全国各类成人高考强化辅导丛书

数　　学

(文史财经类)

邓　均　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

全国各类成人高考强化辅导丛书·数学(文)/邓均编著.- 北京:北京大学出版社
ISBN 7-301-04705-3

Ⅰ.全… Ⅱ.邓… Ⅲ.数学课-成人教育:高等教育-入学考试-自学参考资料
Ⅳ.G723.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 70530 号

书　　名:全国各类成人高考强化辅导丛书·数学(文史财经类)
著作责任者:邓　均
责 任 编 辑:沈承凤
标 准 书 号:ISBN 7-301-04705-3/G·609
出　版　者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn
电　　话:出版部 62752015　发行部 62750672　邮购部 62752019
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
排　印　者:
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
787×1092　16 开本　13.5 印张　337 千字
2000 年 10 月第 1 版　2004 年 3 月第 4 次修订
2004 年 3 月第 5 次印刷
定　　价:18.00 元

前　言

《全国各类成人高考强化辅导丛书》包括语文、数学(文史财经类)、历史、地理、英语、数学(理工农医类)、物理、化学共8种,供参加各类成人高考的考生及各类成人高考辅导班作为教材使用。

本丛书由北京大学附中、中国人民大学附中、北京101中学、北京110中学等学校中有多年教学经验的中学特级和高级教师精心编写而成。由于作者多年从事成人高考辅导班的教学工作,对历年成人高考有专门研究,因此了解考生的知识结构及考查的重点,了解考生的需求,在编写中具有针对性。

依据教育部2002年8月颁发的新大纲,根据目前成人高考试题的特点,我们对2003年版进行了删改和补充,使改版后的2004年版在内容上紧扣新大纲,简明扼要,覆盖面广,重点突出,针对性强,使成人考生能够在短时间内迅速提高应试能力。

本丛书每章均由"知识点·考点"、"典型例题"、"习题"、"习题解答"四部分组成。还附有新大纲中"考试形式及试卷结构"和"样题及参考答案"、新编两套模拟试题以及2003年成人高等学校招生全国统一考试试题及解答。

知识点——简明扼要地介绍本章所要掌握的知识点、基本概念、相关公式,力求清晰明了。

考点——深入分析新大纲及近几年成人高考试题,提炼出重点考查的内容,力求准确到位。

典型例题——精选具有典型意义的有代表性的例题(包括近几年成人高考题),揭示出解题规律和方法。例题由分析、解题过程、点评等几部分组成。

解题过程:让考生学会正确地、有条不紊地表达解题过程,保证会做的题不丢分。

点评或分析:使考生学会正确地分析题目的条件、结构,找到解题的思路和方法;点明解题的方法和技巧,使考生了解此类题的考查点和干扰点,拓宽思维、举一反三、融会贯通,提高解题的能力。

习题及习题解答——充分考虑到成人考生时间紧,没有老师专门辅导的特点,精选的每道习题都给出详尽的解答。

考试形式及试卷结构和样题——让学生了解新大纲中对考试形式的要求,了解试卷内容比例、题型比例、试题难易比例,使考生了解成人高考命题的特点和趋势,做到心中有数。

编　者

2004年3月于北京

《全国各类成人高考强化辅导丛书》编委会

目　　录

第一章　数、式、方程和方程组

【知识点 •考点】

一、数

1. 实数

有理数与无理数统称为实数.

有理数：有限小数或循环小数统称有理数，任何一个有理数均可以表示成$\frac{n}{m}$形式，其中$m, n \in Z$且$m \neq 0$.

无理数：无限不循环小数称为无理数.

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\end{cases}\\ \text{无理数}\end{cases}\qquad \text{小数}\begin{cases}\text{有限小数}\\ \text{无限小数}\begin{cases}\text{无限循环小数}\\ \text{无限不循环小数}\end{cases}\end{cases}$$

2. 数轴

规定了方向和长度单位的直线叫做数轴.

3. 相反数

只有符号不同的两个数，称其中一个数是另一个数的相反数. 零的相反数为零.

互为相反数的两个数a与$-a$，在数轴上关于原点对称.

4. 倒数

1 除以某非零数的商称为该非零数的倒数. 零没有倒数. 当$a \neq 0$时，$\frac{1}{a}$与a互为倒数，即

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

5. 绝对值

一个正数的绝对值是它的本身，一个负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值为零，即

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

绝对值的几何意义：实数a的绝对值表示数轴上实数a所对应的点到原点的距离.

6. 平方根与算术平方根

一个数x和一个数a，如果有$x^2 = a(a \geq 0)$，那么，这个数x叫数a的平方根. 正数a的平方根有两个，它们互为相反数，记为$x = \pm\sqrt{a}$；零的平方根为零.

算术平方根：正数a的正平方根叫做算术平方根，记作$\sqrt{a}$. 零的算术平方根为零.

7. 运算律与运算顺序

	加法	乘法
交换律	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
结合律	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
分配律	$a(b+c)=ab+ac$	

在同一个式子里,先乘方、开方,然后乘、除,最后加、减,同级运算中按运算顺序进行运算,有括号时,由最里层括号算起,逐层去括号,按去括号法则变号.

二、式

1. 代数式

用运算符号(加、减、乘、除、乘方、开方)把数或表示数的字母连结起来而成的式子叫做代数式.

单独一个数或字母也叫代数式.

代数式的分类:

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{无理式}\end{cases}$$

代数式的值: 用数值代替代数式里的字母,计算后所得的结果.

2. 整式

(1) 单项式: 由数和字母相乘而成的代数式叫做单项式,单独一个数或字母也叫做单项式,单项式中数字因数叫做单项式的系数,所有字母的指数和叫做单项式的次数.

(2) 多项式: 几个单项式的和叫做多项式,其中每一个单项式叫做多项式的项,次数最高的项的次数叫做多项式的次数,单项式与多项式统称为整式.

(3) 整式的运算: 整式能进行加、减、乘法的运算,其结果仍为整式,整式可以进行带余除法的运算,整式运算满足交换律、结合律、分配律.

幂的运算法则

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},\ (a^m)^n=a^{mn};$$

$$a^m\div a^n=a^{m-n}(a\neq 0),\ (ab)^n=a^nb^n.$$

乘法公式

完全平方式 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$,

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$;

平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$;

立方和公式 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$;

立方差公式 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

(4) 多项式的因式分解: 把一个多项式化为几个整式乘积的形式叫做因式分解或分解因式.常用的方法有: 提取公因式法,分组分解法,十字相乘法,求根公式法等.

3. 分式

设 A, B 表示两个整式,且 B 中含有字母,则式子$\frac{A}{B}$叫做分式.分子和分母没有公因式的分式叫做最简分式.

分式有意义　分母的值$\neq 0$.

分式的值为零　分子的值$=0$且分母的值$\neq 0$.

(1) 分式的基本性质:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times m}{b\times m},\quad \frac{a}{b}=\frac{a\div m}{b\div m}\ (m\text{为不等于零的整数}).$$

(2) 分式的符号法则:

$$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{-a}{-b}=-\frac{a}{b},$$

即分式的分子、分母和分式的本身的符号同时改变其中任何两个,分式的值不变.

(3) 分式的运算: 分式有与分数类似的约分、通分,四则运算法则.

① 约分　$\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}$.

② 分式的加减　$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$.

③ 分式的乘除　$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{a}=\frac{ac}{ab}$,　$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

4. 二次根式

(1) 定义: 当$a\geq 0$时,式子$\sqrt{a}$叫做二次根式.

(2) 性质: ① $(\sqrt{a})^2=a(a\geq 0)$;

② $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a, & (a\geq 0), \\ -a, & (a<0); \end{cases}$

③ $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geq 0, b\geq 0)$;

④ $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geq 0, b>0)$.

(3) 最简二次根式: ① 被开方式的每一个因式的指数都小于 2, ② 被开方式中不含分母. 这样的二次根式叫做最简二次根式.

同类根式: 化为最简二次根式后,若被开方式相同,则这样的根式称为同类二次根式.

(4) 二次根式运算:

① 二次根式的加减　将根式化为最简二次根式后,同类根式可相加减(系数相加减,根指数与被开方式不变).

② 二次根式的乘除　按二次根式性质③,④进行.

③ 分母有理化　如果一个代数式的分母是无理式,用分母的有理化因式同乘分子、分母,将分母化为有理式变形的过程叫做分母有理化.

如果两个无理式的乘积是一有理式,则称其中一个无理式是另一个无理式的有理化因式.

二次根式常见的有理化因式:

$$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\text{与}\sqrt{a}\mp\sqrt{b},\quad a\pm\sqrt{b}\text{与}a\mp\sqrt{b}.$$

二次根式运算的结果都要化成最简根式并把分母有理化.

三、方程和方程组

1. 方程的有关概念

(1) 方程: 含有未知数的等式叫做方程.

能使方程左、右两边相等的未知数的值叫做方程的解.

求方程的解或说明方程无解的过程叫做解方程.

(2) 同解方程: 如果第一个方程的每一个解都是第二个方程的解, 并且第二个方程的每一个解也是第一个方程的解, 则称这两个方程为同解方程.

同解原理:

① 方程的两边都加上(或都减去) 同一个数或同一个整式, 所得方程与原方程同解.

② 方程的两边都乘以(或都除以) 不等于零的同一个数, 所得方程与原方程同解.

(3) 方程的增根与失根: 在解方程的过程中, 由于方程变形, 未知数的允许值范围扩大(或缩小) 了, 就可能产生增根(或失根) .

(4) 方程
- 代数方程
  - 有理方程
    - 整式方程
    - 分式方程
  - 无理方程
- 超越方程(指数方程、对数方程、三角方程、反三角方程)

解代数方程的基本思想:

分式方程: 去分母化为整式方程.

无理方程: 去根号化为有理方程.

高次方程: 降次化为一次或二次方程.

多元方程: 消元化为一元方程.

超越方程: 化为代数方程.

在这些方程中最基本的方程是一元一次方程和一元二次方程, 其余的方程均可通过一定的法则转化为一元一次或一元二次方程解之.

2. 一元一次方程

只含有一个未知数, 并且未知数的次数是一次的方程叫做一元一次方程.

一般形式: $ax+b=0(a\neq 0)$.

其解 $x=-\dfrac{b}{a}(a\neq 0)$, 当 $a=0, b\neq 0$ 时方程无解; 当 $a=0$, 且 $b=0$ 时方程解为一切实数.

3. 一元二次方程

只含有一个未知数, 并且未知数的最高次是二次的方程叫做一元二次方程.

一般形式: $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$.

解法: (1) 因式分解法;

(2) 开平方法;

(3) 配方法;

(4) 公式法.

求根公式: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

判别式: $\Delta=b^2-4ac$.

$\Delta>0$ 方程有两个不相等的实数根;

$\Delta=0$ 方程有两个相等的实数根;

$\Delta<0$ 方程没有实数根.

根与系数的关系(韦达定理) :

设 x_1, x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个根, 则

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

推论 若方程 $x^2+px+q=0$ 的两根为 x_1, x_2, 那么

$$x_1+x_2=-p,\quad x_1x_2=q.$$

逆定理: 以两个数 x_1, x_2 为根的一元二次方程(二次项系数为 1)是

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0.$$

4. 方程组

(1) 二元一次方程组: 含有相同的两个未知数的两个一次方程组成的方程组叫做二元一次方程组.

一般形式:
$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

解法: ① 代入消元法; ② 加减消元法.

(2) 三元一次方程组: 含有相同的三个未知数的三个一次方程组成的方程组叫三元一次方程组.

解题思路: 三元一次方程组通过"消元"化为二元一次方程组求解.

(3) 二元二次方程组: 由含有相同未知数的一个二元一次方程和一个二元二次方程或者由两个二元二次方程组成的方程组都叫做二元二次方程组.

二元二次方程有两类基本类型:

① 由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组, 这一类二元二次方程组的一般形式是:

$$\begin{cases} Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \\ ax+by+c=0, \end{cases}$$

其中 A, B, C 不全为零, a, b 不全为零.

它的一般解法是代入法.

② 由两个二元二次方程组成的方程组, 这一类二元二次方程组的一般形式是:

$$\begin{cases} A_1x^2+B_1xy+C_1y^2+D_1x+E_1y+F_1=0, \\ A_2x^2+B_2xy+C_2y^2+D_2x+E_2y+F_2=0. \end{cases}$$

这一类方程组解法比较复杂, 其解题思路, 消元与降次.

本章是数学最基础的知识, 是起奠基作用的, 后面各章各种命题归结到最基本的运算后均与本章知识有关.

【典型例题】

例 1 已知实数 a, b 之间满足条件: $a>0$ 且 $a<-b$, 则下列条件中取正值的是(　　).

(A) $a+b$; (B) $|a|-|b|$; (C) $a-b$; (D) $|a+b|-|a-b|$.

解 因为 $a>0$, 且 $a<-b$, 则 $b<0$, $-b>0$, 所以 $a-b=a+(-b)>0$. 选 C.

例 2 如果 $-a|a|=a^2$, 那么 a 是(　　).

(A) 正数; (B) 大于 1;

(C) 大于零而小于 1 的正数; (D) 非正数.

解 从已知条件 $-a|a|=a^2$ 的右端是 a^2 必是正数或 0, 于是 $-a|a|\geq 0$, $-a\geq 0$, 即 $a\leq 0$.

选 D.

例 3 $\sqrt{a^2}-a$ 是( ).

(A) 负数; (B) 非负数; (C) 0; (D) 正数.

解 因为 $\sqrt{a^2}-a=|a|-a$, 由绝对值定义可得: 当 $a\geq 0$ 时, $|a|-a=a-a=0$; 当 $a<0$ 时, $|a|-a=-a-a=-2a>0$. 选 B.

例 4 已知 $(a-1)\sqrt{-\frac{1}{a-1}}$ 在实数范围内有意义, 化简后得( ).

(A) $\sqrt{1-a}$; (B) $\sqrt{a-1}$; (C) $-\sqrt{1-a}$; (D) $-\sqrt{a-1}$.

解 因为 $(a-1)\sqrt{-\frac{1}{a-1}}$ 在实数范围内有意义, 被开方数必为非负数, 所以 $a-1<0$, 即 $1-a>0$, $(a-1)\sqrt{-\frac{1}{a-1}}=(a-1)\sqrt{\frac{1}{1-a}}=(a-1)\sqrt{\frac{1-a}{(1-a)(1-a)}}=(a-1)\frac{1}{1-a}\sqrt{1-a}=-\sqrt{1-a}$. 选 C.

例 5 $a<0$, 化简 $|a-|-a||$.

分析 绝对值和算术根都是非负数, 在去掉绝对值符号时, 必须先考虑绝对值符号内代数式的符号.

解 因为 $a<0$, 所以 $-a>0$, 所以 $|-a|=-a$. 故原式 $=|a-(-a)|=|2a|=-2a$.

例 6 化简 $|3x+2|-|1-2x|$.

分析 此题要化简必须去掉绝对值符号, 要去掉绝对值符号, 必须知道绝对值符号内代数式的符号; 若不知道, 应讨论, 其一般方法是采用"零点分区间法", 即先求出使各代数式的值为零的字母的值, 这些值将字母的取值范围分为若干个区间, 然后逐个区间地进行讨论各代数式在此区间内的符号, 然后, 去掉绝对值符号, 再进行化简(参见图 1-1).

解 $|3x+2|-|1-2x|=|3x+2|-|2x-1|$.

令 $3x+2=0$, $x=-\frac{2}{3}$; 令 $2x-1=0$, $x=\frac{1}{2}$.

当 $x<-\frac{2}{3}$ 时, 原式 $=-(3x+2)-[-(2x-1)]=-x-3$;

当 $-\frac{2}{3}\leq x<\frac{1}{2}$ 时, 原式 $=(3x+2)-[-(2x-1)]=5x+1$;

当 $x\geq\frac{1}{2}$ 时, 原式 $=(3x+2)-(2x-1)=x+3$.

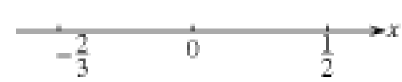

图 1-1

点评 在解题之前应使绝对值内各代数式标准化, 即按字母的降幂排列, 并使最高次项的系数为正, 以减少化简过程中出错的可能性. 另外, 今后解不等式、解方程时, 若不等式或方程中含有两个以上的绝对值符号时, 去绝对值符号的一般方法都是采用"零点分区间法".

例 7 已知 x, y, z 为实数, 且 $\sqrt{x-2}+3|y+1|+5(2z+1)^2=0$, 求 $x+y^{11}+z^2$ 的相反数的倒数的立方.

分析 绝对值、算术根和完全平方数都是非负数, 当若干个非负数的和为零时, 这几个数都为零, 利用这一特点, 我们可以求出 x, y, z 的值.

解 因为 $\sqrt{x-2}+3|y+1|+5|2z+1|^2=0$, 所以 $x=2$, $y=-1$, $z=-\frac{1}{2}$, 所以 $x+y^{11}+z^2=2+(-1)^{11}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$. 故 $x+y^{11}+z^2$ 的相反数的倒数的立方为 $\left(-\frac{4}{5}\right)^3=-\frac{64}{125}$.

点评 解此题时应掌握非负数概念，及非负数的性质．另外还应注意相反数与倒数这两个概念的区别．

例8 **计算** $\dfrac{\left(-3\frac{1}{2}\div 2\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{17}-0.125\div\frac{17}{3}}{1.25\div 5\frac{2}{3}}$.

解 **原式**$=\dfrac{-\frac{7}{2}\times\frac{3}{7}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{17}-\frac{1}{8}\times\frac{3}{17}}{\frac{5}{4}\times\frac{3}{17}}=\dfrac{-\frac{3}{4}\times\frac{3}{17}-\frac{1}{8}\times\frac{3}{17}}{\frac{5}{4}\times\frac{3}{17}}$

$=\dfrac{\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{8}\right)\times\frac{3}{17}}{\frac{5}{4}\times\frac{3}{17}}=\dfrac{-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}}{\frac{5}{4}}$

$=-\dfrac{\frac{7}{8}}{\frac{5}{4}}=-\frac{7}{8}\times\frac{4}{5}=-\frac{7}{10}$.

点评 分数、小数混合运算时通常把小数化为分数，带分数化为假分数，计算较为简便．运算中应注意运算律的应用，简化运算．

例9 **计算**

$\left[-3\times\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}+(-2^2)\times 0.125+(\sqrt{3}-1)^0\right]\div\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}}\div\left|2\times(-1.25)^2-3\frac{5}{8}\right|$.

解 **原式**$=\left[-3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2-4\times\frac{1}{8}+1\div\frac{3}{4}\right]\div\left|2\times\left(-\frac{5}{4}\right)^2-3\frac{5}{8}\right|$

$=\left[-3\times\frac{4}{9}-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\right]\div\left|\frac{25}{8}-\frac{29}{8}\right|=\left[-\frac{4}{3}-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\right]\div\frac{1}{2}=-1$.

点评 本题中应注意，乘方运算的底$-2^2\neq(-2)^2$，对于负指数、零指数及分数指数幂的意义要清楚．

例10 (1) **当** $x=-\frac{2}{3}$**时，求代数式** $5x-\{2x-5-[13x-(4x+7)]\}$**的值**.

(2) **当** $x=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$**时，求代数式**$\dfrac{x^2+5x+6}{x^3+2x^2-9x-18}$**的值**.

分析 求代数式的值要注意所给条件及所求的代数式能否化简，能化简的应先化简，再代入求值，这样可以简化运算．当代数式含有几层括号时，应从里向外一层一层地去括号，并边去括号边合并同类项，注意括号前是“-”号时，去括号时括号内的每一项都要变号．

解 (1) $5x-\{2x-5-[13x-(4x+7)]\}=5x-\{2x-5-[13x-4x-7]\}$

$=5x-\{2x-5-[9x-7]\}=5x-\{2x-5-9x+7\}$

$=5x-\{-7x+2\}=5x+7x-2=12x-2$.

当 $x=-\frac{2}{3}$**时，原式**$=12\times\left(-\frac{2}{3}\right)-2=-10$.

(2) $x=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=3-2\sqrt{2}$.

原式$=\dfrac{(x+2)(x+3)}{x^2(x+2)-9(x+2)}=\dfrac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x-3)}=\dfrac{1}{x-3}$.

用 $x=3-2\sqrt{2}$ 代入, 得原式 $=\frac{1}{3-2\sqrt{2}-3}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

例 11 **计算** $(2a+b-c-3d)(2a-b-c+3d)$.

分析 本题是多项式与多项式的乘法运算, 注意此题的结构特点, 可考虑用平方差公式. 关键是把每个括号内的四项分为两组, 分组的根据是两个括号内完全相同的项为一组, 仅仅符号相反的项为另一组.

解 $(2a+b-c-3d)(2a-b-c+3d)=[(2a-c)+(b-3d)][(2a-c)-(b-3d)]$

$=(2a-c)^2-(b-3d)^2=4a^2-4ac+c^2-b^2+6bd-9d^2$.

例 12 **分解因式** $-2x^{3m}+12x^{2m}y^2-18x^my^4$.

分析 本题各项有公因式, 因此先提取公因式, 当首项系数为负时, 常提取出负号, 便于分解.

解 **原式** $=-2x^m(x^{2m}-6x^my^2+9y^4)=-2x^m(x^m-3y^2)^2$.

例 13 **分解因式** x^3-2x-4.

分析 本题根据其结构特点应用分组分解法, 分组分解法常将原式进行适当的拆项或补项, 再进行分组分解, 也称拆补法.

解法 1 $x^2-2x-4=x^3-8-2x+4=(x^3-8)-(2x-4)$

$=(x-2)(x^2+2x+4)-2(x-2)=(x-2)(x^2+2x+2)$.

解法 2 $x^3-2x-4=x^3-4x+2x-4=(x^3-4x)+(2x-4)$

$=x(x+2)(x-2)+2(x-2)=(x-2)(x^2+2x+2)$.

解法 3 $x^3-2x-4=x^3-2x^2+2x^2-2x-4=x^2(x-2)+2(x-2)(x+1)$

$=(x-2)(x^2+2x+2)$.

例 14 **分解因式** $x^2-4xy+4y^2-6x+12y+8$.

分析 本题有多种解法, 可以看成关于 x, y 的二次三项式, 也可以看成关于其中一个字母 x 的二次三项式, 也可以用待定系数法.

解法 1 **原式** $=(x^2-4xy+4y^2)-6(x-2y)+8=(x-2y)^2-6(x-2y)+8$

$=(x-2y-2)\cdot(x-2y-4)$.

解法 2 **原式** $=x^2-(4xy+6x)+(4y^2+12y+8)=x^2-2(2y+3)x+4(y+1)(y+2)$

$=[x-2(y+1)][x-2(y+2)]=(x-2y-2)(x-2y-4)$.

点评 对多项式进行因式分解常用的方法有: 提取公因式法, 分组分解法, 十字相乘法, 公式法等. 因式分解时, 特别要注意分解到每一个因式都不能再分解为止.

例 15 **求值**

(1) 已知 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$, 求 $\frac{a+b+2ab+2b^2}{2ab+b^2}$ 的值.

(2) 已知 $x=\frac{1}{2}$, 求 $\left(\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{2x-1}{2x+1}\right)\div\left[1\div\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{4x^2}\right)\right]\div\left(1-\frac{2}{2x+1}\right)$ 的值.

分析 先化简, 后代入求值.

解 (1) 由 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$, 得 $\frac{a+b}{ab}=2$, 即 $a+b=2ab$. 因此

$$\frac{a+b+2ab+2b^2}{2ab+b^2}=\frac{2ab+2ab+2b^2}{2ab+b^2}=\frac{2(2ab+b^2)}{2ab+b^2}=2.$$

(2) $\left(\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{2x-1}{2x+1}\right)\div\left[1\div\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{4x^2}\right)\right]\div\left(1-\frac{2}{2x+1}\right)$

$$=\frac{(2x+1)^2-(2x-1)^2}{(2x-1)(2x+1)}\div\left[1\div\frac{4x^2-4x+1}{4x^2}\right]\div\frac{2x+1-2}{2x+1}$$

$$=\frac{8x}{(2x-1)(2x+1)}\div\frac{4x^2}{(2x-1)^2}\div\frac{2x-1}{2x+1}$$

$$=\frac{8x}{(2x-1)(2x+1)}\times\frac{(2x-1)^2}{4x^2}\times\frac{2x+1}{2x-1}=\frac{2}{x}.$$

又因为 $x=\frac{1}{2}$, 所以原式 $=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$.

例 16 化简 $\sqrt[4]{-a}\cdot\sqrt[3]{a}$ 的结果为( ).

(A) $\sqrt[7]{-a^2}$; (B) $\sqrt[12]{-a^7}$; (C) $-\sqrt[12]{-a^7}$; (D) $\sqrt[12]{a^7}$.

分析 本题是两个根式相乘, 根据法则应先将它们化为同次根式.

解法 1 根据 $\sqrt[4]{-a}$ 知 $a\leq0$, 所以

$$\sqrt[4]{-a}\cdot\sqrt[3]{a}=\sqrt[4]{-a}\cdot\sqrt[3]{-(-a)}=\sqrt[12]{(-a)^3}\left[-\sqrt[12]{(-a)^4}\right]$$
$$=-\sqrt[12]{(-a)^7}=-\sqrt[12]{-a^7}.$$

选 C.

解法 2 (排除法).

观察(A)的结果是 $\sqrt[7]{-a^2}$, 因为根指数应该是 4×3 是 12, 所以(A)是错误的; 观察(B)的结果是 $\sqrt[12]{-a^7}$, 而 $-a^7\geq0$, 所以 $\sqrt[12]{-a^7}$ 是非负数. 而 $\sqrt[4]{-a}\geq0$, $\sqrt[3]{a}=-\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[12]{a^4}\leq0$, 所以 $\sqrt[4]{-a}\cdot\sqrt[3]{a}\leq0$ 与结论矛盾, 所以(B)是错误的; 同样, (D)也是错误的. 选 C.

点评 在化同次根式的时候应先将被开方数化为非负数, 然后根据 $\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[mp]{a^{np}}$ 化成同次根式.

例 17 若实数 x 适合 $|3-x|=3+|x|$, 化简 $\sqrt{(x-3)^2}$.

分析 此题从已知条件入手, 由于 $|3-x|=3+|x|$ 都是非负数, 所以该等式两边平方后可求出 x 的范围.

解 两边平方得 $9-6x+x^2=9+6|x|+x^2$. 所以 $|x|=-x$, 即 $x\leq0$. 故

$$\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|=-(x-3)=3-x.$$

例 18 计算 $\sqrt[3]{-1\frac{1}{8}}+\frac{1}{3}\sqrt{27}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{72}-\sqrt{2\frac{1}{9}-\frac{7}{9}}$.

分析 本题是根式的加减法, 解此题关键是将各根式化成最简根式以后, 将同类根式合并即可.

解 原式 $=-\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}+\sqrt{3}+\sqrt[3]{9}-\frac{2}{3}\sqrt{3}$

$$=\left(-\frac{1}{2}+1\right)\sqrt[3]{9}+\left(1-\frac{2}{3}\right)\sqrt{3}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}+\frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

例 19 化简 $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+10-6\sqrt{x-1}}$.

分析 因为 $x+5-4\sqrt{x+1}=(x+1)-2\sqrt{x+1}\cdot2+2^2=(\sqrt{x+1}-2)^2$,

$$x+10-6\sqrt{x+1}=(x+1)-2\sqrt{x+1}\cdot3+3^2=(\sqrt{x+1}-3)^2,$$

所以此题运用配方法.

解 $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}}=\sqrt{(\sqrt{x+1}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x+1}-3)^2}$

$$=|\sqrt{x+1}-2|+|\sqrt{x+1}-3|=\begin{cases}5-2\sqrt{x+1}, & -1\leq x<3,\\ 1, & 3\leq x<8,\\ 2\sqrt{x+1}-5, & x\geq 8.\end{cases}$$

例 20 如果 $a^2+b^2-4a-2b+5=0$, 求$\dfrac{\sqrt{a}+b}{\sqrt{3b-2\sqrt{a}}}$的值.

分析 要求代数式的值, 必须先求出 a, b 的值, 根据已知条件式的特点, 可将其配方得 $A^2+B^2=0$ 的形式, 从而求出 a, b 值.

解 因为 $a^2+b^2-4a-2b+5=0$, 所以$(a^2-4a+4)+(b^2-2b+1)=0$, 即$(a-2)^2+(b-1)^2=0$, 所以 $a=2$ 且 $b=1$. 故

$$\frac{\sqrt{a}+b}{\sqrt{3b-2\sqrt{a}}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=3+2\sqrt{2}.$$

例 21 解方程 $x-\frac{1}{3}\left[x-\frac{1}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)\right]-\frac{3}{2}=2x+\frac{3}{2}$.

分析 本题是一元一次方程. 解此题关键是化简, 首先去括号, 去括号时应注意原括号内各项的符号变化, 在去括号过程中应注意适时合并同类项, 进行化简, 分散难点. 最后去分母时, 是方程两边同乘以各分数的最简公分母, 即方程中的每一项都要乘, 防止出现有分母的项乘, 而没有分母的项不乘这类错误.

解 由 $x-\frac{1}{3}\left[x-\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}\right]-\frac{3}{2}=2x+\frac{3}{2}$得

$$x-\frac{1}{3}\left[\frac{3}{4}x+\frac{1}{6}\right]-\frac{3}{2}=2x+\frac{3}{2},\ 即\ \frac{3}{4}x-\frac{14}{9}=2x+\frac{3}{2}.$$

方程两边同乘以 36, 得 $27x-56=72x+54$, $45x=-110$, 所以

$$x=-\frac{22}{9}.$$

例 22 解关于 x 的方程$(a-1)(a-4)x=a-2(x+1)$.

解 $(a-1)(a-4)x+2x=a-2$, $(a^2-5a+6)x=a-2$, 所以$(a-2)(a-3)x=a-2$.

当 $a\neq 2$ 且 $a\neq 3$ 时, $x=\frac{1}{a-3}$;

当 $a=2$ 时, 则 $0x=0$, 方程有无数多个解;

当 $a=3$ 时, 则 $0x=1$, 方程无解.

点评 对于含有字母系数的方程, 在解法上与数字系数的方程基本相同, 只是在化为最简方程后, 要注意对字母系数的取值进行讨论.

例 23 解下列方程.

(1) $(2x+2)(x-1)=5x+6$; (2) $(x+2\sqrt{3})^2-4(x+2\sqrt{3})-12=0$.

分析 (1) 应将其整理为一般形式 $ax^2+bx+c=0$, 然后用求根公式; (2) 将$(x+2\sqrt{3})$看成整体用换元法, 先解关于 $t^2-4t-12=0$ 的二次方程.

解 (1) 由 $2(x^2-1)=5x+6$ 得 $2x^2-5x-8=$, 解此方程得

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25+4\times 2\times 8}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{89}}{4},$$

所以 $$x_1=\frac{5+\sqrt{89}}{4},\ x_2=\frac{5-\sqrt{89}}{4}.$$

(2) 令 $t=x+2\sqrt{3}$, 原方程变为 $t^2-4t-12=0$, $(t-6)(t+2)=0$, 所以 $t=6$ 或 $t=-2$. 从而 $x+2\sqrt{3}=6$ 或 $x+2\sqrt{3}=-2$, 所以 $x_1=6-2\sqrt{3}$, $x_2=-2-2\sqrt{3}$.

点评 一元二次方程解法有公式法、直接开方法、因式分解法和换元法等.

例 24 解下列方程

(1) $x^3+3x^2-4x-12=0$;

(2) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=0$;

(3) $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$.

分析 简单的高次方程解法的基本思想是通过因式分解或换元法把它转化为一元一次方程或一元二次方程来解."降次"是解决这类方程的关键. 第(1)题中, 适当进行分组, 即可以达到分解因式, 降次的目的. 第(2)题中, 如果把方程左边展开将得到一个四次方程, 解起来比较困难; 若适当搭配一下, 把 4 个因式两两相乘, 则可以用换元法来解. 第(3)题也是一个四次方程, 若直接求解相当困难; 注意到方程的特点: 系数是对称的, 且 $x=0$ 不是方程的根, 方程两边同时除以 x^2, 可化为倒数方程, 用换元法很容易求解.

解 (1) $x^2(x+3)-4(x+3)=0$, $(x+2)(x-2)(x+3)=0$, 所以
$$x_1=-2,\ x_2=-3,\ x_3=2.$$

(2) $(x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+15=0$, $(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15=0$, 令 $x^2+8x+7=t$, 则 $x^2+8x+15=t+8$, 原方程变为 $t(t+8)+15=0$, $t^2+8t+15=0$, 所以 $t=-3$ 或 $t=-5$, 所以 $x^2+8x+7=-3$ 或 $x^2+8x+7=-5$, 所以 $x^2+8x+10=0$ 或 $x^2+8x+12=0$, 所以
$$x_1=-4+\sqrt{6},\quad x_2=-4-\sqrt{6},\quad x_3=-2,\quad x_4=-6.$$

(3) 因为 $x=0$ 不是方程的根, 方程两边同除以 x^2, 得 $6x^2-35x+62-\frac{35}{x}+\frac{6}{x^2}=0$, 所以
$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0,\quad 6\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+50=0.$$

令 $t=x+\frac{1}{x}$, 原方程变成 $6t^2-35t+50=0$. 所以 $t=\frac{10}{3}$ 或 $t=\frac{5}{2}$, 从而 $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$ 或 $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$, 即 $3x^2-10x+3=0$ 或 $2x^2-5x+2=0$, 所以 $x_1=3$, $x_2=\frac{1}{3}$, $x_3=2$, $x_4=\frac{1}{2}$.

例 25 若 α, β 是方程 $x^2-5x+2=0$ 的两个根, 不解方程, 求作一个一元二次方程, 使它的根是 $\alpha+\frac{1}{\alpha}$, $\beta+\frac{1}{\beta}$.

分析 根据已知条件求出新方程的两根之和与两根之积, 借助根与系数的关系即可作出新方程.

解 原方程根与系数关系为 $\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=2$.
$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)=(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=5+\frac{5}{2}=\frac{15}{2},$$
$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)=\alpha\beta+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{\alpha\beta}=\alpha\beta+\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{\alpha\beta}$$
$$=\alpha\beta+\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+1}{\alpha\beta}=2+\frac{5^2-2\cdot 2+1}{2}=13.$$

于是所求的方程为 $x^2-\frac{15}{2}x+13=0$, 即 $2x^2-15x+26=0$.