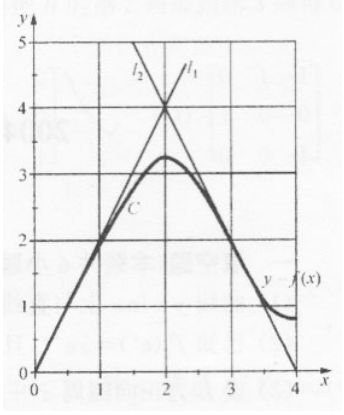
(16) (本题满分 12 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1 + \dfrac{1}{n(2n-1)}\right)x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

(17) (本题满分 11 分)

如右图，曲线 C 的方程为 $y = f(x)$，点(3,2)是它的一个拐点，直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点(0,0)与(3,2)处的切线，其交点为(2,4).设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数，计算定积分

$$\int_0^3 (x^2 + x) f'''(x)\mathrm{d}x.$$



(18) (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 在[0,1]上连续，在(0,1)内可导，且 $f(0) = 0, f(1) = 1$.证明：

(Ⅰ) 存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f(\xi) = 1 - \xi$；

(Ⅱ) 存在两个不同的点 $\eta, \xi \in (0,1)$，使得

$$f'(\eta) f'(\zeta) = 1.$$

(19) (本题满分 12 分)

设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数，在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上，曲线积分 $\oint_L \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y}{2x^2 + y^4}$ 的值恒为同一常数.

(Ⅰ) 证明：对右半平面 $x>1$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C，有

$$\oint_C \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y}{2x^2 + y^4} = 0 \text{ ；}$$

(Ⅱ) 求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

(20) (本题满分 9 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(Ⅰ) 求 a 的值；

(Ⅱ) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，把 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成标准形；

(Ⅲ) 求方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解.

(21) (本题满分 9 分)

已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行是 $(a,b,c), a,b,c$ 不全为零，矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix}$ (k 为常数)，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

(22) (本题满分 9 分)

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求：(Ⅰ) (X,Y)的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$ ；

(Ⅱ) $Z = 2X - Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(23) (本题满分 9 分)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ $(n > 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，记

$$Y_i = X_i - \overline{X}, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

求：(Ⅰ) Y_i 的方差 $D(Y_i), i = 1,2,\cdots,n$ ；

(Ⅱ) Y_1 与 Y_n 的协方差 $\mathrm{cov}(Y_1, Y_n)$.