QINGSONG SHANG GAOZHONG

初中高中衔接读本

轻松上高中

数学

新课程
XINKECHENG

新理念
XINLINIAN

新方法
XINFANGFA

浙江教育出版社

目 录 CONTENTS

编者的话

《轻松上高中》丛书是专为初中毕业、即将升入高中的学生而编写的课外读物，包括语文、数学、英语、物理、化学五门学科。

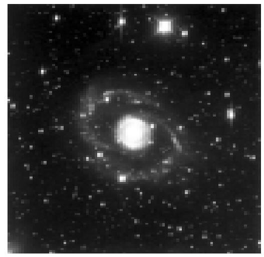
比较初高中数学，在教材内容、教学要求、教学方式、思维层次，以及学习方法上都发生了突变。就教材内容而言，与初中数学教材比较，高中数学概念抽象，定理严谨，逻辑性强，教材叙述比较严谨、规范，知识难度加大，且习题类型多，解题技巧灵活多变，计算繁冗复杂，体现了"起点高、难度大、容量多"的特点。就思维层次而言，高中数学对数学能力和数学思想的运用要求明显提高。高中数学突出四大能力，即运算能力，空间想象能力，逻辑推理能力和分析问题、解决问题的能力；渗透四大数学思想方法，即数形结合，函数与方程，等价与变换，分类与讨论。这些虽然在初中数学中有所体现，但到高中才充分反映出来。这些能力、思想方法也正是高考命题的要求。本书根据内容编排章节，旨在从内容方面，为初中毕业生补充一些与高中数学联系较大的知识，如代数式的运算、化简、求值；函数的确定和性质；立体几何中空间问题转化为平面问题等。可以说是部分初中数学知识的延拓和提高，但不是简单的重复。内容不求面面俱到，以实用为原则。另外，对高中数学所用到的数学能力和数学思想渗透在内容中讲述。

参加本书编写的有：许芬英、朱恒元、郑日锋、蔡小雄、俞小平、吕峰波、李柏青、张宗余、黄宗巧、胡克元、陈云彪等教师，全书由许芬英统稿。

2006 年 5 月

第1章　数

1.1　数的规律



普鲁士天文学家提丢斯(Titius,1729～1796)通过研究下面一列数3,6,12,24,48,96,192,…,推导出从太阳到行星的距离的经验定律,并探明了一些行星.

这是科学史上的一个真实故事!

提丢斯发现:

1. 每个数恰好是前一个数的2倍;

2. 如果把0加在这一列数的最前面作为第一个数,我们再做一个简单的运算:每个数加上4,然后再除以10,就得到另一列数:0.4,0.7,1.0,1.6,2.8,5.2,10.0,19.6,…

这可不是一列简单的数:第一个数表示太阳到其最近的行星——水星的近似距离,第二个数表示太阳到金星的近似距离……依次类推,他得到一张出色的表:

行星 距离 类别	水星	金星	地球	火星	?	木星	土星	?	?
实际距离	0.39	0.72	1.0	1.52	?	5.2	9.5	?	?
计算距离	0.4	0.7	1.0	1.6	2.8	5.2	10.0	19.6	…

注:表中数据的单位是天文单位,一个天文单位等于太阳到地球的距离,约为149 597 870km.

当时表中还有一些空格未填上.1781年,人们发现了天王星(与太阳的距离是19.2天文单位),差不多恰好处在定律所预言的轨道(19.6)上.于是,天文学家们开始在距离约为2.8个天文单位的区域寻找尚未被发现的行星.1801年,意大利天文学家比亚兹(Biyaz,1749～1826)果然在这个区域发现了谷神星,它与太阳的近似距离为2.7个天文单位.

小小一列数真不简单!

本节我们将探究数的规律,并根据它们的规律求一些较为复杂的算式的和.

例1　观察下列已有数的规律,在"(　　)"内填入恰当的数.

1, 1, 2, 3, 5, 8, (　　), 21, 34, (　　), 89, …

分析　我们观察发现:1+1=2,1+2=3,2+3=5,3+5=8,…也就是说,从第3个数开始,每一个数是其前2个数的和.所以8后面的数是13,34后面的数是55.

这一列数最初由意大利数学家斐波那契(Fibonacci,约1170～约1250)在其著作《算盘书》中提出的一个"兔子问题",后来被广泛应用于传染病预测、植物的花瓣数、松果的排列数等.

一般地，为了寻找这些数的规律，我们总是从它们相邻的数之间找规律．比如，有的是按增加或减少相同数值的规律排列，有的则按增加或减少相等的倍数排列等．

例 2 求下列各算式的和：

（1）$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{90}$；

（2）$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

分析 分数相加，一般先将分母通分，然后相加．但对上述两个问题采用这个方法显然太繁琐，甚至行不通. 仔细观察算式的特征，我们发现每一项的分母是两个数的乘积，若把这一项拆成两个分数的差再进行计算，则比较简便.

解 （1）$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{90}$

$$=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{8\times 9}+\frac{1}{9\times 10}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$$

$$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}.$$

（2）$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{n}{2n+1}.$$

如例 2 这种求和方法，我们称它为拆项法（也可叫裂项法）. 它主要是将所求算式的每一个数或式，拆成两个数或式的差，然后求和．

试一试，你能用类似的方法求算式：$\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\frac{1}{3\times 4\times 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$的值吗？

作业题

A 组

1. 观察下列已有数的规律，在“（　　）”内填入恰当的数：

（1）0.5，1.5，4.5，（　　），40.5，…

（2）1，（　　），9，（　　），25，36，49，…

2. 如图，表中已经填入了 1～16 这 16 个数中的一些数，请将剩下的数填入空格中，使每行、每列及对角线上各数的和都为 34.

	2	3	
5			8
9			12
	14	15	

（第 2 题）

3. 我们通常用 a_n 表示一列数中的第 n 个数. 已知某一列数中的第一个数 $a_1=1$，第 n 个数 a_n 与第 $n+1$ 个数 a_{n+1} 满足关系式 $a_{n+1}=\dfrac{1}{1+a_n}$. 试写出这列数中的第 4 个数与第 6 个数.

B 组

4. 已知某一列数的前 5 个数为 $\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$，3，$\sqrt{11}$. 试写出这列数的第 7 个数和第 9 个数，并写出这列数中的第 n 个数 a_n.

5. 计算：

（1）$(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+\cdots+(99^2-100^2)$；

（2）$\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1}{2\times4}+\dfrac{1}{3\times5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+2)}$.

阅读材料

斐波那契

斐波那契，意大利数学家，12，13 世纪欧洲数学界的代表人物．生于比萨，早年跟随经商的父亲到北非的布日伊（今阿尔及利亚东部的小港口贝贾亚），在那里受教育．以后到埃及、叙利亚、希腊、西西里、法国等地游历，熟习了不同国度在商业上的算术体系．1200 年左右回到比萨，潜心写作．

他的书保存下来的共有 5 种．最重要的是《算盘书》(Liber Abac，1202 年完成，1228 年修订，亦译作《算经》），算盘并不单指罗马算盘或沙盘，实际是指一般的计算．《算盘书》最大的功绩是系统介绍印度记数法，影响并改变了欧洲数学的面貌．现传《算盘书》是 1228 年的修订版，其中最耐人寻味的是，这本书中出现了中国《孙子算经》中的不定方程解法. 书中的题目是：一个不超过 105 的数分别被 3，5，7 除，余数是 2，3，4，求这个数．解法和《孙子算经》一样．另一个“兔子问题”也引起了后人的极大兴趣：假定一对大兔子每一个月可以生一对小兔子，而小兔子出生后两个月就有生殖能力，问从一对大兔子开始，一年后能繁殖成多少对兔子？这就是“斐波那契数列”：1，1，2，3，5，8，13，21，…其规律是每一项（从第 3 项起）都是前两项的和．这个数列与后来的“优选法”有密切的关系．

斐波那契的其他数学著作还有《几何实践》(Practica Geometriae，1220)，着重叙述希腊几何与三角术；《平方数书》(VLiber Quadratorum，1225)，专论二次丢番图方程；《花朵》(Flos，1225)，内容多为菲德里克(Frederick)二世宫廷数学竞赛问题．

斐波那契数列有许多奇妙的规律，如第 3 项、第 6 项、第 9 项、第 12 项的数能够被 2 整除．请你仔细观察这列数，再写出 2 条有关这列数的性质．

1.2 数的运算

1

图中是建设中的天下第一跨度的跨海大桥——杭州湾大桥．桥梁、房屋等建筑的设计和现实生活中的许多问题都需要进行运算.

不用计算器,你能快速计算出$(10^4-1)^2$的结果吗？

解法一 先计算出$10^4-1=9999$,

再计算9999×9999,得$(10^4-1)^2=99980001$.

解法二 利用代数恒等式$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$,可得:

$(10^4-1)^2=(10^4)^2-2\times10^4\times1+1^2=10^8-2\times10^4+1=99980001$.

从以上计算我们可以发现,计算也有诀窍与规律.抓住了规律,计算就可能变得较为简便.

例 1 已知$x=8$,计算:$(x^2-1)(1+x+x^2)-x^3+1$.

分析 若将$x=8$直接代入计算,过程比较繁琐.我们可以运用代数式的运算规律,注意到$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$,$x^2-1=(x+1)(x-1)$,则原式可先化简,再代入求值.

解 原式

$$\begin{aligned}&=(x+1)(x-1)(1+x+x^2)-(x^3-1)\\&=(x+1)(x^3-1)-(x^3-1)\\&=(x^3-1)(x+1-1)\\&=x(x^3-1)\\&=8\times(8^3-1)=4088.\end{aligned}$$

例 2 已知$a=2-\sqrt{3}$,$b=2+\sqrt{3}$,计算:$\dfrac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$.

分析 观察a,b这两个根式,它们的乘积$ab=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$,不含根式,我们称之为“共轭根式”.在这里,充分运用“$ab=1$”这一性质和提取公因式,可简化计算.

解法一 $\dfrac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}=\dfrac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{b}(\sqrt{b}+\sqrt{a})}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{a}{\sqrt{ab}}=a=2-\sqrt{3}$.

解法二 $\dfrac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}=\dfrac{a+1}{b+1}=\dfrac{a+ab}{b+1}=\dfrac{a(1+b)}{b+1}=a=2-\sqrt{3}$.

通过以上两例,你是否体验到了“用字母代替数”的优越性了？解这类问题,通常先进行含字母的代数式运算,利用运算规则进行化简,再将数代入计算.这样往往能减少计算量,提高解题的正确性.

作业题

A组

1. 计算：$(-6)^{15}\div(-8)^{5}\div(-9)^{7}-(-0.75)^{3}\times(-2)^{6}$.

2. 下列各算式中，运算结果等于1的有____________（只需填写序号）.

①$\dfrac{3-\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}$；　②$\dfrac{3(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}$；　③$(2-\sqrt{5})^{2}(2+\sqrt{5})^{2}$；　④$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$.

3. 计算：

（1）$(\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{6})$；

（2）已知 $a=b=2$，$x=5$，$y=4$，求 $(2\sqrt{ax}-5\sqrt{by})\cdot(2\sqrt{ax}+5\sqrt{by})$ 的值.

B组

4. 计算：

（1）$(3+\sqrt{10})^{15}\cdot(3-\sqrt{10})^{15}$；

（2）$\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}-\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^{2}$.

5. 已知 $a=2$，计算：$(1+a)(1+a^{2})(1+a^{4})\cdot\cdots\cdot(1+a^{2^{n}})$ 的值.

2

我们已学过实数的四则运算及乘方、开方运算，在高中，除实数的这些运算外，还有其他一些运算.

例3　记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 如 $[2.1]=2$，$[-0.128]=-1$，$\left[\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right]=0$. 试计算：$\left[-\dfrac{\pi}{3}\right]+3\cdot[\sqrt{2}]-\left[-\dfrac{5\sqrt{3}}{6}\right]$.

解　原式 $=-2+3\times1-2=-1$.

例4　设 x_1, x_2, y_1, y_2 是实数，我们定义一种运算"$\cdot$"，使 $(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2)=x_1x_2+y_1y_2$.

（1）计算 $(\sqrt{15}, -2\sqrt{2})\cdot(2\sqrt{5}, \sqrt{6})$ 的值；

（2）试证明：$(mx_1, my_1)\cdot(nx_2, ny_2)=mn[(x_1, y_1)\cdot(x_1, y_2)]$.

解　（1）$(\sqrt{15}, -2\sqrt{2})\cdot(2\sqrt{5}, \sqrt{6})=\sqrt{15}\times2\sqrt{5}+(-2\sqrt{2})\times\sqrt{6}=6\sqrt{3}$.

（2）证明：左边 $=(mx_1, my_1)\times(nx_2, ny_2)=(mx_1)\times(nx_2)+(my_1)\times(ny_2)$

$=mn(x_1x_2+y_1y_2)$；

右边 $=mn(x_1x_2+y_1y_2)$，

$\therefore\quad (mx_1, my_1)\cdot(nx_2, ny_2)=mn[(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2)]$.

运算不仅局限于在实数范围内，还可定义在有序实数对之间.运算实际上是一种对应，它使得有序实数对经过运算后成为一个实数.用对应的思想来看待运算，会使得运算变得丰富多彩.

作 业 题

A 组

1. 设 $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, m$ 是实数，定义运算“$\odot$”和“$\oplus$”，使：

$(mx_1, my_1, mz_1)=m(x_1, y_1, z_1)$；

$(x_1, y_1, z_1)\cdot(x_2, y_2, z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$；

$(x_1, y_1, z_1)\oplus(x_2, y_2, z_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$.

(1) 计算 $(1,0,-1)\odot(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$ 的值和 $(1,0,-1)\oplus(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$；

(2) 试证明：

$$[(mx_1, my_1, mz_1)\oplus(-mx_1, -my_2, -mz_2)]\odot[(nx_1, ny_1, nz_1)\oplus(nx_2, ny_2, nz_2)]$$
$$=mn(x_1^2+y_1^2+z_1^2-x_2^2-y_2^2-z_2^2).$$

2. 已知实数 x, y 满足 $-1\leqslant x\leqslant 1$，$-1\leqslant y\leqslant 1$，定义一种运算“$\otimes$”，使 $x\otimes y=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$.计算：

(1) $\frac{1}{2}\otimes\frac{\sqrt{3}}{2}$；　　(2) $\left[\frac{1}{2}\otimes\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\times\left[\frac{1}{2}\otimes\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$.

3. 定义一种运算“!”，试从下列几个算式中观察其运算规则：$2!=2\times1=2$；$3!=3\times2\times1=6$；$4!=4\times3\times2\times1=24$.试求出 $5!$ 与 $6!$ 的值，并写出 $n!$ 的表示式（其中 n 是正整数）.

B 组

4. 设 a, b, c 是正实数，且 $a\neq1$.若 $a^b=c$，则定义它的逆运算为“⨸”，使 $b=c⨸a$.例如：由 $5^2=25$，则可得 $2=25⨸5$；由 $125^{\frac{1}{3}}=5$，则可得 $\frac{1}{3}=5⨸125$.

(1) 计算：$100⨸10$ 和 $25⨸0.2$；

(2) 求证：$(2⨸10)+(50⨸10)=2$.

5. 设 a, b, c, d 是实数，定义一种运算“$|\quad|$”，使 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=ad-bc$.

(1) 试计算 $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$ 的值；

(2) 试证明：$\begin{vmatrix} ma & c \\ mb & d \end{vmatrix}=m\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$.

(3) 试探索运算“$|\quad|$”，你还能得到哪些性质？

1.3　数的估算

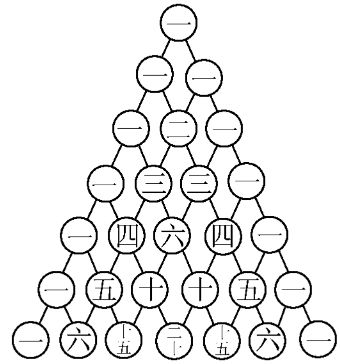


图 1－1

我们已学过多项式的乘法法则，试将下列各式展开成多项式的形式，并寻找展开式的规律：

$(a+b)^1=$ ______________________________；

$(a+b)^2=$ ______________________________；

$(a+b)^3=$ ______________________________；

$(a+b)^4=$ ______________________________；

$(a+b)^5=$ ______________________________；

$(a+b)^6=$ ______________________________.

当展开式的次数不是很大时，可用如图 1－1 中的数值确定展开式各项的系数.

想一想，当 a 较小时，不用计算器如何估算 $(1+a)^n$ 的近似值？

例 1　计算：0.998^6（精确到 0.001）.

分析　观察 0.998^6，可把它化为 $(1-0.002)^6$ 的形式，展开后进行估算.

解　$0.998^6=(1-0.002)^6$

$$=1+6\times(-0.002)+15\times(-0.002)^2+\cdots+(-0.002)^6$$

$$\approx1+6\times(-0.002)=1-0.012=0.988.$$

例 1 中，展开式的第三项为 $15\times(-0.002)^2=0.000\,06<0.001$. 第三项以后的绝对值就更小了，所以从第三项起可以忽略不计.

试一试，不用计算器求下列各数的近似值（精确到 0.001）：

(1) 1.002^4；　(2) 0.97^5；　(3) 2.998^4.

一般地，当 a 较小时，$(1+a)^n$ 的近似值可用 $(1+a)^n\approx1+na$ 来估算.

例 2　设 $a=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$，$b=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$，试比较 a 与 b 的大小.

解法一　$a=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=\dfrac{6-2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$，

$b=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\dfrac{2\sqrt{3}+2}{4}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

$\because$　$1<\sqrt{3}<2$，

$\therefore$　$\dfrac{1}{2}<\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}<1$，$1<\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}<\dfrac{3}{2}$，

$\therefore$　$a<b$.

解法二 $\because$ $a-b=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}(\sqrt{6}-\sqrt{2})-\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=1-\sqrt{3}<0$,

$\therefore$ $a<b$.

化去分母中的根号,又称为**分母有理化**.

①$\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ $(a>0,b>0)$型根式分母有理化法则:$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\sqrt{\dfrac{ab}{b^2}}=\dfrac{\sqrt{ab}}{b}$;

②$\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ $(a>0,b>0,a\neq b)$型根式分母有理化法则:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}.$$

即利用平方差公式进行分母有理化.

作业题

A 组

1. 计算:2.02^4 (精确到 0.01).

2. 计算:

(1) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; (2) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; (3) $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}$.

3. 写出三个夹在 100 与 101 之间的无理数:____________________.

4. 试用尺规作图在数轴上标出$\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$,$\sqrt{7}$的位置,并比较$\sqrt{2}+\sqrt{7}$与$\sqrt{3}+\sqrt{5}$的大小.

B 组

5. 计算:$\dfrac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$,并指出它夹在哪两个与它最接近的整数之间.

6. 已知 $y=\sqrt{1-8x}+\sqrt{8x-1}+\dfrac{1}{2}$,求代数式 $\sqrt{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+2}-\sqrt{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-2}$的值.

阅读材料

数的发展

数的概念是由人类生产、生活实践和科学研究的需要而逐渐形成和发展起来的.随着生产和科学的发展,数的概念也得到发展.

早在原始社会末期,由于计数的需要,形成了 1,2,3,…这种"正整数"的概念.任意两个正整数的和与积都是正整数(我们称正整数对加法、乘法这两种运算是"封闭的"),但两个正整数的差与商却未必是正整数.

正整数和零构成“自然数”.

为了表示具有相反意义的量，人们引进了“负数”. 公元3世纪，我国的刘徽已经对负数有了深刻的认识. 在《九章算术注》中，他认为“今两算得失相反，要令正负以名之.”他还认为“言负者未必负于少，言正者未必正于多.”这两句话都是关于正负数的绝对值而言的，即负数的绝对值未必小、正数的绝对值未必大.

自然数、负整数构成“整数”. 整数不但对加法、乘法这两种运算是“封闭的”，对减法也是封闭的，即任意两个整数的差仍然是整数.

人们在测量、分配中遇到“将某些量进行等分”的问题，为此又引进了分数，于是数的概念从“整数”扩大到了“有理数”. 有理数可以统一看成“无限循环小数”(整数可以看成小数部分为0的小数，把有限小数看成后面有无限个“0”循环). 有理数对加、减、乘、除四则运算(除法的除数不为0)都是“封闭的”.

后来人们发现，有些量与量之间的比值，例如，正方形对角线和边长的比，不能表示成两个整数之比，即不能用有理数表示，为此人们又引进了“无理数”. 无理数就是无限不循环小数，有理数和无理数的全体组成实数. 实数概念的产生经过相当长的时间，据说无理数的发现还伴随着一个悲剧性故事.

前面所讲述的数都是由实际应用产生的，而有一类称为“虚数”的数是由数学问题引入的，且经过了500余年漫长岁月才慢慢形成. 印度数学家婆什迦罗(Bhaskara Ⅱ，1114～约1185)是第一个遇到“虚数”的人，即方程 $x^2=-1$ 的解是什么？此后的几百年中，数学家们一直为 $x^2=-1$ 的根争论不休，没有统一的认识. 后来，数学家们规定用符号“i”表示“-1”的平方根，即 $\mathrm{i}^2=-1$，“i”成了虚数的单位. 将实数和虚数结合起来，写成 $a+b\mathrm{i}$ 的形式(a，b 均为实数)，这就是复数. 在很长一段时间里，人们在实际生活中找不到用虚数和复数表示的量，所以虚数总让人感到虚无缥缈. 挪威出生的测量员韦塞尔(Wessel，1745～1818)和瑞士人阿尔岗(Argand，1768～1822)分别给出了复数和复数的代数式运算的几何解释. 随着科学的发展，虚数现在在水力学、地图学和航空学上已经有了广泛的应用.

复数在数的发展过程中是一次飞跃，它将一元数系发展到了二元数系，即可用二元有序数对(a，b)表示复数. 复数的有关内容，我们将在高中学习.

1843年10月16日，英国数学家哈密尔顿(Hamilton，1805～1865)又提出了“四元数”的概念. 所谓四元数，就是一种形如 $q=a+x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 的数，它是由一个标量 a(实数)和一个向量 $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$(其中 x，y，z 为实数)组成的. 四元数在数论、群论、量子理论以及相对论等方面有广泛的应用.

第2章　式

2.1　常用乘法公式补充

1

我们已学习过多项式与多项式相乘的法则.根据法则,让我们来计算下面的算式:

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3$,

即$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.

一般地,我们有以下立方和公式:

$\boldsymbol{(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3}$.

即两数和乘以这两数的平方和与这两数的积的差,等于这两个数的立方和.

如果把$(a-b)(a^2+ab+b^2)$写成$[a+(-b)][a^2-a(-b)+(-b)^2]$,就可以由立方和公式得出立方差公式:

$\boldsymbol{(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3}$.

即两数差乘以这两数的平方和与这两数的积的和,等于这两个数的立方差.

例1　用立方和公式与立方差公式计算:

(1) $(7-x)(49+7x+x^2)$;

(2) $(3x+\frac{1}{2}y)(9x^2-\frac{3}{2}xy+\frac{1}{4}y^2)$;

(3) $(9x^{2m}-3x^{m+2}+x^4)(x^2+3x^m)$.

解　(1) $(7-x)(49+7x+x^2)=(7-x)(7^2+7x+x^2)=7^3-x^3=343-x^3$.

(2) $\left(3x+\frac{1}{2}y\right)\left(9x^2-\frac{3}{2}xy+\frac{1}{4}y^2\right)$

$=\left(3x+\frac{1}{2}y\right)\left[(3x)^2-(3x)\left(\frac{1}{2}y\right)+\left(\frac{1}{2}y\right)^2\right]$

$=(3x)^3+\left(\frac{1}{2}y\right)^3$

$=27x^3+\frac{1}{8}y^3$.

(3) $(9x^{2m}-3x^{m+2}+x^4)(x^2+3x^m)$

$=(3x^m+x^2)[(3x^m)^2-(3x^m)(x^2)+(x^2)^2]$

$=(3x^m)^3+(x^2)^3$

$=27x^{3m}+x^6$.

例 2　计算：

(1) $(1-a)(1+a)(a^2+a+1)(a^2-a+1)$；

(2) $(a+b)[(a-b)^2+ab]-(a-b)[(a+b)^2-ab]$.

解　(1) $(1-a)(1+a)(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

$=[(1-a)(1+a+a^2)][(1+a)(1-a+a^2)]$

$=(1-a^3)(1+a^3)$

$=1-(a^3)^2$

$=1-a^6$.

(2) $(a+b)[(a-b)^2+ab]-(a-b)[(a+b)^2-ab]$

$=(a+b)(a^2-2ab+b^2+ab)-(a-b)(a^2+2ab+b^2-ab)$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=(a^3+b^3)-(a^3-b^3)$

$=2b^3$.

想一想，对例2第(1)题，如果先分别计算$(1-a)(1+a)$，$(a^2+1+a)(a^2+1-a)$，那么可以怎样算？试一试，哪种方法更简便？

作业题

A组

1. 运用立方和公式与立方差公式计算：

(1) $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$；

(2) $(x^2+2)(4-2x^2+x^4)$；

(3) $(\frac{1}{4}a^2+4b^2+ab)(\frac{1}{2}a-2b)$；

(4) $(a^m-b^n)(a^{2m}+a^mb^n+b^{2n})$.

2. 填空：

(1) 设$(a+b)(a^2+kab+b^2)=p$，

则当 $k=$________时，$p=a^3+b^3$；当 $k=$________时，$p=(a+b)^3$；

(2) 已知$(2x-3y)(4x^2-kxy+9y^2)=8x^3-27y^2$，那么 $k=$________.

3. 计算：

(1) $(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)$；

(2) $(a+2b)^2(a^2-2ab+4b^2)^2$.

B组

4. 化简：$(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$；

5. 已知 $a+b=1$，求 a^3+b^3+3ab 的值.

C 组

6. 已知 $x+y=3$，$xy=2$. 求下列各式的值：

（1）x^2+y^2；（2）x^3+y^3；（3）x^4+y^4.

2

过去我们学习了两数和的完全平方公式：

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. 现在我们增加“数的个数”，来计算三个数的和的平方：

$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$=a^2+2ab+b^2+2ca+2bc+c^2$.

由此得到：

$\boldsymbol{(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}$.

这个结论在计算时可以直接使用.

另一方面，我们增大“次数”来计算两数和的立方：

$(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$

$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，

由此得到两数和的立方公式：

$\boldsymbol{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$.

想一想，这个公式右边各项中的系数和次数各有什么特点？

如果把 $(a-b)^3$ 写成 $[a+(-b)]^3$，就可以由两数和的立方公式写出两数差的立方公式：

$\boldsymbol{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$.

例 3 用两数和的立方公式与两数差的立方公式计算：

（1）$(2x+1)^3$；（2）$(-2+a)^3$.

解 （1）$(2x+1)^3$

$=(2x)^3+3\times(2x)^2\times1+3\times(2x)\times1^2+1^3$

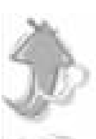
$=8x^3+12x^2+6x+1$.

（2）$(-2+a)^3$

$=(a-2)^3$

$=a^3-3a^2\times2+3a\times2^2-2^3$

$=a^3-6a^2+12a-8$.



例 4 已知 $a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=2$，求 $ab+bc+ca$ 的值.

解 由 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$，

得 $1^2=2+2(ab+bc+ca)$，$\quad\therefore\quad ab+bc+ca=-\dfrac{1}{2}$.

作业题

A组

1. 计算：

(1) $(x-2y+3)^2$；　(2) $(m-\frac{1}{2})^3$；　(3) $(-x-2y)^3$.

2. 化简：$(a-b)(a+b)^3-2ab(a^2-b^2)$.

B组

3. 已知 $3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2$，问"$a=b=c$"一定成立吗？为什么？
4. 化简：$(a-b+4)(a^2-2ab+b^2-4a+4b+16)$.
5. 已知 $a=2006x+2007$，$b=2006x+2008$，$c=2006x+2009$，求 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值.

2.2 因式分解方法的拓展

观察下面这些"荒谬"而又正确的式子：

$\frac{5^3+2^3}{5^3+3^3}=\frac{5+2}{5+3}=\frac{7}{8}$；

$\frac{25^3+16^3}{25^3+9^3}=\frac{25+16}{25+9}=\frac{41}{34}$；

……

你一定感到很奇怪，这些看似"荒谬"的式子怎么会正确呢？其实，这些似非而是的等式只不过是等式$\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}=\frac{a+b}{a+(a-b)}$的特例而已！

1

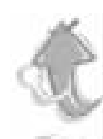
如何把 a^3+b^3 和 a^3-b^3 分解因式？通过上一节的学习，我们很快可以找到答案.

$$\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)};$$

$$\boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}.$$

运用这两个公式可以把立方和（或差）的多项式分解因式.

想一想，怎样把 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 和 $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ 分解因式？



例 1 把下列各式分解因式：

(1) $125+a^3$；　(2) $1-\frac{a^3b^3}{8}$；　(3) x^3-3x^2+3x-1.

解 (1) $125+a^3=5^3+a^3=(5+a)(25-5a+a^2)$.

(2) $1-\frac{a^3b^3}{8}=1^3-\left(\frac{ab}{2}\right)^3=\left(1-\frac{ab}{2}\right)\left[1^2+1\times\frac{ab}{2}+\left(\frac{ab}{2}\right)^2\right]=\left(1-\frac{ab}{2}\right)\left(1+\frac{ab}{2}+\frac{a^2b^2}{4}\right)$.