2005 年全国硕士研究生入学考试

数学二试题

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) 设 $y=(1+\sin x)^x$，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=\pi}$ _____.

(2) 曲线的斜渐近线方程为_____.

(3) $\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} =$ _____

(4) 微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 的解为_____.

(5) 当 $x\to 0$ 时,

$$\alpha(x)=kx^2 \text{ 与 } \beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$$

等价无穷小，则 k=_____.

(6) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为维列向量，记矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3).$$

如果 $|\boldsymbol{A}|=1$，那么 $|\boldsymbol{B}|$=_____.

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分.每小题线出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

（7） 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 f（x）在(-∞,+∞)内（　　）.

（A） 处处可导　　（B） 恰有一个不可导点

（C） 恰有两个不可导点　　（D） 至小有三个不可导点

（8） 设 $f(x)$是连续函数 $f(x)$的一个原函数，“ $M\Leftrightarrow N$ ”表示“ M 的充分必要条件是 N”，则必有（　　）.

$F(x)$是偶函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是奇函数

$F(x)$是奇函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是隅函数

$F(x)$是周期函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是周期函数

需要全本请访问 www.ertongbook.com

$F(x)$是单调函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$是单调函数

（9） 调函数 $y=y(x)$由参数方程 $\begin{cases} x=t^2+2t \\ y=\ln(1+t) \end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$在 $x=3$ 处的法线与 x 轴交点的横坐标是（　　）.

(A) $\frac{1}{8}\ln 2+3$　　(B) $-\frac{1}{8}\ln 2+3$

(C) $-8\ln 2+3$　　(D) $8\ln 2+3$

(10) 设区域为 $D=\{(x,y)\,|x^2+y^2\leq 4, x\geq 0, y\geq 0\}$, $f(x)$为 D 上的正值连续函数，a,b 为常数，则（　　）.

$$\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=(\quad).$$

(A) $ab\pi$　　(B) $\frac{ab}{2}\pi$

(C) $(a+b)\pi$　　(D) $\frac{(a+b)}{2}\pi$

（11） 设函数

$$u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t,$$

其中函数 φ 具有二阶导数 ψ，具有一阶导数，则必有（　　）.

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　(B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

（12） 设函数 $f(x)=\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则（　　）.

$x=0, x=1$ 都是 $f(x)$的第一类间断点

$x=0, x=1$ 都是 $f(x)$的第二类间断点

$x=0$ 是 $f(x)$的第一类间断点，　$x=1$ 是 $f(x)$的第二类间断点

$x=0$ 是 $f(x)$的第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$的第一类间断点

（13） 设 $\lambda_1\lambda_2$ 是矩阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 α_1,α_2，则 $\alpha_1, A(\alpha_1+\alpha_2)$

线性无关的充分必要条件是（　　）.

(A) $\lambda_1 \neq 0$　　(B) $\lambda_2 \neq 0$

(C) $\lambda_1 = 0$　　(D) $\lambda_2 = 0$

（14） 设 A 为 $n(n \geq 2)$阶可逆矩阵，交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩 B，A^*，B^*分别为 A，B 的伴随矩阵，则（　　）.

（A） 交换 A^*的第 1 列与第 2 列得 B^*

（B） 交换 A^*的第 1 行与第 2 行得 B^*

（C）交换 A^*的第 1 列与第 2 列得$-B^*$

（C）交换 A^*的第 1 行与第 2 行得$-B^*$

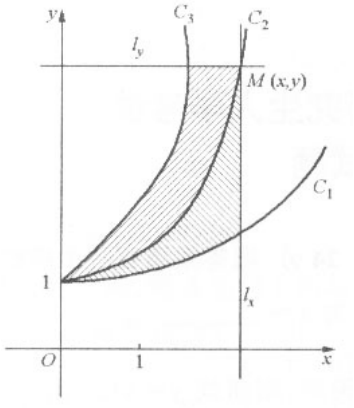
三、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分.解答应写文字说明、证明过程或演算步骤）

（15）（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)$连续，且 $f(0) \neq 0$,求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x (x-t) f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}$.

（16） （本题满分 11 分）

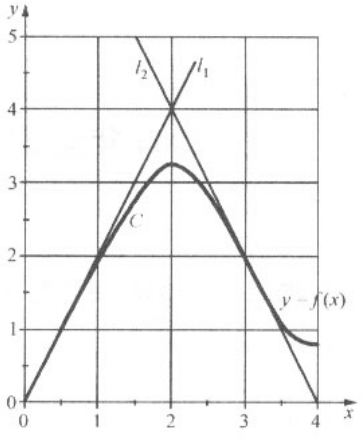
如图，C_1, C_2 分别是 $y=\dfrac{1}{2}(1+\mathrm{e}^x)$ 和 $y=\mathrm{e}^x$ 的图像,过点$(0,1)$的曲线 C_3 是一单调增函数的图像.过 C_2 上任一点 $M(x,y)$分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 l_x 和 l_y.记 C_1, C_2 与 l_x 所围图形的面积为 S_1（x）；C_2, C_3 与 l_y 所围图形的面积为 S_2（y）.如果总有 S_1（x）$= S_2$（y），求曲线 C_3 的方程 $x=\varphi(y)$.



（17）（本题满分 11 分）

如图，线 C 的方程为 $y=f(x)$,点（3，2）是它的一个拐点，直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点（0，0）与（3，2）处的切线，其交点为（2，4）.设函数 $f(x)$具有三阶连续导数，计算定积分

$$\int_0^3 (x^2+x) f'''(x)\mathrm{d}x.$$



（18）（本题满分 12 分）

用变量代换 $x=\cos t(0<t<\pi)$化简微分方程$(1-x^2)y''-xy'+y=0$，并求其满足 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$ 的特解.

（19） （本题满分 12 分）

已知函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续，在（0，1）内可导，且 f（0）$=0, f(1)=1$，证明：

存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0,1)$，使得 $f'(\eta) f'(\zeta)=1$.

（20） （本题满分 10 分）

已知函数 $z=f(x,y)$的全微分 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$，并且 $f(1,1)=2$，求 $f(x,y)$在椭圆域 $D=\left\{(x,y) \mid x^2+\frac{y^2}{4} \le 1\right\}$上的最大值和最小值.

（21） （本题满分 9 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D |x^2+y^2-1| \mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\} \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

（22）（本题满分 9 分）

确定常数 a,使向量组 $\alpha_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}}, \alpha_2=(1,a,1)^{\mathrm{T}}, \alpha_3=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$ 可由向量组 $\beta_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}}, \beta_2=(-2,a,4)^{\mathrm{T}}, \beta_3=(-2,a,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示，但是向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

（23） （本题满分 9 分）

已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行的是（a,b,c），a,b,c 不全为零，矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix}$（$k$ 为常数），且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.