作 者 简 介

雅科夫·伊西达洛维奇·别莱利曼（Я.И.Перельман）（1882–1942）不是一个可以用“学者”这个词的本意来形容的学者。他没有过科学发现，没有过什么称号，但是他把自己的一生都献给了科学；他从来不认为自己是一个作家，但是他的作品的印刷量足以让任何一个成功的作家艳羡不已。

别莱利曼诞生于俄国格罗德省别洛斯托克市。他 17 岁开始在报刊上发表作品，1909 年毕业于圣彼得堡林学院，之后便全力从事教学与科学写作。1913 ~ 1916 年完成《趣味物理学》，这为他后来完成一系列趣味科学读物奠定了基础。1919 ~ 1923 年，他创办了苏联第一份科普杂志《在大自然的实验室里》并任主编。1925 ~ 1932 年，担任时代出版社理事，组织出版大量趣味科普图书。1935 年，他创办和主持列宁格勒（圣彼得堡）“趣味科学之家”博物馆，开展广泛的少年科学活动。在反法西斯侵略的卫国战争中，还为苏联军人举办军事科普讲座，这也是他几十年科普生涯的最后奉献。在德国法西斯侵略军围困列宁格勒期间，这位对世界科普事业做出非凡贡献的趣

味科学大师不幸于 1942 年 3 月 16 日辞世。

别莱利曼一生写了 105 本书，大部分是趣味科学读物。他的作品中很多部已经再版几十次，被翻译成多国语言,至今依然在全球范围再版发行,深受全世界读者的喜爱。

凡是读过别莱利曼的趣味科学读物的人,无不为他作品的优美、流畅、充实和趣味化而倾倒。他将文学语言和科学语言完美地结合,将生活实际与科学理论巧妙联系:能把一个问题、一个原理叙述得简洁生动而又十分准确、妙趣横生——使人忘记自己是在读书、学习,而倒像是在听什么新奇的故事。

1957 年苏联发射了第一颗人造地球卫星。1959 年发射的无人月球探测器“月球 3 号”传回了航天学史上第一张月球背面照片,其中拍到的一个月球环形山后来被命名为“别莱利曼”环形山,用以纪念这位卓越的科普大师。

著者第三版序言

不能把这本书看做是给初学者用的浅明的代数学课本。象我这套书中的其他作品一样,《趣味代数学》的目的完全不是作教科书,而是作课外读物。它的读者对象应该对代数已经有一些认识,哪怕是一知半解好。《趣味代数学》的目标一方面就是要搞清、重温并且巩固这些不连贯的和不踏实的知识,但是主要目标还是培养读者对代数课的兴趣,并且引起他按照教科书来补足自己学力上欠缺的愿望。

为了使本书的内容更富于吸引力和更有趣味,我在书里采用了各式各样的方法:取材别致而能激起好奇心的数学问题,数学史领域里有趣的涉猎,代数在实际生活上意料不到的应用等等。

本书包括的代数材料, 份量并没有超出中学课程的范围,这个领域里的各部分都讲到一点。为了适合这本书所规定的任务,对艰深的理论问题就避去不谈了。

目 录

第 1 章 第五种数学运算

第 2 章 代数的语言

第 3 章 对算术的帮助

第 4 章 刁藩都方程

第 5 章　第六种数学运算

第 6 章　二次方程

第 7 章　最大值和最小值

第 8 章　级数

第 9 章　第七种数学运算

第1章

chapter 1

第五种数学运算

1.1
第五种运算

代数往往被称做“有七种运算的算术”，因为除了人人都知道的加减乘除四种运算外，还添上了三种新的：乘方和它的两种逆运算。

我们关于代数的谈话就是从“第五种运算”——乘方开始。

这种新的运算是不是由实际生活的需要产生的呢？这是毫无疑问的。我们在实际计算中时常遇见它。回想一下许多算面积、算体积的例子，那儿一般地都有二次方和三次方的数出现。还有：万有引力、静电作用和磁性作用、光、声等，它们的强弱都和距离的二次方成反比例。行星绕太阳（以及卫星绕行星）旋转的周期和它离旋转中心的距离也是用乘方的关系连系着：周期的二次方和距离的三次方成正比。

可是，不要以为我们在实用上只能遇见二次方和三次方，而更高次的乘方只是在代数练习中才有。工程师计算各种材料的强度，要经常和四次方打交道，至于另外一些计算，例如蒸汽管的直径，甚至要用到六次方。

为了研究流水冲击石块的力量，水力学家也要遇到六次方：如果一条河的流速有另外一条的四倍大，那么流得快的河冲击它河床里的石子的力量就有流得慢的河的4^6倍，也就是4,096倍[①]。

假使我们研究炽热的物体——例如电灯泡里面的钨丝——的亮度和温度的关系，那么我们还会碰到更高次的乘方。物体白热的时候，总的亮度依温度（这是指的“绝对温

① 关于这一点的更详细的说明，可以参看作者的《趣味力学》第九章。

度”就是说从−273℃起算的温度)的十二次方而增高,而赤热的时候就依温度的三十次方而增高。这就是说,比如物体从2,000K加热到4,000K(绝对温度),就是加热到2倍,亮度就增强到2^{12}倍,也就是增强到4,000倍以上。这种独立的关系在制造电灯泡的技术上有什么意义，我们在下面还要讲到。

1.2 天文数字

可能没有人像天文学家这样广泛地应用第五种数学运算的了。在宇宙的研究中,处处都要遇到极其巨大的数字,只有一两位有效数字,后面添写一长串的0。像这一类数,一般叫做“天文数字”是很适当的,用普通的记数法来写的话,必然引起极大的不方便,尤其是用它们进行计算的话。例如从地球到仙女座星云的距离,照普通的写法,等于这样多的千米:

95 000 000 000 000 000 000

在天文计算中,天体间的距离往往不能用千米或更大的单位而用厘米表示。这样一来,我们这个数就得添上五个0:

9 500 000 000 000 000 000 000 000

恒星的质量要用更大的数来表示,尤其如果把它们用克来表示的时候,这在许多计算里面是必需的。太阳的质量用克表示就等于:

1 983 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000。

很明白,用这样大的数来进行计算是多么困难,而且多么容易发生错误。何况上面所举的还不是最大的天文数字!

第五种数学运算就使计算上的这种困难简单地克服了。

凡是1后面带着一些0的数目,就表示成10的若干次方:

$$100=10^{2}\quad 1,000=10^{3}\quad 10,000=10^{4},\text{等等。}$$

前面讲到的巨大数目因此就可以表示成这样的形式:

第一个数……………$95\cdot10^{23}$,

第二个数……………$1\ 983\cdot10^{30}$。

这样的表示方法，不但可以节省地位，还可以便利演算。例如,假设要求把这两个数目乘起来,那么只要用乘法求出$95\times1\ 983=188\ 385$,再在后面写上因数$10^{231+30}=10^{53}$:

$$95\cdot10^{23}\times1,983\cdot10^{30}=188,385\cdot10^{53}\text{。}$$

这比起先写一个有21位0的数,再写一个有30位0的数,结果得出一个有53位0的数来，当然方便得多了,——不但方便,而且可靠,因为连写几十个0也许会漏掉一两个0,结果就错了。

1.3
空气有多重?

为了使你相信,用乘方形式表示大数能使实际计算工作变得多么容易,让我们来做一个演算:求地球的质量比它周围全部空气的质量大多少倍。

我们知道,空气压在地球表面每一平方厘米上的大气柱的重量等于1千克。这就是说,支在1平方厘米上的力约等于1千克。地球周围的大气层可以看做由这样一条条的空气柱拼成的;我们的行星的面积有多少平方厘米,这样的空气柱就有多少条,全部大气也就有多少千克重。翻一下参考书,知道地球面积等于51,000万平方千米,也就是$51\cdot10^{7}$平方千米。

算一算，1平方公里有多少平方厘米呢？1千米有1,000米，每米有100厘米，所以1千米是10^5厘米，而1平方千米是$(10^5)^2=10^{10}$平方厘米。因此地球的全面积是

$$51\cdot10^7\times1\times10^{10}=51\cdot10^{17}$$

平方厘米。地面大气的重量也就是这么多千克。化做吨，就得到

$$51\cdot10^{17}\div1,000=51\cdot17^{17}\div10^3=51\cdot10^{17-3}=51\cdot10^{14}.$$

地球的质量等于这个数目：

$$6\cdot10^{21}\text{吨},$$

要求出我们的行星有它周围空气层多少倍重，用除法：

$$6\cdot10^{21}\div51\cdot10^{14}\approx10^6,$$

就是说，大气质量大约只抵得地球质量的一百万分之一。

1.4 没有火焰和热的燃烧

假使你问一位化学家，为什么木柴和煤只能在高温下燃烧，他会告诉你，碳元素和氧元素的化合，严格地说起来，是在任何温度下都能进行的，不过在低温的时候，化合过程进行得极慢（就是只有极少数分子参与反应），因此不能被我们观察出来。确定化学反应速度的定律告诉我们，温度每降低10℃，反应速度（参与反应的分子数目）就降低一半。

把这定律应用到木头和氧化合的反应上，就是木柴燃烧的过程上。假定在火焰温度600℃的时候，每秒钟烧掉1克的木头。在温度20℃的时候要烧掉1克木头得多少时间呢？这儿温度降低了$580=58\cdot10$℃，所以反应速度就降低到

$$2^{58}\text{倍},$$

就是说1克的木柴要烧上2^{58}秒。

这样一段时间合多少年？我们可以大致地算出来，用不着真的把2连乘57次，也不用翻对数表。只要利用

$$2^{10}=1,024\approx10^{3}。$$

因此，

$$2^{58}=2^{60-2}=2^{60}\div2^{2}=\frac{1}{4}\cdot2^{60}=\frac{1}{4}\cdot(2^{10})^{6}\approx\frac{1}{4}\cdot10^{18},$$

就是大约百万万万万秒的四分之一。一年大约有3,000万秒就是$3\cdot10^{7}$秒；因此

$$(\frac{1}{4}\cdot10^{18})\div(3\cdot10^{7})=\frac{1}{12}\cdot10^{11}\approx10^{10}。$$

一百万万年！这就是1克木柴没有火焰和热的燃烧大约可以延续的年数。

所以木柴和煤在寻常温度下燃烧着，好像没有什么热。取火工具的发明把这种极端缓慢的过程加快了不知多少万倍。

1.5
天气的变化

［**题**］假定天气只用天上有没有云这一种特征来区分，也就是只用晴天和阴天来分类。那么你认为，在这样的条件之下有不同天气变化的星期数目多不多呢？

粗想一下好像不多：只要两个月过去，那么一星期里面晴天和阴天的各种组合都全了；在这以后，以前已经出现过的组合中总有一个会不可避免地重复出现。

可是，让我们再来准确地算一算，在这种条件下究竟有多少种可能的不同组合。这么一个问题，意想不到又引到第五种数学运算上去。

那么，一星期里面晴天和阴天的变化能有多少种情形？

［**解**］这星期的第一天也许是晴的，也许是阴的；现在已经有两种“组合”。

在两天里面，可能的晴阴次序如下：

晴和晴　　阴和晴
晴和阴　　阴和阴

两天里面一共有2^2种不同的变化。在三天里面，前两天的每一种都可以和第三天的两种组合相结合；所有变化的数目是

$$2^2 \times 2=2^3。$$

在四天里面，变化的数目是

$$2^3 \times 2=2^4。$$

在五天里面可以有2^5种变化，在六天里面有2^6种，最后一星期中有2^7=128种不同的变化。

因此得出，一星期里面晴阴变化可以有128情形。经过128个星期以后，也就是128 × 7=896天以后，上面所讲到的组合总会有一个要发生重复的；自然，这种重复可以发生得早些；不过896天却是一天期限，过了这个期限就不可避免要发生重复了。反过来看，却也可能整整经过两年多一点（2年又166天），其间每个星期的天气变化都和其他星期不同。

1.6 锁的秘密

[**题**] 某机关发现了一只保险柜，是很久以前保留下来的。一找钥匙倒是有的，可是，想要利用它，还须先知道锁的秘密。保险柜的门只有把门上五个圈子里的字母——每个圈子边上都有36个字母——恰好排成某个字，才能打开。因为没有人知道这个字，为了不破坏这个柜子，就决定把圈子里各字母的一切组合都试上一遍。每排成一个组合需要3秒钟时间。

想把这柜子在最近十个工作日以内打开来，能办得到吗？

[**解**] 先算一下，如果统统试上一遍的话，这些字母的组合一共有多少。

第一圈36个字母中的随便一个可以和第二圈36个字母中的随便一个拼合。这就是说，取两个字母的组合数目是

$$36\times 36=36^2。$$

这些组合中的任意一个可以加上第三圈36个字母中的任意一个。因此取三个字母的组合数目是

$$36^2\times 36=36^3。$$

照这样推想，就可以断定，四个字母的组合数目是36^4，而五个字母的组合数目是36^5就是60，466，176。如果想把这6，000多万组合都拼完，假定每个组合要3秒钟，就要

$$3\times 60,466,176=181,398,528$$

秒。这就超过50，000小时，按每天工作八小时计算，大约6，300工作日——差不多20年。

这就是说，想花10个工作日就把柜子打开来，它的机会

只有10比6,300,就是1比630。这个概率是很小的。

1.7 迷信的骑车人

［**题**］有个人买了一辆自行车，想学着骑。这人有个毛病,就是特别迷信。他听说自行车最忌讳“8”字,他就唯恐自己的车牌上出现这个倒霉的8字。走在取车牌的路上,他这样盘算:不管写什么数,总跑不了0,1,2,……9这十个数字。而十个之中有一个8是“倒霉”数。可见碰上“倒霉”号的机会只有十分之一。

他的这个判断对吗?

［**解**］自行车牌的号码是6位，一共有999,999个号:从000001,000002,……直到999999。我们来算一下,有几个“幸运”号。在第一位数字上可能出现9个“幸运”数中的任何一个:0,1,2,3,4,5,6,7,9;在第二位数字上也可能出现这9个数中的任何一个。对于两位数来说,存在着$9\times9=9^2$个“幸运”数组合。在每一个这样的两位数后边(在第三位上)可以再写上9个“幸运”数中的任何一个,因此,“幸运”的三位数组合可能有$9^2\times9=9^3$个。

这样我们得出六位的“幸运”数组合有9^6个。不过,考虑到里面包括了000,000这一个组合,而它是不能作自行车牌号的。所以,自行车牌的“幸运”号有$9^6-1=531,446$个,只占所有号码的53%稍多一些,而不是那位骑车人所想的90%。

如果车牌号是7位,那么“倒霉”号就要比“幸运”号多了,请读者自己证明。

1.8
用 2 累乘的结果

一个很小的数，如果用2累次乘它，就可以非常快地变大。一个惊人的例子就是关于国际象棋发明人的奖赏的这个著名的故事。这个古典的例子，不打算多说了，还是来看看一个大家不怎么知道的吧。

［**题**］一个草履虫平均每27小时就要分裂成两个。假使所有这样用分裂法繁殖出来的虫都能活着，那么，要想由一个草履虫生出的后代所占的体积跟太阳一样大，得多少时间呢？

已经知道的数据是：一个草履虫的四十代子孙，如果每次分裂都不死去，所占的体积是1立方米；太阳的体积等于10^{27}立方米。

［**解**］上面的问题实际就是：求1立方米要用2累乘几次才得到10^{27}立方米。因为$2^{10}\approx1,000$，所以我们可以这样写：

$$10^{27}=(10^{3})^{9}\approx(2^{10})^{9}\approx2^{90}。$$

这就是说，这第四十代只要再经过90次分裂，就能达到太阳的体积。如果从第一代算起，就是第40+90=130代。也容易算出，这一代产生在第147天上。

我们得知道，真个有位微生物学家曾经观察一个草履虫的分裂到第8061次。请读者自己来计算，假使这许多草履虫里面没有一个死掉，那么最末一代要占多少体积呢？

刚才的问题还可以反过来像下面那样提：

假想太阳分裂做两个，每一半又分裂做两个，这样一直分裂下去。要分裂多少次，得出来的粒子就和草履虫一样大？