

图书在版编目 (CIP) 数据

全国高中数学联赛成功点击 / 马传渔主编. —南京:
南京师范大学出版社, 2007. 4

ISBN 978-7-81101-576-8/G · 1054

I. 全... II. 马... III. 数学课—高中—教学参考资料
IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 049944 号

书 名	全国高中数学联赛成功点击
主 编	马传渔
责任编辑	王书贞
出版发行	南京师范大学出版社
地 址	江苏省南京市宁海路 122 号 (邮编: 210097)
电 话	(025) 83598077 (传真) 83598412 (营销部) 83598297 (邮购部)
网 址	http://press.njnu.edu.cn
E — mail	nspzbb@njnu.edu.cn
照 排	江苏兰斯印务发展有限公司
印 刷	
开 本	850×1168 1/32
印 张	12.50
字 数	340 千
版 次	2007 年 6 月第 1 版 2007 年 6 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-81101-576-8/G · 1054
定 价	16.00 元

南京师大版图书若有印装问题请与销售商调换

版权所有 侵犯必究

前言

全国高中数学竞赛始于 1956 年,由华罗庚、苏步青两位教授负责举办,从 1984 年至今,全国高中数学联赛于每年 10 月中旬第一个星期天上午举行,考试设一试与加试.一试题型为六道选择题、六道填空题与三道解答题,分值为 150 分;加试题型为三道解答题,分值也为 150 分.考试总分为 300 分.经过 20 余年的反复实践与多次改革,竞赛已步入规范化的轨道,在全国范围内涌现出一大批数学爱好者与数学特长生,为国际数学奥林匹克选拔人才,为早日发现和培养现代杰出科学苗子起到了积极的作用.

本书具有下列特色:

1. 同步性. 本书参照现行“高中新课程标准”编写而成,覆盖了相应教材中的各个知识点,与现行必修与选修教材的内容同步.

2. 针对性. 本书参照 2006 年 8 月中国数学会普及工作委员会制定的《高中数学竞赛大纲》的内容编写而成. 全书共 21 讲. 前 18 讲针对一试内容,后 3 讲针对加试内容. 成功点击内容,掌握考试规律.

3. 实用性. 本书“联赛知识导航”栏目旨在紧扣竞赛,归纳知识,融汇贯通,便于应用;“思想方法导引”栏目旨在剖析试题,点击方法,结合竞赛,举一反三;“综合创新导练”栏目旨在熟悉竞赛,模拟竞赛,实战训练,征服奥数.

《全国高中数学联赛成功点击》将伴随读者拓宽知识,掌握方法,提高能力,使读者取得成功.

《新课程新奥赛系列》丛书编委会

主 任 闻玉银

副 主 任 范小辉 丁 漪

委 员 (按姓氏笔画排序)

丁 漪	马宏佳	马岳年	马富平	王书贞
王礼祥	王迎春	王政红	韦 娟	白 莉
刘爱东	匡 理	邢建华	张志朝	张德钧
李红敏	杨伟成	杨爱玲	周 璇	周予新
周海忠	庞 宏	范小辉	南 冲	姜爱萍
赵功伟	闻玉银	倪晨娟	夏里原	黄 蓉
葛 军	颜 森			

执行编委 周海忠



第1讲 集合



1. 集合的概念.

集合中的元素有三个特征:①确定性:设 A 是一个给定的集合, a 是某一具体对象,则 a 或者是 A 的元素,或者不是 A 的元素,两者必居其一,即 $a \in A$ 与 $a \notin A$ 仅有一种情况成立;②互异性:一个给定的集合中的元素是指互不相同的对象,即同一个集合中不应出现同一个元素;③无序性:集合中的元素是没有顺序的.

2. 集合的表示方法.

主要有:列举法、描述法、区间法、语言叙述法. 常用数集 $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ 应熟记.

3. 集合的运算.

(1) 子集、真子集及相等集.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \subsetneq B \text{ 或 } A = B;$$

$$A \subsetneq B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ 且 } A \neq B;$$

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ 且 } A \supseteq B.$$

注:由 n 个元素组成的集合,有 2^n 个不同的子集;有 $2^n - 1$ 个非空子集;有 $2^n - 1$ 个真子集;有 $2^n - 2$ 个非空真子集.

(2) 集合的交、并、补运算.

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\};$$

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\};$$

$$\complement_I A = \{x | x \in I \text{ 且 } x \notin A\}.$$

有关集合的几个运算律:





- ①交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;
 ②结合律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$;
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$;
 ③分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
 ④0~1律 $A \cup \emptyset = A, A \cap I = A, A \cup I = I, A \cap \emptyset = \emptyset$;
 ⑤等幂律 $A \cup A = A, A \cap A = A$;
 ⑥吸收律 $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$;
 ⑦求补律 $A \cup \complement_I A = I, A \cap \complement_I A = \emptyset$;
 ⑧反演律 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

4. 与集合中所含元素个数相关的几个简单性质.

(1) $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$, 特别地,
 当 $A \cap B = \emptyset$ 时, $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$;

(2) $\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$.

5. 集合的划分.

集合的划分反映了集合与子集之间的关系, 这既是一类数学问题, 也是数学中的解题策略——分类思想的基础, 在近年来的数学竞赛中经常出现.

6. 几点说明.

实数的子集与数轴上的点集之间可互相转换, 有序实数对的集合与平面上的点集可以互相转换. 对于方程、不等式的解集, 要注意它们的几何意义.

集合是一种基本数学语言、一种基本数学工具. 它不仅是高中数学的第一课, 而且是整个数学的基础. 集合语言的运用涉及数学的各个领域, 所以在竞赛中, 集合题是普遍而基本的题型之一.

对于竞赛中的集合问题, 首先要正确理解其含义, 弄清集合中的元素是什么, 具有什么样的性质, 读懂集合内在的意义; 其次要简



化集合,充分暴露集合中元素的性质.

集合的计数问题是竞赛中常见的题型,主要可用对应的方法或容斥原理加以解决.



思想方法导引

例1 设 $A = \{a | a = x^2 - y^2, x, y \in \mathbf{Z}\}$, 求证:

$$(1) 2k-1 \in A (k \in \mathbf{Z});$$

$$(2) 4k-2 \notin A (k \in \mathbf{Z}).$$

分析与解 如果集合 $A = \{a | a \text{ 具有性质 } p\}$, 那么判断对象 a 是否是集合 A 的元素的基本方法就是检验 a 是否具有性质 p .

(1) 因 $k, k-1 \in \mathbf{Z}$, 且 $2k-1 = k^2 - (k-1)^2$, 故 $2k-1 \in A$.

(2) 假设 $4k-2 \in A (k \in \mathbf{Z})$, 则存在 $x, y \in \mathbf{Z}$, 使 $4k-2 = x^2 - y^2$, 即 $(x-y)(x+y) = 2(2k-1)$. (*)

由于 $x-y$ 与 $x+y$ 具有相同的奇偶性, 所以 (*) 式左边有且仅有两种可能: 奇数或 4 的倍数. 另一方面, (*) 式右边只能是被 4 除余 2 的数, 故 (*) 式不能成立. 由此, $4k-2 \notin A (k \in \mathbf{Z})$.

方法技巧 判断对象 a 是否是集合 A 的元素应充分理解集合 A 的含义.

例2 若非空集合 $A = \{x | 2a+1 \leq x \leq 3a-5\}$, $B = \{x | 3 \leq x \leq 22\}$, 则能使 $A \subseteq (A \cap B)$ 成立的所有 a 的集合是: _____.

分析与解 由 $A \subseteq (A \cap B)$ 可知: $A \subseteq B$, 故有 (见图 1)

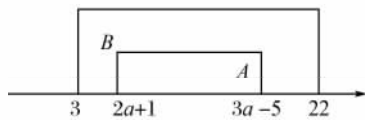


图 1

$$\begin{cases} 2a+1 \geq 3, \\ 3a-5 \leq 22, \\ 3a-5 \geq 2a+1. \end{cases} \quad \text{解得 } 6 \leq a \leq 9.$$

方法技巧 借助于文氏图或数轴可以直观地显示出集合与集合之间的关系,使题设更加明确.

例3 已知集合 $M = \{x | x^2 = 1\}$ 与集合 $N = \{x | ax = 1\}$, 若 $N \subseteq M$





M , 则实数 a 的所有可能值的个数是 ()

- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

分析与解 由 $M = \{x | x^2 = 1\}$, 知 $M = \{-1, 1\}$. 由 $N \subseteq M$, 知 N 可能是 $\emptyset, \{-1\}, \{1\}$. 而且, 当且仅当: $a = 0$ 时, $N = \emptyset$; $a = -1$ 时, $N = \{-1\}$; $a = 1$ 时, $N = \{1\}$, 故选 D.

方法技巧 该题的关键是注意条件 $N \subseteq M$ 的含义, 解关于集合问题时要注意 $\emptyset$ 的特殊性.

例 4 设函数 $f(x) = x^2 + ax + b (a, b \in \mathbf{R})$, 集合 $A = \{x | x = f(x), x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | x = f(f(x)), x \in \mathbf{R}\}$.

(1) 证明: $A \subseteq B$;

(2) 当 $A = \{-1, 3\}$ 时, 求 B .

分析与解 (1) 设任意 $x_0 \in A$, 则 $x_0 = f(x_0)$. 而 $f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$, 故 $x_0 \in B$, 所以 $A \subseteq B$.

(2) 因 $A = \{-1, 3\}$, 所以 $\begin{cases} (-1)^2 + a \cdot (-1) + b = -1, \\ 3^2 + a \cdot 3 + b = 3. \end{cases}$

解得 $a = -1, b = -3$,

故 $f(x) = x^2 - x - 3$. 由 $x = f(f(x))$,

得 $(x^2 - x - 3)^2 - (x^2 - x - 3) - x - 3 = 0$,

解得 $x = -1, 3, \pm\sqrt{3}$, 于是 $B = \{-1, 3, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

方法技巧 解决有关子集以及确定集合中的元素的问题时, 关键是要明确集合中的代表元素及它的公共属性.



集训演习一

题 1 集合 $A = \{x | k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | 2k\pi -$

$\frac{\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}\}$, $C = \{x | 6 - x - x^2 > 0\}$, 求 $A \cap B, A \cap C,$

$B \cap C$.

解 在直角坐标系中作出三个集合的范围, 再取交与并.



$$A \cap B = \{x \mid 2k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}\},$$

$$A \cap C = \{x \mid -\frac{3\pi}{4} \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\},$$

$$B \cap C = \{x \mid -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}\}.$$

题2 设 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数. 求集合 $\{n \mid n = [\frac{k^2}{2005}], 1 \leq k \leq 2004, k \in \mathbf{N}\}$ 的元素个数.

解 由 $\frac{(k+1)^2}{2005} - \frac{k^2}{2005} = \frac{2k+1}{2005} \leq 1$, 解得 $k \leq 1002$,

即当 $k=1, 2, 3, \dots, 1002$ 时,

$$[\frac{(k+1)^2}{2005}] = [\frac{k^2}{2005}] \text{ 或 } [\frac{(k+1)^2}{2005}] = [\frac{k^2}{2005}] + 1.$$

因 $[\frac{1002^2}{2005}] = 500, [\frac{1^2}{2005}] = 0$, 故当 $k=1, 2, \dots, 1002$ 时, $[\frac{k^2}{2005}]$ 能取遍 $0, 1, \dots, 500$.

另外, 当 $k=1003, 1004, \dots, 2004$ 时, 由于 $\frac{(k+1)^2}{2005} - \frac{k^2}{2005} > 1$,

故 $[\frac{(k+1)^2}{2005}] \geq [\frac{k^2}{2005}] + 1$, 即 $[\frac{1003^2}{2005}], [\frac{1004^2}{2005}], \dots, [\frac{2004^2}{2005}]$ 各不相同, 这些数有 $2004 - 1002 = 1002$ (个).

注意到 $[\frac{1003^2}{2005}] = 501 > [\frac{1002^2}{2005}]$, 就知集合 $\{n \mid n = [\frac{k^2}{2005}], 1 \leq k \leq 2004, k \in \mathbf{N}\}$ 共有 $501 + 1002 = 1503$ (个) 元素.

例5 以某些整数为元素的集合 P 具有下列性质: ① P 中的元素有正数, 有负数; ② P 中的元素有奇数, 有偶数; ③ $-1 \notin P$; ④若 $x, y \in P$, 则 $x+y \in P$. 试判断实数0和2与集合 P 的关系.

分析与解 由④, 知若 $x \in P$, 则 $kx \in P (k \in \mathbf{N})$. 由①, 可设 $x, y \in P$, 且 $x > 0, y < 0$, 则 $-y \cdot x = -|y| \cdot x (|y| \in \mathbf{N})$, 故 $xy, -y \cdot$





$x \in P$. 由④, 得 $0 = (-y \cdot x) + xy \in P$.

若 $2 \in P$, 则 P 中的负数全为偶数. 不然的话, $-(2k+1) \in P (k \in \mathbf{N})$, 则 $-(2k+1) + 2k = -1 \in P$, 这与③矛盾. 于是, 由②, 知 P 中必有正奇数. 设 $-2m, 2n-1 \in P (m, n \in \mathbf{N})$, 取适当正整数 q , 使 $q \cdot |-2m| > 2n-1$, 则负奇数 $-2qm + (2n-1) \in P$, 前后矛盾. 综上所述, $2 \notin P$.

方法技巧 对于集合中元素的公共属性是由多个条件限制的集合的元素的判定问题, 重在综合分析这些限制条件.

例 6 集合 $M = \{u | u = 12m + 8n + 4l, m, n, l \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{u | u = 20p + 16q + 12r, p, q, r \in \mathbf{Z}\}$.

试证: $M = N$.

分析与解 对 N 中任一元素 u , 有 $u = 20p + 16q + 12r = 12r + 8(2q) + 4(5p) \in M$, 从而 $N \subseteq M$. 另一方面, 对 M 中任一元素 u , 有 $u = 12m + 8n + 4l = 20n + 16l + 12(m-n-l) \in N$, 从而 $M \subseteq N$. 故 $M = N$.

方法技巧 利用两个集合相等的概念: “若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则 $A = B$ ”是证明集合相等的最有效方法.

例 7 设 $n \in \mathbf{N}$ 且 $n \geq 15$, A, B 都是 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 真子集, $A \cap B = \emptyset$, 且 $A \cup B = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

证明: A 或者 B 中必须有两个不同数的和为完全平方数.

分析与解 由题设, 知 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的任何元素必属于且只属于于它的真子集 A, B 之一.

假设结论不真, 则存在如题设的 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的真子集 A, B , 使得无论是 A 还是 B 中的任两个不同的数的和都不是完全平方数.

不妨设 $1 \in A$, 则 $3 \notin A$, 否则 $1+3=2^2$, 与假设矛盾, 所以 $3 \in B$. 同样 $6 \notin B$, 所以 $6 \in A$, 这时 $10 \notin A$ 即 $10 \in B$. 因 $n \geq 15$, 而 15 或者在 A 中, 或者在 B 中, 但当 $15 \in A$ 时, 因 $1 \in A, 1+15=4^2$, 矛盾; 当 $15 \in B$ 时, 因 $10 \in B$, 于是有 $10+15=5^2$, 仍然矛盾. 因此假设不



真, 即结论成立.

方法技巧 用反证法证本例.

例8 设 $A = \{X | X = a^2 + b^2, a, b \in \mathbf{Z}\}$, $X_1, X_2 \in A$, 求证: $X_1 \times X_2 \in A$.

分析与解 A 中的元素是什么? 是自然数, 即由两个整数 a, b 的平方和构成的自然数, 亦即从 $0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2, \dots$ 中任取两个(相同或不相同)数加起来得到的一个和数. 本题要证明的是: 两个这样的数的乘积一定还可以拆成两个自然数的平方和的形式, 即 $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (X)^2 + (Y)^2, X, Y \in \mathbf{Z}$.

设 $X_1 = a^2 + b^2, X_2 = c^2 + d^2, a, b, c, d \in \mathbf{Z}$,

则 $X_1 \times X_2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2 = a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2 + b^2c^2 - 2bcad + a^2d^2 = (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2$.

又 $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$, 故 $ac + bd, bc - ad \in \mathbf{Z}$, 从而 $X_1 \times X_2 \in A$.

方法技巧 本题的证明中根据 A 中元素的结构特点使用了配方法. 命题的结论说明集合 A 对于其中元素的“ $\times$ ”运算是封闭的. 类似的有:

自然数集合 $\mathbf{N}$ 对于“+”、“ $\times$ ”运算是封闭的;

整数集合 $\mathbf{Z}$ 对于“+”、“-”、“ $\times$ ”运算是封闭的;

有理数集合 $\mathbf{Q}$ 对于“+”、“-”、“ $\times$ ”、“ $\div$ ”运算是封闭的(除数不能是零);

实数集合对于“+”、“-”、“ $\times$ ”、“ $\div$ ”四则运算是封闭的.



集训演习二

题1 设 S 为满足下列条件的有理数的集合: ①若 $a \in S, b \in S$, 则 $a + b \in S, ab \in S$; ②对任一个有理数 r , 三个关系 $r \in S, -r \in S, r = 0$ 有且仅有一个成立. 证明: S 是由全体正有理数组成的集合.

解 设任意的 $r \in \mathbf{Q}, r \neq 0$, 由②, 知 $r \in S$, 或 $-r \in S$ 之一成立. 再由①, 若 $r \in S$, 则 $r^2 \in S$; 若 $-r \in S$, 则 $r^2 = (-r) \cdot (-r) \in S$. 总





之, $r^2 \in S$.

取 $r=1$, 则 $1 \in S$. 再由 ①, 得 $2=1+1 \in S, 3=1+2 \in S, \dots$, 可知全体正整数都属于 S .

设 $p, q \in S$, 由 ①, 知 $pq \in S$, 又由前证, 知 $\frac{1}{q^2} \in S$, 所以 $\frac{p}{q} = pq \cdot \frac{1}{q^2} \in S$. 因此, S 含有全体正有理数.

再由 ①, 知 0 及全体负有理数不属于 S . 即 S 是由全体正有理数组成的集合.

题 2 已知集合: $A = \{(x, y) \mid ax + y = 1\}, B = \{(x, y) \mid x + ay = 1\}, C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, 问:

(1) 当 a 取何值时, $(A \cup B) \cap C$ 为含有两个元素的集合?

(2) 当 a 取何值时, $(A \cup B) \cap C$ 为含有三个元素的集合?

解 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. $A \cap C$ 与 $B \cap C$ 分别为方程组

$$(i) \begin{cases} ax + y = 1, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 与 } (ii) \begin{cases} x + ay = 1, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

的解集. 由 (i) 解得 $(x, y) = (0, 1), (\frac{2a}{1+a^2}, \frac{1-a^2}{1+a^2})$; 由 (ii) 解得

$$(x, y) = (1, 0), (\frac{1-a^2}{1+a^2}, \frac{2a}{1+a^2}).$$

(1) 使 $(A \cup B) \cap C$ 恰有两个元素的情况只有两种可能:

$$\textcircled{1} \begin{cases} \frac{2a}{1+a^2} = 0, \\ \frac{1-a^2}{1+a^2} = 1; \end{cases} \quad \textcircled{2} \begin{cases} \frac{2a}{1+a^2} = 1, \\ \frac{1-a^2}{1+a^2} = 0. \end{cases}$$

由 ①, 解得 $a=0$; 由 ②, 解得 $a=1$.

故 $a=0$ 或 1 时, $(A \cup B) \cap C$ 恰为含有两个元素的集合.

(2) 使 $(A \cup B) \cap C$ 恰有三个元素的情况是: $\frac{2a}{1+a^2} = \frac{1-a^2}{1+a^2}$.



解得 $a = -1 \pm \sqrt{2}$, 故当 $a = -1 \pm \sqrt{2}$ 时, $(A \cup B) \cap C$ 恰为含有三个元素的集合.



综合创新导练

一、选择题

1. 命题甲: $x \neq 1\ 002$ 或 $y \neq 1\ 003$; 命题乙: $x + y \neq 2\ 005$, 则命题甲是命题乙的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

2. 已知 $M = \{(x, y) | x^2 + 2y^2 = 3\}$, $N = \{(x, y) | y = mx + b\}$, 若对于所有的 $m \in \mathbf{R}$, 均有 $M \cap N \neq \emptyset$, 则 b 的取值范围是 ()

- A. $[-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}]$ B. $(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$
C. $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ D. $[-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}]$

3. 已知集合 $A = \{x | 5x - a \leq 0\}$, $B = \{x | 6x - b > 0\}$, $a, b \in \mathbf{N}$, 且 $A \cap B \cap \mathbf{N} = \{2, 3, 4\}$, 则整数对 (a, b) 的个数为 ()

- A. 20 个 B. 25 个
C. 30 个 D. 42 个

4. 记 $[x]$ 为不大于 x 的最大整数, 设有集合 $A = \{x | x^2 - [x] = 2\}$, $B = \{x | |x| < 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $(-2, 2)$ B. $[-2, 2]$
C. $\{\sqrt{3}, -1\}$ D. $\{-\sqrt{3}, 1\}$

5. 设集合 $A = \{a^2 + 8 | a \in \mathbf{N}\}$, $B = \{b^2 + 29 | b \in \mathbf{N}\}$, 若 $A \cap B = P$, 则 P 中元素个数为 ()

- A. 0 个 B. 1 个
C. 2 个 D. 至少 3 个





6. 记集合 $T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $M = \{\frac{a_1}{7} + \frac{a_2}{7^2} + \frac{a_3}{7^3} + \frac{a_4}{7^4} \mid a_i \in T, i=1, 2, 3, 4\}$, 将 M 中的元素按从大到小的顺序排列, 则第 2 005 个数是 ()

A. $\frac{5}{7} + \frac{5}{7^2} + \frac{6}{7^3} + \frac{3}{7^4}$

B. $\frac{5}{7} + \frac{5}{7^2} + \frac{6}{7^3} + \frac{2}{7^4}$

C. $\frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{0}{7^3} + \frac{4}{7^4}$

D. $\frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{0}{7^3} + \frac{3}{7^4}$

二、填空题

7. 集合 X 中的元素是正整数, 且有性质: 若 $x \in X$, 则 $12 - x \in X$, 这样的集合 X 共有 _____ 个.

8. 设集合 $M = \{1, 2, \dots, 100\}$, A 是 M 的子集, 且 A 中至少含有一个立方数, 则这种子集 A 的个数是 _____.

9. 设集合 $M = \{x \mid \frac{x-2}{3} + \frac{x-3}{2} = \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x-3}\}$, $N = \{x \mid \frac{x-6}{5} + \frac{x-5}{6} = \frac{5}{x-6} + \frac{6}{x-5}\}$, 求 $M \cap N =$ _____.

10. 已知平面上两个点集 $M = \{(x, y) \mid |x + y + 1| \geq \sqrt{2(x^2 + y^2)}, x, y \in \mathbf{R}\}$, $N = \{(x, y) \mid |x - a| + |y - 1| \leq 1, x, y \in \mathbf{R}\}$. 若 $M \cap N \neq \emptyset$, 则 a 的取值范围是 _____.

11. 设 a 为实数, 集合 $A = \{-a, a^2, a^2 + a\}$, $B = \{-1, -1 - a, 1 + a^2\}$, $A \cap B \neq \emptyset$, 则 $A \cap B =$ _____.

12. 已知 $A = \{x \mid x^2 - 4x + 3 < 0, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x \mid 2^{1-x} + a \leq 0, x^2 - 2(a+7)x + 5 \leq 0, x \in \mathbf{R}\}$. 若 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

三、解答题

13. 设集合 $A = \{x \mid \log_{\frac{1}{2}}(3-x) \geq -2\}$, $B = \{x \mid \frac{2a}{x-a} > 1\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.



14. 对于函数 $f(x)$, 若 $f(x)=x$, 则称 x 为 $f(x)$ 的“不动点”; 若 $f(f(x))=x$, 则称 x 为 $f(x)$ 的“稳定点”. 函数 $f(x)$ 的“不动点”和“稳定点”的集合分别记为 A 和 B , 即 $A=\{x|f(x)=x\}$, $B=\{x|f(f(x))=x\}$.

(1) 求证: $A \subseteq B$;

(2) 若 $f(x)=ax^2-1$ ($a \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}$), 且 $A=B \neq \varnothing$, 求实数 a 的取值范围.





第2讲 函 数



联赛知识导航

1. 函数的图象.

(1) 函数的图象的平移变换与伸缩变换.

平移变换: $y=f(x)$ $\xrightarrow[\text{向上平移 } b \text{ 个单位}]{\text{向右平移 } a \text{ 个单位}}$ $y-b=f(x-a)$,

伸缩变换: $y=f(x)$ $\xrightarrow[y \text{ 伸长到原来的 } B \text{ 倍}]{x \text{ 伸长到原来的 } A \text{ 倍}}$ $\frac{1}{B}y=f(\frac{1}{A}x) (A>$

$0, B>0)$.

(2) 函数的图象的对称变换与翻折变换.

对称变换: 通过点对称进行研究.

翻折变换: $y=f(x)$ $\xrightarrow[\text{再作关于 } y \text{ 轴对称的图象}]{\text{保留 } y \text{ 轴右边的图象, 去掉 } y \text{ 轴左边的图象}}$

$$y=f(|x|),$$

$y=f(x)$ $\xrightarrow[\text{并将 } x \text{ 轴下方的图象翻折到 } x \text{ 轴上方去}]{\text{保留 } x \text{ 轴上方的图象}}$ $y=|f(x)|$.

2. 函数的性质.

(1) 奇偶性: 定义域关于原点对称, 且 $f(-x)=f(x)$ (偶), 或 $f(-x)=-f(x)$ (奇).

(2) 单调性: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (增) 或 $f(x_1) > f(x_2)$ (减).

(3) 周期性: 对于周期 $T>0$, 有 $f(x+T)=f(x)$.

3. 函数的最大值与最小值.

(1) 对于定义域 D 内的任意 x , 存在 $x_0 \in D$, 使得 $f(x) \leq$





$f(x_0)$, 则 $f_{\max}(x) = f(x_0)$; 对于定义域 D 内的任意 x , 存在 $x_1 \in D$, 使得 $f(x) \geq f(x_1)$, 则 $f_{\min}(x) = f(x_1)$.

(2) $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 内连续, 则 $f(x)$ 必有最大值与最小值.

(3) $f(x) \geq g(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow f_{\min}(x) \geq g_{\max}(x)$, 或 $[f(x) - g(x)]_{\min} \geq 0$.

4. 函数性质问题主要表现为各种性质之间的综合以及各种性质与其他知识, 如不等式、方程等知识的综合, 在解题时需要的基础知识, 如单调性、奇偶性、对称性等牢固掌握, 并在此基础上对问题进行逐项分析, 综合理解、透析问题的本质. 在解决比较复杂的函数性质应用问题时, 可以根据问题的具体条件, 在不同的区间, 运用不同的知识点(如基本不等式或单调性)的优点解决不同区间上的最值问题. 另外, 奇偶性可以使得在研究函数性质时, 将问题转化到定义域的对称区间上.

5. 在解决以方程、不等式等形式出现的问题时, 既要熟悉通性通法, 也要敢于打破思维定势, 换一个角度思考问题. 往往需要我们构造相应函数, 进而运用函数的性质进行综合分析, 求解. 解题的关键在于所构造的函数应当具有单调性和奇偶性(对称性). 尤其要注意方程不等式中各个变量的地位是平等的, 这使得我们可以视问题的具体要求, 构造不同的目标函数, 使问题解答得以优化.

6. 解决抽象函数形式出现的问题时, 常用赋值法来寻求函数的特殊值和表达式. 赋值法可使抽象函数变得形象、直观. 抽象函数问题往往含有条件式, 对这些条件进行形式上的对照, 会发现有不少条件式的形式与指数、对数的性质, 三角函数的公式一致, 此时, 类比相关的指数、对数函数、三角函数来代替问题中的抽象函数, 使函数的各种性质一目了然.

7. 分类讨论及等价转化是处理函数问题的常见手段, 在分类时一定要遵守原则: 从简单到复杂, 不重不漏. 命题转化时一定要注意命题转化的等价性. 为此一定要认真审题, 充分挖掘题中的隐含条件. 换元法也是常用的方法之一, 换元的目的是为了使命题更加





清晰明了,使换元后的命题变得更加明朗、易于解决.换元时要注意变量的取值范围.



思想方法导引

例1 已知 m, n 为正整数, $a > 0, a \neq 1$ 且 $\log_a m + \log_a (1 + \frac{1}{m}) + \log_a (1 + \frac{1}{m+1}) + \cdots + \log_a (1 + \frac{1}{m+n-1}) = \log_a m + \log_a n$, 求 m, n .

分析与解 左边

$$\begin{aligned} &= \log_a m + \log_a (1 + \frac{1}{m}) + \log_a (1 + \frac{1}{m+1}) + \cdots + \log_a (1 + \frac{1}{m+n-1}) \\ &= \log_a [m \cdot (1 + \frac{1}{m}) \cdot (1 + \frac{1}{m+1}) \cdot \cdots \cdot (1 + \frac{1}{m+n-1})] \\ &= \log_a (m \cdot \frac{m+1}{m} \cdot \frac{m+2}{m+1} \cdot \cdots \cdot \frac{m+n}{m+n-1}) \\ &= \log_a (m+n), \end{aligned}$$

所以 $\log_a (m+n) = \log_a (mn)$, 得 $m+n=mn$, 变形为 $(m-1)(n-1)=1$.

因为 m, n 为正整数, 所以 $\begin{cases} m-1=1, \\ n-1=1. \end{cases}$ 从而 $m=n=2$.

方法技巧 (1) 题目中的 $m \cdot (1 + \frac{1}{m}) \cdot (1 + \frac{1}{m+1}) \cdot \cdots \cdot (1 + \frac{1}{m+n-1})$ 是运算的难点, 通分之后变形为 $m \cdot \frac{m+1}{m} \cdot \frac{m+2}{m+1} \cdot \cdots \cdot \frac{m+n}{m+n-1}$, 特征就较为明显, 运用累乘法即可解决. 在解决特征隐蔽的题目时, 要结合题目条件, 进行合理转化, 以便使隐性特征显性化.

(2) 将 $m+n=mn$ 变形为 $(m-1)(n-1)=1$, 也是为了使隐性特征显性化, 以应用 m, n 为正整数这个条件.

例2 设 $f(x) = \min(3 + \log_{\frac{1}{4}} x, \log_2 x)$, 其中 $\min(p, q)$ 表示