

图书在版编目(CIP)数据

全国高中数学联赛试题思路与解法/蔡玉书编著.
南京: 河海大学出版社, 2005. 8
ISBN 7-5630-2134-5

I. 全... II. 蔡... III. 数学课—高中—解题
IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 082565 号

书 名 / 全国高中数学联赛试题思路与解法

书 号 / ISBN 7-5630-2134-5/O·120

责任编辑 / 魏 连

特约编辑 / 顾月珍

封面设计 / 杭永鸿

出 版 / 河海大学出版社

地 址 / 南京市西康路 1 号(邮编: 210098)

电 话 / (025)83737852(总编室) (025)83722833(发行部)

经 销 / 江苏省新华书店

印 刷 / 丹阳市教育印刷厂

开 本 / 850 毫米×1168 毫米 1/32 印张 11.25 字数 290 千字

版 次 / 2005 年 9 月第 1 版 2005 年 9 月第 1 次印刷

定 价 / 28.00 元

前 言

1981 年中国数学会开始举办“全国高中数学联赛”,这一群众性的数学竞赛活动得到了全国广大师生的欢迎。所谓“联赛”,就是各省、市、自治区联合承办,轮流做东,大家提供试题。从 1981 年到 2004 年的试题凝聚了全国许多数学家、数学教师的心血,许多试题后来还成了一些高考压轴试题的“原型”。这些试题的内容主要涉及函数、方程与不等式、数列与数学归纳法、复数、立体几何、解析几何、平面几何、组合数学、数论和一些综合问题。数学联赛的开展是一种智力竞赛而不是一种单纯的知识竞赛,它对提高学生数学素质起了积极作用。数学竞赛有明显的选拔功能、激励功能、导向功能,它不仅选拔了少数尖子,而且激发了广大青少年学习数学的兴趣,同时也促进了广大数学教师的知识更新,为“第二课堂”提供了养分,为数学方法论的研究注入了新的血液。

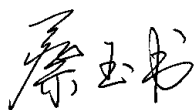
为了帮助广大学生准备参加来年的数学联赛,熟悉历年的试题,也为了让广大数学奥林匹克教练员有一份完整的数学联赛资料,我们将 1981 年到 2004 年全国高中数学联赛试题的全部解答题和加试题按内容分类,然后每道试题给出一些思路和优秀解法,撰写了《全国高中数学联赛试题思路与解法》一书。书中试题的解答来自中国数学会颁布的参考解答和一些数学期刊的优秀解答,甚至包括一些数学大家之手,也有许多解答来自本人的研究成果。有些“优雅”的解

法,真正体现了数学美的境界,读后叫人耳目一新,爱不释手。

本书是广大数学奥林匹克教练员研究高中数学联赛、学生复习迎考不可多得的参考文献,它具有科学性、知识性、实用性和资料性。

本书的完成得到了江苏省数学会苏维宜、王肇西等多位教授的指点,也得到了周春良、冯黎等领导以及董林伟、祁建新、夏炎、杨斌等同志的大力支持,在此一并感谢。

由于时间有限,疏漏之处在所难免,望读者指正。

A handwritten signature in black ink, appearing to read '徐玉书' (Xu Yushu), written in a cursive style.

2005 年 8 月

目 录

第一章	函数、方程与不等式	1
第二章	数列与数学归纳法	62
第三章	复 数	104
第四章	立体几何	118
第五章	解析几何	136
第六章	平面几何	175
第七章	组合数学与综合题	293

第一章 函数、方程与不等式

例 1 设函数 $f(x) = ax^2 + 8x + 3 (a < 0)$, 对于给定的负数 a 有一个最大的正数 $l(a)$, 使得在整个区间 $[0, l(a)]$ 上, 不等式 $|f(x)| \leq 5$ 成立. 问 a 为何值时 $l(a)$ 最大, 求出这个最大的 $l(a)$, 证明你的结论.

(1998 年全国高中数学联赛试题)

思路一 根据 $f(x) = a\left(x + \frac{4}{a}\right)^2 + 3 - \frac{16}{a}$, 对 $\max_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 3 - \frac{16}{a}$ 是否大于 5, 结合图像分类讨论.

解法一 $f(x) = ax^2 + 8x + 3 = a\left(x + \frac{4}{a}\right)^2 + 3 - \frac{16}{a}$, 所以 $\max_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 3 - \frac{16}{a}$ 分两种情况讨论:

(1) 如图 1-1, $3 - \frac{16}{a} > 5$ 即 $-8 < a < 0$, 此时 $0 < l(a) < -\frac{4}{a}$, 所以 $l(a)$ 是方程 $ax^2 + 8x + 3 = 5$ 的较小根,

$$l(a) = \frac{-8 + \sqrt{64 + 8a}}{2a} = \frac{2}{\sqrt{16 + 2a} + 4} < \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

(2) 如图 1-2, $3 - \frac{16}{a} \leq 5$ 即 $a \leq -8$, 此时 $l(a) > -\frac{4}{a}$, 所以 $l(a)$ 是方程 $ax^2 + 8x + 3 = -5$ 的较大根,

$$l(a) = \frac{-8 - \sqrt{64 - 32a}}{2a} = \frac{4}{\sqrt{4 - 2a} - 2} \leq \frac{4}{\sqrt{20} - 2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

当且仅当 $a = -8$ 时等号成立.

由于 $\frac{\sqrt{5} + 1}{2} > \frac{1}{2}$, 因此当且仅当 $a = -8$ 时, $l(a)$ 取最大值 $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

思路二 按 $f(x)$ 的最大值是否超过 5, 分两种情况讨论, 通过解关于含 $l(a)$ 的不等式确定 $l(a)$ 的范围, 从而定出 $l(a)$ 的最大值.

解法二 $f(x) = ax^2 + 8x + 3 = a\left(x + \frac{4}{a}\right)^2 + 3 - \frac{16}{a}$

分两种情况讨论:

(1) 如图 1-1, 当 $3 - \frac{16}{a} > 5$, 即 $-8 < a < 0$,

$l(a)$ 满足

$$\begin{cases} -8 < a < 0, & \text{①} \\ 0 < l(a) < -\frac{4}{a}, & \text{②} \\ a[l(a)]^2 + 8[l(a)] + 3 = 5. & \text{③} \end{cases}$$

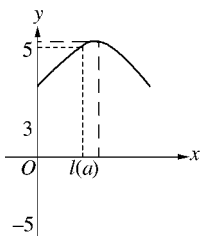


图 1-1

由③式可得 $a = \frac{2 - 8[l(a)]}{[l(a)]^2}$, 代入①、②式得

$$\begin{cases} -8 < \frac{2 - 8[l(a)]}{[l(a)]^2} < 0, \\ 0 < l(a) < \frac{4[l(a)]^2}{8l(a) - 2}. \end{cases}$$

解得 $\frac{1}{4} < l(a) < \frac{1}{2}$.

(2) 如图 1-2, 当 $3 - \frac{16}{a} \leq 5$, 即 $a \leq -8$ 时, $l(a)$ 满足下述不等式

$$\begin{cases} a \leq -8, & \text{④} \\ l(a) > -\frac{4}{a}, & \text{⑤} \\ a[l(a)]^2 + 8[l(a)] + 3 = -5. & \text{⑥} \end{cases}$$

由⑥式可得 $a = \frac{-8 - 8l(a)}{[l(a)]^2}$, 代入④、⑤式得

$$\begin{cases} \frac{-8 - 8l(a)}{[l(a)]^2} \leq -8, \\ l(a) > \frac{4[l(a)]}{8 + 8l(a)}. \end{cases}$$

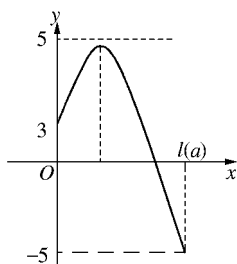


图 1-2

$$\text{解得 } 0 < l(a) \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

$$\therefore [l(a)]_{\max} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \text{ 此时 } a = -8.$$

$$\text{由(1)、(2) 知 } a = -8 \text{ 时, } [l(a)]_{\max} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

思路三 由不等式 $|f(x)| \leq 5$ 的解集确定最大正数 $l(a)$.

证法三 求解不等式 $|f(x)| \leq 5$, 即 $[f(x)]^2 \leq 25$.

$$(-ax^2 - 8x + 2)(-ax^2 - 8x - 8) \leq 0 \quad ①$$

方程 $-ax^2 - 8x - 8 = 0$ 有解

$$x_1 = \frac{8 + \sqrt{64 - 32a}}{-2a}, \quad x_2 = \frac{8 - \sqrt{64 - 32a}}{-2a}.$$

$$\text{对方程 } -ax^2 - 8x + 2 = 0 \quad ②$$

(1) 当 $a \leq -8$ 时, $\Delta = 64 + 8a \leq 0$, 方程无不等实根,

$\therefore -ax^2 - 8x + 2 \geq 0$ 恒成立, 要使①式成立, 只须

$$x_2 \leq x \leq x_1, \text{ 又 } 0 \in [x_2, x_1], \therefore \{l(a)\}_{\max} = \{x_1\}_{\max}.$$

此时: $a \leq -8$

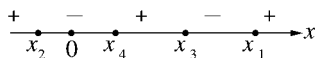
$$\therefore x_1 = \frac{-8 - \sqrt{64 - 32a}}{2a} = \frac{4}{\sqrt{4 - 2a} - 2} \leq \frac{4}{\sqrt{20} - 2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2},$$

$$\therefore \{x_1\}_{\max} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

(2) 当 $-8 < a < 0$ 时, $\Delta = 64 + 8a > 0$, ②式的解为

$$x_3 = \frac{8 + \sqrt{64 + 8a}}{-2a}, \quad x_4 = \frac{8 - \sqrt{64 + 8a}}{-2a}.$$

在数轴上的位置如下所示:



要使①式成立, 须 $x \in [x_2, x_4] \cup [x_3, x_1], 0 \in [x_2, x_4]$.

$$\begin{aligned}\therefore \{l(a)\}_{\max} &= \{x_4\}_{\max} = \left\{ \frac{-8 + \sqrt{64 + 8a}}{2a} \right\}_{\max} \\ &= \left\{ \frac{2}{\sqrt{16 + 2a} + 4} \right\}_{\max} < \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

而 $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, 故 $\{l(a)\}_{\max} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, 此时 $a = -8$.

此解法将对函数取值的限制转化为求解高次不等式, 从而避免了对顶点的讨论.

读者可以证明下述定理:

设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$), 其中 b, c, m 已知, 且 $m > |c|$, 对于给定的负数 a :

(1) 若 $b > 0$, 有一个最大的正数 $l(a)$, 使得不等式 $|f(x)| \leq m$ 在 $[0, l(a)]$ 上都成立, 当 a 使 $f(x)$ 的最大值为 m 时, $l(a)$ 取得最大值

$$\frac{2(m+c)}{b\left(\sqrt{\frac{2m}{m-c}} - 1\right)};$$

(2) 若 $b < 0$, 有一个最小的负数 $l(a)$, 使得不等式 $|f(x)| \leq m$ 在 $[l(a), 0]$ 上都成立, 当 a 使 $f(x)$ 的最大值为 m 时, $l(a)$ 取得最小值

$$\frac{2(m+c)}{b\left(\sqrt{\frac{2m}{m-c}} - 1\right)}.$$

例 2 已知当 $x \in [0, 1]$ 时, 不等式 $x^2 \cos \theta - x(1-x) + (1-x)^2 \sin \theta > 0$ 恒成立, 试求 θ 的取值范围.

(1999 年全国高中数学联赛试题)

思路一 设 $f(x) = x^2 \cos \theta - x(1-x) + (1-x)^2 \sin \theta > 0$, 先由 $f(0) > 0, f(1) > 0$ 得 $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$, 再取区间 $[0, 1]$ 上的特殊值 $x_0 = \frac{\sqrt{\sin \theta}}{\sqrt{\sin \theta} + \sqrt{\cos \theta}}$ 确定 θ 的范围, 再由基本不等式或配方法加以论证.

解法一 若对一切 $x \in [0, 1]$, 恒有 $f(x) = x^2 \cos \theta - x(1-x) +$

$(1-x)^2 \sin \theta > 0$, 则

$$\cos \theta = f(1) > 0, \sin \theta = f(0) > 0, \quad ①$$

取 $x_0 = \frac{\sqrt{\sin \theta}}{\sqrt{\sin \theta} + \sqrt{\cos \theta}} \in (0, 1)$, 则 $\sqrt{\cos \theta} x_0 - \sqrt{\sin \theta} (1-x_0) = 0$

由于 $f(x) = [\sqrt{\cos \theta} x - \sqrt{\sin \theta} (1-x)]^2 + 2\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\sin \theta \cos \theta}\right) x(1-x)$,

所以 $f(x_0) = 2\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\sin \theta \cos \theta}\right) x_0(1-x_0) > 0$, 故

$$-\frac{1}{2} + \sqrt{\sin \theta \cos \theta} > 0. \quad ②$$

反之, 当①、②两式成立时, $f(0) = \sin \theta > 0, f(1) = \cos \theta > 0$, 且当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) \geq 2\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\sin \theta \cos \theta}\right) x(1-x) > 0$.

先在 $[0, 2\pi]$ 中解①式与②式, 由 $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$ 可得

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \text{ 又}$$

$$-\frac{1}{2} + \sqrt{\sin \theta \cos \theta} > 0, \sqrt{\sin \theta \cos \theta} > \frac{1}{2},$$

$$\sin \theta \cos \theta > \frac{1}{4}, \sin 2\theta > \frac{1}{2}.$$

注意到 $0 < 2\theta < \pi$, 故有 $\frac{\pi}{6} < 2\theta < \frac{5\pi}{6}$, 所以 $\frac{\pi}{12} < \theta < \frac{5\pi}{12}$, 因此原题中的 θ 的取值范围是 $2k\pi + \frac{\pi}{12} < \theta < 2k\pi + \frac{5\pi}{12}, (k \in \mathbb{Z})$.

思路二 考虑 $f(x) = x^2 \cos \theta - x(1-x) + (1-x)^2 \sin \theta = (1 + \sin \theta + \cos \theta)x^2 - (2\sin \theta + 1)x + \sin \theta$ 的图像, 由对称轴、端点值等因素, 讨论 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值.

解法二 令 $f(x) = x^2 \cos \theta - x(1-x) + (1-x)^2 \sin \theta$, 即

$$f(x) = (1 + \sin \theta + \cos \theta)x^2 - (2\sin \theta + 1)x + \sin \theta.$$

于是, 问题便化为: 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立, 求 θ 的取值

范围.

$$\because f(0) = \sin \theta > 0, f(1) = \cos \theta > 0,$$

$$\therefore 2k\pi < \theta < 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$$

$$-\frac{b}{2a} = \frac{1+2\sin\theta}{2(1+\sin\theta+\cos\theta)} = \frac{1+2\sin\theta}{1+2\sin\theta+1+2\cos\theta},$$

$$\therefore 0 < -\frac{b}{2a} < 1.$$

这说明抛物线 $y=f(x)$ 的顶点的横坐标位于 0 与 1 之间, 且 $f(0) > 0$, $\therefore f(x) > 0 \Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac < 0$.

$$\begin{aligned} \text{由 } \Delta &= (1+2\sin\theta)^2 - 4(1+\sin\theta+\cos\theta)\sin\theta = 1 - 4\sin\theta\cos\theta \\ &= 1 - 2\sin 2\theta < 0, \text{得 } \sin 2\theta > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

又因为 $2k\pi < \theta < 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 故

$$2k\pi + \frac{\pi}{12} < \theta < 2k\pi + \frac{5\pi}{12}, (k \in \mathbf{Z}).$$

例 3 若函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{2}$ 在区间 $[a, b]$ 上的最小值为 $2a$, 最大值为 $2b$, 求 $[a, b]$.

(2000 年全国高中数学联赛试题)

思路 考虑区间与对称轴之间的位置关系和二次函数的单调性.

解 分三种情况讨论区间:

(1) 若 $0 \leq a < b$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递减, 故 $f(a) = 2b, f(b) = 2a$. 于是有

$$\begin{cases} 2b = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{13}{2}, \\ 2a = -\frac{1}{2}b^2 + \frac{13}{2}. \end{cases}$$

解之得 $[a, b] = [1, 3]$.

(2) 若 $a < 0 < b$, $f(x)$ 在 $[a, 0]$ 上单调递增, 在 $[0, b]$ 上单调递减, 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取最大值, 在 $x=a$ 或 $x=b$ 处取最小值 $2a$, 故

$$2b = \frac{13}{2}, \quad b = \frac{13}{4}.$$

由于 $a < 0$, 又 $f(b) = -\frac{1}{2}\left(\frac{13}{4}\right)^2 + \frac{13}{2} = \frac{39}{32} > 0$, 故 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取最小值 $2a$, 即 $f(a) = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{13}{2}$, 解得

$$a = -2 - \sqrt{17}.$$

$$\text{于是 } [a, b] = \left[-2 - \sqrt{17}, \frac{13}{4}\right].$$

(3) 当 $a < b \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增, 故 $f(a) = 2a$, $f(b) = 2b$, 即

$$2a = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{13}{2}, \quad 2b = -\frac{1}{2}b^2 + \frac{13}{2}.$$

由于方程 $\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{13}{2} = 0$ 的两根异号, 故满足 $a < b < 0$ 的区间 $[a, b]$ 不存在.

综上所述, 所求区间为 $[1, 3]$ 或 $\left[-2 - \sqrt{17}, \frac{13}{4}\right]$.

注: 本题可分四种情况讨论, 即将 $a < 0 < b$ 的情况再分 $-a > b$ 与 $-a < b$ 讨论, 其解法实质与上面的一致.

例 4 设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) 满足条件:

(1) 当 $x \in \mathbb{R}$ 时, $f(x-4) = f(2-x)$, 且 $f(x) \geq x$;

(2) 当 $x \in (0, 2)$ 时, $f(x) \leq \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$;

(3) 在 $f(x)$ 上的最小值为 0.

求最大的 m ($m > 1$), 使得存在 $t \in \mathbb{R}$, 只要 $x \in [1, m]$, 就有 $f(x+t) \leq x$.

(2002 年全国高中数学联赛试题)

思路 先用两边夹逼的方法求 $f(x)$ 的表达式, 再结合图像考虑后面的问题.

解法一 因 $f(x-4)=f(2-x)$, 则函数的图像关于 $x=-1$ 对称, 所以 $-\frac{b}{2a}=-1, b=2a$.

由(3)可知 $x=-1$ 时, $y=0$, 即 $a-b+c=0$.

由(1)得 $f(1) \geq 1$, 由(2)得 $f(1) \leq 1$. 则 $f(1)=1$, 即 $a+b+c=1$.

又 $a-b+c=0$, 则 $b=\frac{1}{2}, a=\frac{1}{4}, c=\frac{1}{4}$.

故 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$.

假设存在 $t \in \mathbf{R}$, 只要 $x \in [1, m]$, 就有 $f(x+t) \leq x$,

取 $x=1$ 有 $f(t+1) \leq 1$, 即 $\frac{1}{4}(t+1)^2+\frac{1}{2}(t+1)+\frac{1}{4} \leq 1$, 解得 $-4 \leq t \leq 0$.

对固定的 $t \in [-4, 0]$, 取 $x=m$, 有 $f(t+m) \leq m$, 即 $\frac{1}{4}(t+m)^2+\frac{1}{2}(t+m)+\frac{1}{4} \leq m$, 化简有 $m^2-2(1-t)m+(t^2+2t+1) \leq 0$. 解得

$$1-t-\sqrt{-4t} \leq m \leq 1-t+\sqrt{-4t}.$$

故 $m \leq 1-t+\sqrt{-4t} \leq 1-(-4)+\sqrt{-4 \cdot (-4)}=9$.

当 $t=-4$ 时, 对任意的 $x \in [1, 9]$, 恒有

$$f(x-4)-x=\frac{1}{4}(x^2-10x+9)=\frac{1}{4}(x-1)(x-9) \leq 0.$$

所以, m 的最大值为 9.

解法二 $\because f(x-4)=f(2-x), \therefore x=-1$ 是函数图像的一条对称轴, 且 $f(-1)=0$, 于是 $b=2a, a-b+c=0$. 故 $f(x)=ax^2+2ax+a, a=c$.

由(1), $f(x) \geq x, x \in \mathbf{R}$. 即 $ax^2+(2a-1)x+a \geq 0, x \in \mathbf{R}$.

于是恒有 $a > 0$, 且 $\Delta=(2a-1)^2-4a^2 \leq 0$, 解得 $a \geq \frac{1}{4}$.

由(2), $f(x) \leq \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$, $x \in (0, 2)$, 即

$$\left(a - \frac{1}{4}\right)x^2 + \left(2a - \frac{1}{2}\right)x + \left(a - \frac{1}{4}\right) \leq 0, x \in (0, 2),$$

令 $F(x) = \left(a - \frac{1}{4}\right)x^2 + \left(2a - \frac{1}{2}\right)x + \left(a - \frac{1}{4}\right)$, 同理可得

$$a \geq \frac{1}{4}.$$

又 $F(0) \leq 0$, $F(2) \leq 0$, 解得 $a \leq \frac{1}{4}$. 因而 $a = \frac{1}{4}$. 故

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}.$$

因为抛物线 $y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(x+1)^2$ 的开口向上, $y = f(x+t)$ 的图像是由 $y = f(x)$ 的图像平移 t 个单位得到. 要在 $[1, m]$ 上, $y = f(x+t)$ 的图像在 $y = x$ 的图像的下方, 且 m 最大, $1, m$ 应是关于 x 的方程 $\frac{1}{4}(x+t+1)^2 = x$ ①

的两个根. 由 1 是①式的根, 得 $\frac{1}{4}(1+t+1)^2 = 1$, 解得 $t = 0$ 或 $t = -4$.

当 $t = 0$ 时, 代入①式得 $x_1 = x_2 = 1$, 当 $t = -4$ 时, 代入①式得 $x = 1$ 或 $x = 9$. $\therefore m = 9$.

验证: 当 $t = -4$ 时, 对任意的 $x \in [1, 9]$, 恒有 $f(x-4) - x = \frac{1}{4}(x^2 - 10x + 9) = \frac{1}{4}(x-1)(x-9) \leq 0$.

所以, m 的最大值为 9.

例 5 求一切实数 p , 使得三次方程 $5x^3 - 5(p+1)x^2 + (71p-1)x + 1 = 66p$ 的三个根均为自然数.

(1995 年全国高中数学联赛第二试试题)

思路一 由于 $x = 1$ 是方程的根, 故三次方程降为二次方程 $5x^2 -$

$5px+66p-1=0$, 由韦达定理消去 p , 讨论自然数根的可能性.

解法一 由观察易知 $x=1$ 为原三次方程 $5x^3-5(p+1)x^2+(71p-1)x+1=66p$ 的一个自然数根, 由综合除法, 原方程可降为二次方程 $5x^2-5px+66p-1=0$ (*)

原三次方程的三个根均为自然数的充要条件是二次方程(*)的两个根均为自然数, 设 u, v 为方程(*)的两个根, 则由韦达定理得

$$\begin{cases} u+v=p, & \text{①} \\ uv=\frac{1}{5}(66p-1). & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{把①式代入②式得 } 5uv=66(u+v)-1. \quad \text{③}$$

可知 u, v 都不能被 2、3、11 所整除

$$\text{又由③式得 } v=\frac{66u-1}{5u-66}. \quad \text{④}$$

而 u, v 均为自然数, 故由④式可知 $u > \frac{66}{5}$, 即 $u \geq 14$,

又 u 不能被 2、3 整除, 故 $u \geq 17$. 由 $v \geq u$ 及④式可得

$$\frac{66u-1}{5u-66} \geq u, \text{ 即 } 5u^2-132u+1 \leq 0.$$

$$\text{于是, } u \leq \frac{66+\sqrt{66^2-5}}{5} < \frac{132}{5},$$

$$\therefore 17 \leq u \leq 26.$$

再由 u 不能被 2、3、11 整除知: u 只能取 17、19、23、25.

当 $u=17$ 时, 由④式得 $v=59$.

当 $u=19$ 时, 由④式得 $v=\frac{1253}{29}$, 并非自然数, 应舍去.

当 $u=23$ 时, 由④式得 $v=\frac{1517}{23}$ 并非自然数, 应舍去.

当 $u=25$ 时, 由④式得 $v=\frac{1649}{59}$ 并非自然数, 应舍去.

所以, 仅当 $p=u+v=76$ 时, 方程(*)的两个根均为自然数. 原方程的三个根均为自然数.

思路二 同上,简化后用同余知识处理.

解法二 因为 $x=1$ 是原三次方程的根,故原问题等价于

$$5x^2 - 5px + 66p - 1 = 0 \quad (*)$$

的两个根均为自然数. 设 u, v 是方程 $(*)$ 的两个根,则由韦达定理

$$\begin{cases} u+v=p, \\ uv=\frac{1}{5}(66p-1). \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

消去 p 得 $5uv=66(u+v)-1$, (3)

$$u = \frac{66v-1}{5v-66} = \frac{66}{5} + \frac{4351}{5(5v-66)},$$

$$5u = 66 + \frac{19 \times 229}{5v-66}.$$

显然 $5v-66$ 是 19×229 的模 5 同余 4 的正因子,即 $5v-66 = 19$ 或 229

$$\begin{cases} u=59 \\ v=17 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} u=17 \\ v=59 \end{cases}$$

因此 $p=u+v=76$.

思路三 考虑方程 $(*)$ 的判别式应是完全平方数,通过考察 Δ 探求思路.

解法三 同解法一,问题化为讨论方程

$$5x^2 - 5px + 66p - 1 = 0 \quad (*)$$

的两个根均为自然数,求 p .

显然, p 应是自然数,且方程 $(*)$ 的判别式

$$\Delta = 25p^2 - 20(66p-1) = (5p-132)^2 - 4351 \times 4$$

是完全平方数,设 $A=5p-132, \Delta=B^2 (B \geq 0)$, 则

$$A^2 - B^2 = 4 \times 19 \times 229$$

A, B 的奇偶性相同,它们只能皆为偶数(若 A, B 皆为奇数,则 $8 \mid (A^2-1), 8 \mid (B^2-1)$, 即与 $8 \mid (A^2-B^2)$ 矛盾).

由 $A_1 - B_1 \leq A_1 + B_1$ 可得

$$\begin{cases} A_1 - B_1 = -4351 \\ A_1 + B_1 = -1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} A_1 - B_1 = -229 \\ A_1 + B_1 = -19 \end{cases}$$

$$\text{或} \quad \begin{cases} A_1 - B_1 = 1 \\ A_1 + B_1 = 4351 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} A_1 - B_1 = 19 \\ A_1 + B_1 = 229 \end{cases}$$

即, $5p - 132 = 2A_1 = -4352, -248, 4352, 248$.

正整数 p 只能为 76.

例 6 下列表中的对数值有两个是错误的, 请予以纠正.

x	$\lg x$	x	$\lg x$	x	$\lg x$
0.021	$2a+b+c-3$	3	$2a-b$	8	$3-3a-3c$
0.27	$6a-3b-2$	5	$a+c$	9	$4a-2b$
1.5	$3a-b+c$	6	$1+a-b-c$	14	$1-a+2b$
2.8	$1-2a+2b-c$	7	$2(b+c)$		

(1981 年全国高中数学联赛试题)

思路 从分析三个质数 3、5、7 的对数入手.

解 $\lg 1.5$ 和 $\lg 7$ 的值是错误的, 应分别纠正为 $\lg 1.5 = 3a - b + c - 1$ 和 $\lg 7 = 2b + c$.

理由如下:

我们从三个质数 3、5、7 的对数着手分析.

$\lg 3$ 、 $\lg 0.27$ 、 $\lg 9$ 的值同为正确或同为错误. 因表中只有两处错误, 故三者都对.

若 $\lg 5 \neq a + c$, 则 $\lg 2 \neq 1 - a - c$, 并且 $\lg 8 = 3\lg 2 \neq 3 - 3a - 3c$, $\lg 6 = \lg 2 + \lg 3 \neq 1 + a - b - c$, 表中也有三个对数值是错误的, 与题设矛盾, 因此 $\lg 5 = a + c$.

由 $\lg 3 = 2a - b$ 和 $\lg 5 = a + c$ 的正确性知 $\lg 1.5$ 的值是错误的, 应纠正为 $\lg 1.5 = \lg 3 + \lg 5 - 1 = 3a - b + c - 1$.

现在考察表中 $\lg 0.021$ 、 $\lg 2.8$ 、 $\lg 14$ 三个值.

$$\lg 0.021 = \lg 3 + \lg 7 - 3 = (2a - b) + (2b + c) - 3 \\ \neq 2a + b + c - 3$$

$$\lg 2.8 = 2\lg 2 + \lg 7 - 1 = 2(1 - a - c) + (2b + c) - 1 \\ \neq 1 - 2a + 2b - c$$

$$\lg 14 = \lg 2 + \lg 7 = (1 - a - c) + (2b + c) \neq 1 - a + 2b$$

如果 $\lg 7 = 2(b + c)$, 那么表上 $\lg 0.021$ 、 $\lg 2.8$ 、 $\lg 14$ 的值都是错误的, 又与题设矛盾, 因此表中 $\lg 7$ 的值是错误的, 应纠正为 $\lg 7 = \lg 14 - \lg 2 = (1 - a + 2b) - (1 - a - c) = 2b + c$.

当 $\lg 7 = 2b + c$ 时, 则计算出的 $\lg 0.021$ 、 $\lg 2.8$ 及 $\lg 14$ 的值均与表中给出的一致. 讨论知表中只有 $\lg 1.5$ 及 $\lg 7$ 是错误的, 应分别纠正为 $\lg 7 = 2b + c$, $\lg 1.5 = 3a - b + c - 1$.

例 7 组装甲、乙、丙三种产品, 需用 A, B, C 三种零件. 每件甲需用 A, B 各 2 个; 每件乙需用 B, C 各 1 个; 每件丙需用 2 个 A 和 1 个 C ; 用库存的 A, B, C 三种零件, 如组装成 p 件甲产品, q 件乙产品和 r 件丙产品, 则剩下 2 个 A 和 1 个 B , 但 C 恰好用完. 试证: 无论怎样改变产品甲、乙、丙的件数, 也不能把库存的 A, B, C 三种零件都恰好用完.

(1981 年全国高中数学联赛试题)

思路一 首先求出库存 A, B, C 零件数, 再设制造甲、乙、丙产品分别为 x, y, z , 列方程解出 x, y, z , 只要它们不是整数即可.

证法一 组装成 p 件甲、 q 件乙、 r 件丙共需零件 $A: 2p + 2r$ 件, 零件 $B: 2p + q$ 件, 零件 $C: q + r$ 件, 因此加上剩余零件后, 库存零件数是 A 有 $2p + 2r + 2$ 件, B 有 $2p + q + 1$ 件, C 有 $q + r$ 件.

如果甲、乙、丙的件数分别改变成 x, y, z , 于是可以列出方程组:

$$\begin{cases} 2x + 2z = 2p + 2r + 2, \\ 2x + y = 2p + q + 1, \\ y + z = q + r. \end{cases}$$

$$\text{解之得 } x = p + \frac{2}{3}, y = q - \frac{1}{3}, z = r + \frac{1}{3}.$$