全国各类成人高考强化辅导丛书

数　　学

(理工农医类)

濮人法　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

全国各类成人高考强化辅导丛书 数学(理)/濮人法编著. - 北京: 北京大学出版社, 2000. 10
ISBN 7-301-04700-2

Ⅰ. 全… Ⅱ. 濮… Ⅲ. 数学课-成人教育: 高等教育-入学考试-自学参考资料
Ⅳ. G723.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 70526 号

书　　名: 全国各类成人高考强化辅导丛书·数学(理工农医类)
著作责任者: 濮人法　编著
责 任 编 辑: 刘　勇
标 准 书 号: ISBN 7-301-04700-2/G·605
出　版　者: 北京大学出版社
地　　址: 北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址: http://cbs.pku.edu.cn
电　　话: 出版部 62752015　发行部 62754140　邮购部 62752019
电 子 信 箱: zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者: 北京大学印刷厂
发　行　者: 北京大学出版社
经　销　者: 新华书店
787×1092　16 开本　17.75 印张　450 千字
2000 年 10 月第 1 版　2004 年 4 月第 4 次修订
2004 年 4 月第 5 次印刷
定　　价: 23.00 元

前　　言

《全国各类成人高考强化辅导丛书》包括语文、数学(文史财经类)、历史、地理、英语、数学(理工农医类)、物理、化学共8种，供参加各类成人高考的考生及各类成人高考辅导班作为教材使用。

本丛书由北京大学附中、中国人民大学附中、北京101中学、北京110中学等学校中有多年教学经验的中学特级和高级教师精心编写而成。由于作者多年从事成人高考辅导班的教学工作，对历年成人高考有专门研究，因此了解考生的知识结构及考查的重点，了解考生的需求，在编写中具有针对性。

依据教育部2002年8月颁发的新大纲，根据目前成人高考试题的特点，我们对2003年版进行了删改和补充，使改版后的2004年版在内容上紧扣新大纲，简明扼要，覆盖面广，重点突出，针对性强，使成人考生能够在短时间内迅速提高应试能力。

本丛书每章均由"知识点·考点"、"典型例题"、"习题"、"习题解答"四部分组成。还附有新大纲中"考试形式及试卷结构"和"样题及参考答案"、新编两套模拟试题以及2003年成人高等学校招生全国统一考试试题及解答。

知识点——简明扼要地介绍本章所要掌握的知识点、基本概念、相关公式，力求清晰明了。

考点——深入分析新大纲及近几年成人高考试题，提炼出重点考查的内容，力求准确到位。

典型例题——精选具有典型意义的有代表性的例题(包括近几年成人高考题)，揭示出解题规律和方法。例题由分析、解题过程、点评等几部分组成。

解题过程：让考生学会正确地、有条不紊地表达解题过程，保证会做的题不丢分。

点评或分析：使考生学会正确地分析题目的条件、结构，找到解题的思路和方法；点明解题的方法和技巧，使考生了解此类题的考查点和干扰点，拓宽思维、举一反三、融会贯通，提高解题的能力。

习题及习题解答——充分考虑到成人考生时间紧，没有老师专门辅导的特点，精选的每道习题都给出详尽的解答。

考试形式及试卷结构和样题——让学生了解新大纲中对考试形式的要求，了解试卷内容比例、题型比例、试题难易比例，使考生了解成人高考命题的特点和趋势，做到心中有数。

编　者

2004年3月于北京

目　　录

第一章　数、式、方程和方程组

【知识点　•考点】

一、实数

有理数(有限小数与循环小数)和无理数(无限不循环小数)统称为实数. 分类如下:

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\end{cases}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\end{cases}
$$

1. 实数的有关概念

(1) 数轴: 规定了原点、正方向和单位长度的直线叫数轴(见图 1-1).

图　1-1

① 实数与数轴上的点一一对应.

② 在数轴上, 数 0 与原点对应, 在右边的点对应的数, 大于在左边的点对应的数.

③ 在原点左侧的数表示负数, 在原点右侧的数表示正数.

(2) 相反数: 把数字相同、符号不同的两个数叫互为相反的数. 规定零的相反数是零. 如: -2 与 2 是互为相反的数.

(3) 倒数: 1 除以某数的商, 叫这个数的倒数, 零没有倒数. 如 $\sqrt{2}$ 的倒数是 $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(4) 绝对值: 规定一个正数的绝对值是它本身, 一个负数的绝对值, 等于它的相反数, 零的绝对值是零, 即

$$
|a|=\begin{cases}a, & a>0,\\ 0, & a=0,\\ -a, & a<0.\end{cases}
$$

说明　数 a 的绝对值, 表示一个非负数, 在几何上表示数 a 对应的点离开原点的距离.

(5) 平方根: 若一个数 b 的平方等于 a, 即 $b^2=a$, 则 b 叫做 a 的平方根或二次方根. 正数 a 的平方根有两个, 它们互为相反数, 其中一个正的平方根, 记为 $\sqrt{a}$, 叫做算术平方根, 简称算术根; 另一个负的平方根, 记为 $-\sqrt{a}$.

(6) n 次方根: 若 $b^n=a$, 则 b 叫做 a 的 n 次方根. 若 n 为偶数, 则 $b=\pm\sqrt[n]{a}$; 若 n 为奇数, 则 $b=\sqrt[n]{a}$.

说明　① 负数不能开偶次方.

② $(\sqrt{a})^2=a$, $\sqrt{a^2}=|a|$.

③ $(\sqrt[n]{a})^n = a$, $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & n\ \text{为偶数}, \\ a, & n\ \text{为奇数}. \end{cases}$

例 $\sqrt{4} = 2$, $-\sqrt{4} = -2$, $\sqrt{(-2)^2} = 2$.

2. **实数的运算律**

设 a, b, c **是任意实数, 则有**

(1) **交换律** $a+b=b+a$; $ab=ba$.

(2) **结合律** $a+(b+c)=(a+b)+c$; $a(bc)=(ab)c$.

(3) **分配律** $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

二、式

1. **代数式**

由运算符号($+$, $-$, $\times$, $\div$, **乘方, 开方**)**联结起来的数字、字母叫代数式**(**如** $3a\sqrt{b}$). **单独一个数字或字母也叫代数式. 用数值代替代数式里的字母, 计算后所得结果, 叫做代数式的值. 代数式分类如下:**

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\ \text{多项式}\end{cases}\\ \text{分式}\end{cases}\\ \text{无理式}\end{cases}$$

2. **整式**

用运算符号($+$, $-$, $\times$)**联结起来的数字、字母, 叫做整式. 如** $3a^2b+3ab^2$.

(1) **单项式: 用乘号联结起来的数字、字母, 叫做单项式. 如** $2ab^2$.

(2) **多项式:** n **个单项式的代数和, 叫做多项式. 如:** $3a^2b+ab^2$.

(3) **整式的加减法: 合并同类项.**

(4) **整式的乘法:**

① $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$.

② **乘法公式:**

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2; \qquad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3; \qquad (a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3.$$

(5) **正整数幂的运算法则:**

$$a^m\cdot a^n=a^{n+m}; \quad a^m\div a^n=a^{m-n}; \quad (a^m)^n=a^{mn};$$
$$(ab)^n=a^nb^n; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

(6) **多项式的因式分解:**

① **提取公因式法: 如** $ax+ay=a(x+y)$.

② **十字相乘法: 如** $2x^2+3x-5=(2x+5)(x-1)$.

③ **分组分解法: 如** $x^2+y^2+2xy+x+y=(x+y)^2+(x+y)=(x+y)\cdot(x+y+1)$.

④ **公式法:**

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b); \quad a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2;$$
$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2).$$

⑤ **求根公式法: 设** x_1, x_2 **是方程** $ax^2+bx+c=0$ **的两个实根, 则**

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

3. **分式**

把分母中含有字母的式子,叫做分式,如$\frac{1}{x-2}$.**但**$\frac{x+1}{2}$**不是分式.**

(1) **分式的基本性质**:

① $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}$;　② $\frac{a}{b}=\frac{a\div c}{b\div c}$ $(c\neq 0)$.

(2) **分式的运算**:

① $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}$;　② $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{bd}$;

③ $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$;　④ $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

4. **无理式**

把被开方式含有字母的根式,叫做无理式,如$\sqrt{2x+1}$.**但**$\sqrt{2}$**是无理数,不是无理式.**

(1) **最简根式:把被开方式的每一个质因式的指数,都小于根指数,且被开方式的分母为1的根式,叫做最简根式.如**$\sqrt[3]{x^2y}$.

(2) **同类根式:把根指数和被开方式分别相同的根式,叫同类根式.如**$3\sqrt{2}$**与**$2\sqrt{2}$**是同类根式,但**$\sqrt{3}$**与**$\sqrt{2}$**不是同类根式.**

(3) **根式的运算**:

① **根式的加、减法:先把参加运算的各个根式化成最简根式,再合并同类根式.如**$3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=5\sqrt{2}$.

② **根式的乘、除法**: 1° $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$;**若**$n$**为偶数时,则要求**$a\geq 0, b\geq 0$.

2° $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $(b\neq 0)$.**若**n**为偶数时,则要求**$a\geq 0, b>0$.

(4) **有理化因式:若两个无理式的乘积是一个有理式,则称它们互为有理化因式.如**$\sqrt{x+1}-2$**的有理化因式是**$\sqrt{x+1}+2$.

三、方程和方程组

1. **方程的基本概念**

(1) **方程:含有未知数的等式叫方程.如**$x^2-x-2=0$.

(2) **方程的解(或根):使方程等式成立的未知数的取值,叫方程的解(或根).**

(3) **解方程:求方程解的过程,叫做解方程.**

(4) **同解原理:方程等号两侧,同时加、减、乘、除以(不为0的除数)同一个数,得到的方程与原方程是同解的方程.**

2. **一元一次方程**

一元一次方程的形式为$ax+b=0$ $(a\neq 0)$,**它的解为**: $x=-\frac{b}{a}$.

3. **一元二次方程**

一元二次方程的形式为$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$.

(1) **求根公式**: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

(2) **判别式**:

$$\Delta = b^2 - 4ac\begin{cases} > 0, & \text{原方程有两个不相等的实根,} \\ = 0, & \text{原方程有两个相等的实根,} \\ < 0, & \text{原方程无实根.} \end{cases}$$

(3) 根与系数的关系(韦达定理):

设 x_1, x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的二实根, 则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$.

4. 方程组

由 n 个方程组成的一组方程, 叫做方程组.

(1) 方程组的解: 方程组里各个方程的公共解, 叫做这个方程组的解.

(2) 二元一次方程组及解法: 已知二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

其求解方法有:

① 加、减消元法;　　② 代入消元法.

(3) 三元一次方程组及解法: 已知三元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3, \end{cases}$$

其求解方法有:

① 加、减消元法;　　② 代入消元法.

(4) 二元二次方程组的解法:

① 代入消元法;　　② 加、减消元法.

【典型例题】

例 1　单项选择题.

(1) 已知 $|x+1|+(y-2)^2=0$, 则 $2x+y=$ (　　).

(A) -1;　　(B) 0;　　(C) 1;　　(D) 2.

(2) 已知 $|a|+a=0$, $|ab|=ab$, $|c|-c=0$, 那么 $\sqrt{b^2}-|a+b|-\sqrt{(c-b)^2}+|a-c|=$ (　　).

(A) $2c-b$;　　(B) $2b-2a$;　　(C) b;　　(D) $-b$.

(3) 若 $|-a|>-a$, 则(　　).

(A) $a>0$;　　(B) $a<0$;　　(C) $a<-1$;　　(D) $-1<a<0$.

(4) 已知 $a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0-(2x-1)^5=0$, 那么 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=$ (　　).

(A) 0;　　(B) 1;　　(C) 32;　　(D) 16.

解　(1) 因为 $|x+1|$ 与 $(y-2)^2$ 均表示非负数, 它们之和等于 0, 所以只有 $|x+1|=0$ 与 $(y-2)^2=0$, 解出 $x=-1$, $y=2$, 因此 $2x+y=0$.　选 B.

(2) 因为 $|a|+a=0$, $|ab|=ab$, $|c|-c=0$, 所以 $|a|=-a$, $|c|=c$, 所以 $a\leq 0$, $ab\geq 0$, 即 a 与 b 同号, $c\geq 0$. 所以 $a\leq 0$, $b\leq 0$, $c\geq 0$, 由此得原式 $=-b+(a+b)-(c-b)+(c-a)=b$. 选 C.

(3) 由 $|-a|>-a$，得 $|-a|+a>0$，显然 $a>0$．　选 A．

(4) 由已知得

$$a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=(2x-1)^5,$$

令 $x=1$ 得：$a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=1$．　选 B．

例 2　填空题．

(1) 当 $1\leq a\leq5$ 时，$\sqrt{(a-1)^2}+|5-a|=$ ________．

(2) $|x+1|+|2-x|=$ ________．

(3) 若 $x-y=xy\ (x\neq0, y\neq0)$，则 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=$ ________．

(4) x^2-2x+3 的最小值是________．

(5) 若 $x_1+x_2=1, x_2+x_3=2, x_3+x_1=3$，则 $x_2=$ ________．

(6) 若方程 $5x^2+mx+m-4=0$ 的一个根是 1，则另一个根是________．

解　(1) 因为 $\sqrt{(a-1)^2}=|a-1|=\begin{cases}a-1, & a\geq1,\\ 1-a, & a<1,\end{cases}$ 又 $|5-a|=\begin{cases}5-a, & a\leq5,\\ a-5, & a>5,\end{cases}$ 所以当 $1\leq a\leq5$ 时，原式 $=a-1+(5-a)=4$．　填：4．

(2) 因为 $|x+1|$ 对应的零点是 $x=-1$，$|2-x|$ 对应的零点是 $x=2$，用这两个零点把数轴分成三部分，即 $x<-1, -1\leq x<2, x\geq2$．在 x 的这三个取值范围内分别去掉绝对值符号得：

$$|x+1|+|x-2|=\begin{cases}-(x+1)-(x-2), & x<-1,\\ x+1-(x-2), & -1\leq x<2,\\ x+1+(x-2), & x\geq2.\end{cases}$$

填：$|x+1|+|x-2|=\begin{cases}-2x+1, & x<-1,\\ 3, & -1\leq x<2,\\ 2x-1, & x\geq2.\end{cases}$

(3) 由 $x-y=xy$ 得 $\frac{x-y}{xy}=1$，即 $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=1$，所以 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-1$．　填：$-1$．

(4) 由 $x^2-2x+3=(x-1)^2+2$，因为 $(x-1)^2$ 为非负数，只有当它等于 0 时，前式的和最小，所以当 $x=1$ 时有最小值 2．　填：2．

(5) 三个方程等号左侧与右侧分别相加得：$2(x_1+x_2+x_3)=6$，即 $x_1+x_2+x_3=3$，再将已知条件中的 $x_3+x_1=3$ 代入得，$x_2=0$．　填：$x_2=0$．

(6) 由 1 是方程的根，故代入方程后得 $5+2m-4=0$，所以 $m=-\frac{1}{2}$．再将 $m=-\frac{1}{2}$ 代入方程得 $10x^2-x-9=0$，即 $(x-1)(10x+9)=0$，所以 $x=-\frac{9}{10}$．　填：$-\frac{9}{10}$．

例 3　计算题及证明题．

(1) 在实数范围内分解下列因式：

① $2x^2+3x-20$；　② x^2-y^2-2x+1；　③ x^4+4；　④ x^2-2x-2．

分析　① 利用十字相乘法；② 利用分组分解法；③ 添项配方后，再利用分组分解法；④ 利用求根公式法．

解　① 原式 $=(2x-5)(x+4)$．

② 原式 $=(x^2-2x+1)-y^2=(x-1)^2-y^2=(x-1+y)(x-1-y)$．

③ 原式 $=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)-(2x)^2=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$．

④ 因为原式对应的二次方程 $x^2-2x-2=0$ 的两个实根是 $x_1=1+\sqrt{3}$, $x_2=1-\sqrt{3}$, 所以 $x^2-2x-2=(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})$.

(2) 已知关于 x 的方程 $x^2+ax+a=0$ 的两实根为 α, β, 不解方程, 求下列各式的值:

① $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$; ② $\alpha^2+\beta^2$; ③ $\alpha^3+\beta^3$; ④ $|\alpha-\beta|$.

分析　先将所求各式变形成只含有两根之和 $\alpha+\beta$ 或两根之积 $\alpha\beta$ 的代数式, 再利用根与系数的关系, 求出各式的值.

解　因为 α, β 是方程的两个根, 所以 $\alpha+\beta=-a$, $\alpha\cdot\beta=a$.

① $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{-a}{a}=-1$.

② $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-a)^2-2a=a^2-2a$.

③ $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=(\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta]=-a(a^2-3a)=-a^3+3a^2$.

④ $|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{a^2-4a}$.

(3) 已知 $k>l>0$, 求证 $2x^2-(3k+l)x+kl=0$ 有两个不相等的实根, 且一个根大于 l, 另一个根小于 l.

分析　去验证判别式 $\Delta>0$, 并判断两根 x_1 与 x_2 满足: $(x_1-l)(x_2-l)<0$.

证明　因为 $\Delta=[-(3k+l)]^2-4\times2\times kl=9k^2+6kl+l^2-8kl=9k^2-8kl+l^2=(k-l)^2+8k^2$, 由已知 $k>l>0$, 所以 $\Delta>0$, 即原方程有两个不相等的实根. 又设方程的二根为 x_1 与 x_2, 则根据韦达定理得: $x_1+x_2=\frac{3k+l}{2}$, $x_1\cdot x_2=\frac{kl}{2}$, 所以 $(x_1-l)(x_2-l)=x_1x_2-l(x_1+x_2)+l^2=\frac{kl}{2}-l\cdot\frac{3k+l}{2}+l^2=\frac{l(l-2k)}{2}$. 因为 $k>l>0$ 所以 $l-2k<0$, 由此得

$$(x_1-l)(x_2-l)=\frac{l(l-2k)}{2}<0.$$

(4) 若关于 x 的方程 $x^2-(2n+3m)x+5m=0$ 的两根之和为 2, 两根之积为 -10, 求 m 与 n 的值.

分析　利用韦达定理建立关于 m 与 n 的方程组, 再求出 m, n.

解　设 x_1 与 x_2 是方程的二根, 由题意得: $2=x_1+x_2=2n+3m$, $-10=x_1\cdot x_2=5m$, 联立 $\begin{cases}2n+3m=2,\\5m=-10,\end{cases}$ 解得 $m=-2$, $n=4$.

(5) 设方程组 $\begin{cases}y=2x-1,\\y^2=2px\end{cases}$ 有两个不相等的实解为: $\begin{cases}x=x_1,\\y=y_1\end{cases}$ 与 $\begin{cases}x=x_2,\\y=y_2,\end{cases}$ 求 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

分析　利用根与系数的关系, 计算出 x_1+x_2 与 $x_1\cdot x_2$ 的值, 再求 $(x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$ 与 $(y_2-y_1)^2$.

解　由 $\begin{cases}y=2x-1, & ①\\y^2=2px, & ②\end{cases}$ ①代入②得: $(2x-1)^2=2px$, 整理得: $4x^2-(4+2p)x+1=0$, 所以 $x_1+x_2=1+p/2$, $x_1\cdot x_2=1/4$. 又 $y_1=2x_1-1$, $y_2=2x_2-1$, 所以 $y_2-y_1=2(x_2-x_1)$, 由此得

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+4(x_2-x_1)^2}=\sqrt{5}\sqrt{(x_2-x_1)^2}$$

$$=\sqrt{5}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{5}\sqrt{p+\frac{p^2}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{p^2+4p}.$$

(6) 化简 $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

分析 先将被开方数 $3-2\sqrt{2}$ 变形成完全平方的形式, 再脱掉原式最外层的根号.

解 令 $3-2\sqrt{2}=(a-\sqrt{2})^2=a^2-2a\sqrt{2}+2$, 即 $3-2\sqrt{2}=a^2+2-2a\sqrt{2}$. 根据等号两侧对应项相等得: $\begin{cases}a^2+2=3,\\2a=2,\end{cases}$ 解得 $a=1$, 所以

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=|1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1.$$

【习题】

一、单项选择题

1. $\sqrt{a^2}-a$ 是(   ).

(A) 负数; (B) 非负数; (C) 0; (D) 正数.

2. 若有理数 a, b 满足 $|a+b|<|a-b|$, 则(   ).

(A) $a<b<0$; (B) $b<0<a$; (C) $0<b<a$; (D) $ab<0$.

3. 已知 $(a-1)\sqrt{-\frac{1}{a-1}}$ 在实数范围内有意义, 化简后得(   ).

(A) $\sqrt{1-a}$; (B) $\sqrt{a-1}$; (C) $-\sqrt{1-a}$; (D) $-\sqrt{a-1}$.

4. 若 x 是非正数, 则下列式子成立的是(   ).

(A) $|x|<|x-1|$; (B) $|x|=|x-1|$;

(C) $|x|>|x-1|$; (D) $|x|\geq|x-1|$.

5. 若方程 $x^2-2(kx-4)x-6=0$ 没有实数根, 则 k 的最小正整数是(   ).

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

6. 若多项式 $x^2+kx+\frac{1}{9}$ 是一个完全平方式, 则 $k=$ (   ).

(A) -3; (B) 3; (C) $\frac{2}{3}$; (D) $\pm\frac{2}{3}$.

7. 已知关于 x 的方程 $x^2+2x+m=0$ 的两根差的平方是 16, 则 m 的值= (   ).

(A) -2; (B) -3; (C) 3; (D) 2.

8. 方程 $(3x-1)(2x+4)=1$ 的解是(   ).

(A) $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$; (B) $\frac{5\pm\sqrt{55}}{6}$; (C) $\frac{-5\pm\sqrt{55}}{6}$; (D) $\frac{1}{3}$ 或 -2.

9. 已知一元二次方程的两根分别是 $x^2+3x-2=0$ 两根的二倍, 则这个一元二次方程是(   ).

(A) $x^2+6x-8=0$; (B) $x^2-6x-8=0$;

(C) $x^2-6x-4=0$; (D) $x^2+6x-4=0$.

二、填空题

1. 若 $|3x-2|+|2y+3|=0$, 则 $x+y=$ __________, $xy=$ __________, $\frac{x}{y}=$ __________.

2. 若 a, b 互为相反数, b, c 互为倒数, 则 $ac+\frac{b^3c}{a^2}=$ __________.

3. 已知$\frac{x}{3}=\frac{y}{-4}=\frac{z}{7}$,则$\frac{3x+y+z}{y}=$ ________.

4. 若 x_1, x_2 是方程 $x^2-4x+1=0$ 的两个根,则$(x_1+1)(x_2+1)=$ ________,$(x_1-x_2)^2=$ ________.

5. 已知 $2x-y$ 与 $x+y$ 之比等于$\frac{2}{3}$,那么$\frac{x}{y}=$ ________.

6. 两数之和为 2,两数之差的绝对值为 6,以这两个数为根的方程是________________.

7. 已知方程 $5x^2+mx-6=0$ 的一根是 3,那么它的另一根是________.

8. 若 a, b 是实数,且 $a^2+4b^2-2a+4b+2=0$,则 $4a^2-\frac{1}{b}=$ ________.

三、计算题

1. 计算$(x+3)(x^2+4x+5)$.

2. 把下列各式因式分解:

(1) $2x^2-3x-20$;　　(2) $x^3-x^2y-xy^2+y^3$;

(3) $x^4+x^2y^2+y^4$;　　(4) $x(x-1)+y(y-1)+2xy$.

3. 化简下列各式:

(1) $\sqrt{8-2\sqrt{12}}$;　　(2) $\sqrt{x^2+2x+1}+|x|\quad(x<-1)$.

4. 有理化分母:

(1) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$;　　(2) $\frac{1}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$;　　(3) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$.

5. 解下列方程或方程组:

(1) $\frac{x^2+4x}{x-1}+\frac{72(x-1)}{x^2+4x}-18=0$;　　(2) $\sqrt{2x^2+7x}-x=2$;

(3) $\begin{cases}3x-2y+10=0,\\4x-3y+2=0;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}a+b+c=1,\\a-b+c=13,\\4a+2b+c=4;\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x^2=4y,\\x+12=2y;\end{cases}$　　(6) $|2x-3|=2$.

6. 已知关于 x 的方程: $2x^2-ax+2=0$ 有两个实根 α β 不解方程求:

(1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$;　　(2) $\alpha^2+\beta^2$;　　(3) $\alpha^3+\beta^3$;　　(4) $|\alpha\quad\beta|$.

7. 求证关于 x 的方程: $2x^2-(m+5)x+(m+1)=0$ 有两个不相等的实根;若方程两根之差为$\frac{5}{2}$,求 m 的值.

8. 已知关于 x 的方程 $3x^2+bx+10=0$ 的两个根的倒数之和为$-\frac{11}{10}$,求此方程的根及 b 的值.

9. 已知两个数的和是 2,它们之差的绝对值等于 4,求此两个数.

10. 已知$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=1$,求$\frac{2a+3ab-2b}{a-2ab-b}$.

11. 已知 $x+y+z=1$, $x+y+t=2$, $x+z+t=3$, $y+z+t=9$,求 $x+y+z+t$ 的值.

12. 设 x_1, x_2 是关于 x 的方程 $4x^2-(3m-5)x-6m^2=0$ 的两个实根,且$\frac{x_1^2}{x_2^2}=\frac{4}{9}$,求 m 的值.

【习题解答】

一、单项选择题

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
答　案	B	D	C	A	B	D	B	C	A

提示:

3. 因为$(a-1)\sqrt{-\frac{1}{a-1}}$在实数范围内有意义,所以$a-1<0$,即$a<1$,所以

$$(a-1)\sqrt{-\frac{1}{a-1}}=(a-1)\sqrt{-\frac{a-1}{(a-1)^2}}=\frac{a-1}{1-a}\sqrt{1-a}=-\sqrt{1-a}.$$

7. 设方程二根为x_1,x_2,依题意$(x_1-x_2)^2=16$.由韦达定理得$x_1+x_2=-2$,$x_1\cdot x_2=m$,所以$16=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(-2)^2-4m$,即$16=4-4m$,$m=-3$.

二、填空题

1. $x+y=-\frac{5}{6}$,$xy=-1$,$\frac{x}{y}=-\frac{4}{9}$.　提示:因为$|3x-2|+|2y+3|=0$,所以$3x-2=0$,$2y+3=0$,即$x=\frac{2}{3}$,$y=-\frac{3}{2}$,所以$x+y=-\frac{5}{6}$,$xy=-1$,$\frac{x}{y}=-\frac{4}{9}$.

2. 0.　　3. -3.　　4. 6,12.　　5. $\frac{5}{4}$.

6. $x^2-2x-8=0$.　提示:依题意:$x_1+x_2=2$,$|x_1-x_2|=6$,所以$6=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}$,$(x_1-x_2)^2=36$,$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=36$,化简得$2^2-4x_1x_2=36$,解得:$x_1x_2=-8$,因为$x_1+x_2=2$,$x_1x_2=-8$,所以根据韦达定理可知,以$x_1,x_2$为根的原方程是:$x^2-2x-8=0$.

7. $-\frac{2}{5}$.

8. 6.　提示:因为$a^2+4b^2-2a+4b+2=0$,所以$(a-1)^2+(2b+1)^2=0$,由此得$a=1$,$b=-\frac{1}{2}$,所以$4a^2-\frac{1}{b}=6$.

三、计算题

1. $x^3+7x^2+17x+15$.

2. (1) $(x-4)(2x+5)$;　(2) $(x-y)^2(x+y)$;
   (3) $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$;　(4) $(x+y-1)(x+y)$.

3. (1) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$.　提示:$\sqrt{8-2\sqrt{12}}=\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.
   (2) $-2x-1$.

4. (1) $-(5+2\sqrt{6})$;　(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$;　(3) $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$.

5. (1) $x=2$或$x=6$;　(2) $x=1$;　(3) $\begin{cases}x=-26,\\y=-34;\end{cases}$
   (4) $a=3,b=-6,c=4$;　(5) $\begin{cases}x_1=6,\\y_1=9\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_2=-4,\\y_2=4;\end{cases}$
   (6) $x_1=\frac{1}{2}$,$x_2=2\frac{1}{2}$.

6. (1) $\frac{a}{2}$;　(2) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\frac{a^2}{4}-2$;
   (3) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\frac{a}{2}\left(\frac{a^2}{4}-2-1\right)=\frac{a}{2}\left(\frac{a^3}{4}-3\right)$;

(4) $|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{\frac{a^2}{4}-4}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-16}$.

7. 因为 $\Delta=[-(m+5)]^2-4\cdot 2\cdot(m+1)=m^2+2m+17=(m+1)^2+16>0$, 所以方程 $2x^2-(m+5)x+(m+1)=0$ 有两个不相等的实根; 设方程二根为 α, β, 若 $|\alpha-\beta|=\frac{5}{2}$, 由 $\alpha+\beta=\frac{m+5}{2}$, $\alpha\cdot\beta=\frac{m+1}{2}$,

$$\frac{5}{2}=|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{\left(\frac{m+5}{2}\right)^2-4\cdot\frac{m+1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{m^2+2m+17},$$

化简得 $m^2+2m-8=0$, 解得 $m_1=-4$, $m_2=2$.

8. 设方程的二根为 α, β, 依题意: $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{11}{10}$, $\alpha+\beta=-\frac{b}{3}$, $\alpha\cdot\beta=\frac{10}{3}$, 由此得 $-\frac{11}{10}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\cdot\beta}=\frac{-\frac{b}{3}}{\frac{10}{3}}$, 解得 $b=11$. 所以原方程为: $3x^2+11x+10=0$, 解得 $x_1=-2$, $x_2=-\frac{5}{3}$.

9. 设此二数为 a, b, 依题意有: $a+b=2$, $|a-b|=4$, 联立方程组为 $\begin{cases}a+b=2,\\|a-b|=4\end{cases}$ $\begin{cases}a+b=2,\\a-b=\pm 4\end{cases}$ $\begin{cases}a+b=2,\\a-b=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a+b=2,\\a-b=-4.\end{cases}$ 解得: $\begin{cases}a=3,\\b=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1,\\b=3.\end{cases}$

10. 因为 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=1$, 所以 $b-a=ab$ $\quad$ $a-b=-ab$, 所以

$$\frac{2a+3ab-2b}{a-2ab-b}=\frac{2(a-b)+3ab}{a-b-2ab}=\frac{-2ab+3ab}{-ab-2ab}=-\frac{1}{3}.$$

11. 已知

$$\begin{cases}x+y+z=1, & ①\\x+y+t=2, & ②\\x+z+t=3, & ③\\y+z+t=9, & ④\end{cases}$$

①+②+③+④得: $3x+3y+3z+3t=15$, 所以 $x+y+z+t=5$.

12. 由韦达定理得:

$$x_1+x_2=\frac{3m-5}{4}, \qquad ①$$

$$x_1\cdot x_2=-\frac{3}{2}m^2. \qquad ②$$

已知 $\frac{x_1^2}{x_2^2}=\frac{9}{4}$, 即 $4x_1^2=9x_2^2$,

$$2x_1=\pm 3x_2. \qquad ③$$

当 $2x_1=-3x_2$ 时, 代入①, ②得

$$-\frac{3}{2}x_2+x_2=\frac{3m-5}{4}, \qquad -\frac{3}{2}x_2^2=-\frac{3}{2}m^2,$$

消去 x_2 得

$$\left(\frac{5-3m}{2}\right)^2=m^2 \qquad m^2-6m+5=0,$$

所以 $m=1$ 或 $m=5$.

当 $2x_1=3x_2$ 时, 代入②得 $\frac{3}{2}x_2^2=-\frac{3}{2}m^2$, 这个式子不成立;

当 $m=1$ 或 $m=5$ 时, 方程的判别式的值不小于 0, 所以所求 m 的值为 1 或 5.

第二章　集　　合

【知识点 •考点】

一、集合的概念

1. 集合的定义

把具有某种属性的事物放在一起, 便构一个集合. 集合一般用大写字母 A, B, C…表示; 构成集合的每一个事物, 叫集合的一个元素, 集合的元素一般用小写字母 a, b, x, y…表示. 若集合中包含的元素是有限个, 则称这个集合是有限集. 若集合中包含的元素有无穷多个, 则称这个集合是无限集. 若集合中不含任何元素, 则规定这个集合是空集, 空集记作 .

2. 数集

以数为元素的集合叫数集.

(1) 自然数集: 数 0 和正整数构成的集合, 叫做自然数集, 记作 N.

(2) 整数集: 由全体整数构成的集合, 叫做整数集, 记作 Z(全体正整数构成的集合记作 Z^+, 全体负整数构成的集合记作 Z^-).

(3) 有理数集: 全体有理数构成的集合, 叫做有理数集, 记作 Q(全体正有理数构成的集合, 记作 Q^+, 全体负有理数构成的集合记作 Q^-).

(4) 实数集: 全体实数构成的集合, 叫做实数集, 记作 R.

(5) 复数集: 全体复数构成的集合, 叫做复数集, 记作 C.

3. 元素与集合的关系

若元素 x 在集合 A 中, 则读作元素 x 属于集合 A, 记作 $x \in A$; 若元素 x 不在集合 A 中, 则读作元素 x 不属于集合 A, 记作 xú A(或 x| A).

二、集合的表示

1. 列举法

把集合中的元素一一列举出来, 括在大括号内, 这种表示集合的方法叫列举法. 如“小于 5 的正整数”集 A, 可表示成: A= {1, 2, 3, 4}.

2. 描述法

把集合中的元素的公共属性, 写在大括号内, 这种表示集合的方法叫描述法. 如“小于 5 的正整数”集 A, 可表示成: $A=\{x \mid 0<x<5, x \in N\}$.

3. 不等式法

用不等式可以表示实数集, 如介于 0 和 5 之间的实数集可表示成: $0<x<5$.

4. 区间法

设 $a, b \in R$, 且 $a<b$, 集合 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 叫做以 a 为左端点, b 为右端点的闭区间, 记作 $[a, b]=\{x \mid a \leq x \leq b\}$.