
电子图书
信息技术的结晶
人类文明的载体
网络的基本资源

中学数学通用教案设计精编之三

复数的模与辐角主值的复习深化教案设计

复数的模与辐角的主值，是复数的重要概念，对于理解复数的几何意义和进行运算都起着重要的作用。尽管学生有所认识，但是由于综合运用各科知识的能力较差，所以解题容易出错。本设计以一题多解的形式，探讨一下怎样深化复数的模与辐角主值的复习教学。

【题目】设复数 z1=cosθ+isinθ，(0≤θ＜π，θ≠π/2)、$z_2=z_1i+1$，z_1，z_2 分别对应复平面上的点 A、B，O 为坐标原点，∠AOB=α（0≤α＜π），求角α的大小。

一、应用三角公式化复数为三角式

解法一（分析：因为复数 z_1、z_2 分别对应复平面上的点 A，B 所以∠AOB 可以用 $\arg z_1$ 与 $\arg z_2$ 的差来表示。关键是把 z_2 化为三角式并且判断 $\arg z_1$ 与 $\arg z_2$ 的大小。）

$$\because z_1=\cos\theta+i\sin\theta,\ \left(0\le\theta<\pi,\ \theta\ne\frac{\pi}{2}\right) \qquad ①$$

$$\therefore z_2=z_1i+1=(\cos\theta+i\sin\theta)i+1$$

$$=1-\sin\theta+i\cos\theta=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right] \qquad ②$$

1°，$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$时，$\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)>0$，这时，②式是$z_2$的三角形式，$\arg z_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}$，并且$\arg z_2>\arg z_1$，

$$\therefore\alpha=\arg z_2-\arg z_1=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}-\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}。$$

2°，当$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$时，$\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}<\frac{3\pi}{4}$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)<0$

0，

这种用复数的辐角主值的差来确定夹角α的方法，思路清晰，但是将 z_2 化为三角形式是解答本题的前提；合理地分$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$与$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$两个区间，判断$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$的值的符号则是关键。因此，只有熟练地应用三角变换公式，记住复数三角式的特点，并且善于讨论参数的范围，才能正确作出解答。

二、应用复数除法法则

解法二（分析：若 $\arg z_2>\arg z_1$，则由复数除法的几何意义可知：

$\alpha=\arg\frac{z_2}{z_1}$。）

由解法一中的①式与②式知道：

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right]}{\cos\theta+i\sin\theta}$$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right] \quad ③$$

1°，当$0\leq\theta<\frac{\pi}{2}$时，$\frac{\pi}{4}\leq\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2},\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)>0$

所以③式是$\frac{z_2}{z_1}$的三角形式，且$0<\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\leq\frac{\pi}{4}$，

2°，当$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$时，$\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}<\frac{3\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)<0$，

$$\therefore\frac{z_2}{z_1}=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right] \quad ④$$

所以④式是$\frac{z_2}{z_1}$的三角形式，且$\frac{3\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}<\pi$，

$\therefore\alpha=\arg\frac{z_2}{z_1}=\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$

这种由复数的商的辐角主值来确定夹角α的方法，是建立在对于复数相除的几何意义有着深刻理解的基础上的。与解法一相比较，思路要复杂些，因为两个复数的辐角主值的差是通过两个复数的商的辐角主值来体现的。这样，对于③式来说，不仅要判断cos（$\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}$）的值的符号还要分析$\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$的范围，没有较强的分析能力与扎实的基础知识是容易弄错的。

另解：若从 z_1/z_2 入手，则由于

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right]}$$

$$=\frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

1°，当$0\leq\theta<\frac{\pi}{2}$时，同以前讨论⑤式是$\frac{z_1}{z_2}$的三角形式。

但是$-\frac{\pi}{4}\leq\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}<0$，可知$\arg z_1<\arg z_2$，根据复数相除的几

何意义，可得$\alpha=-\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$。

2°，当$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$时，同以前讨论，$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$

$$\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)\right] \qquad ⑥$$

虽然⑥式是$\frac{z_1}{z_2}$的三角形式，但是$\pi<\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}$，超出了$0\le\alpha<\pi$的范围，于是可以把⑥式化为：

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

$\because -\pi<\frac{\theta}{2}-\frac{5\pi}{4}<-\frac{3\pi}{4}$，同上分析有

$$\alpha=-\left(\frac{\theta}{2}-\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$$

由以上的两种求商的不同解法可知，只要对复数相除的几何意义以及辐角主值范围有透彻的理解，都能够求出α的大小。同时，通过逆向思维，加深了对复数主值范围的理解，使感性知识上升为理性知识。

三、应用向量加法法则

解法三：（分析：$\because|z_1|=1$，$\arg z_1=\theta$，$0\le\theta<\pi$，$\theta\ne\frac{\pi}{2}$，$|z_1i|=|z_1|=1$，$\therefore z_2=z_1i+1$ 可以运用向量加法的平行四边形法则作出菱形，易知 z_2 对应的向量 OB 相应于菱形的对角线 OB，又因为 arg（z1i）=θ+π/2，所以 $\arg z_2$就可以求出来了。）

∵z1=cosθ+isinθ，0＜θ＜π，且θ≠π/2。

$z_2=z_1i+1$，

$\therefore|z_1|=1$，$|z_1i|=1$。

1°，当$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$时，

$\because|z_1|=|z_1i|1$，$\therefore z_1$与 z_1i 分别对应的点 A 与 C 都在单位圆上，并且

$\angle xOA=\theta$，$\angle AOC=\frac{\pi}{2}$，$\angle xOC=\theta+\frac{\pi}{2}$，$\therefore\frac{\pi}{2}\le\angle xOC<\pi$。

这种应用向量的有向性来确定夹角α的方法，要求学生对复数的几何意义理解清楚，对向量加法法则运用熟悉，作图准确，并且对θ的分区合理。这样，既加深了对数形结合的认识，又提高了解题的技巧。

四、应用余弦定理

解法四（分析：因为∠AOB 是△AOB 的内角，所以，只要求出各边的长度，即各相应向量所对应的复数的模，则能应用余弦定理求解。）

∵$z_1=\cos\theta+i\sin\theta$，（$0\le\theta<\pi$，$\theta\ne\pi/2$），

∴$z_2=z_1i+1=1-\sin\theta+i\cos\theta$。

$z_2-z_1=1-\sin\theta-\cos\theta+i(\cos\theta-\sin\theta)$。

∴$|z_1|=1$。

1°，当$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$时，$\cos\theta>0$，α为锐，则⑦式为

此时$0<\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\le\frac{\pi}{4}$，∴$\alpha=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$。

2°，当$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$时，$\cos\theta<0$，则$\cos\alpha<0$，α为钝角，

所以$\alpha=\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$。

这种应用余弦定理来确定夹角α的方法，学生容易接受，但是在求|AB|即$|z_2-z_1|$时，容易算错。此外，有的学生演算到⑦式再也不懂得如何做下去了。说明他们对于角θ，α的范围与关系认识不清，三角函数式的变换能力差，需要进一步落实双基与加强知识迁移能力的培养。

五、应用两条直线的夹角公式

解法五：（分析：因 OA，OB 的方向可以用直线 OA，OB 的斜率表示，所以∠AOB 就可以用两条直线的夹角公式求解。）

∵$z_1=\cos\theta+i\sin\theta$，（$0\le\theta<\pi$，$\theta\ne\pi/2$），与 $z_2=z_1i+1=1-\sin\theta+i\cos\theta$ 分别对应复平面上的点 A 与 B。

$$\therefore k_{OA}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\operatorname{tg}\theta;\ k_{OB}=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

$$\therefore \operatorname{tg}\alpha=\frac{k_{OB}-k_{OA}}{1+k_{OB}\cdot k_{OA}}=\frac{\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}-\operatorname{tg}\theta}{1+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\cdot\operatorname{tg}\theta}$$

$$=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

$$=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$

1°，当$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$时，$0<\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\le\frac{\pi}{4}$，∴$\alpha=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$。

当$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$时，$-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}<0$，由$0\le\alpha<\pi$，$\therefore\alpha=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}+\pi=\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\left(\frac{3\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}<\pi\right)$.

这种解法，以平面解析几何中两条直线的夹角公式为基础，以三角变换为工具，脉络清楚，把复数、三角、解析几何的知识有机地结合起来，得到很好的效果。

从以上的五个方面，可以看出，对于复数的模与辐角的主值范围的复习教学，单凭定义上的理解是不够的。若将其与三角、解析几何等有关知识联系起来，综合运用其内涵与外延，那么，学生对于复数的模与辐角主值概念的理解与应用将达到了一个新的境界。这样对于拓宽学生的解题思路，提高其分析问题与解决问题的能力都将起到积极的作用。

复数的模与辐角内容分析及教案设计

一、内容分析

复数的模与辐角是复数三角形式表示的两个基本元素，它分别与复数代数形式表示的实虚部、向量形式表示的乘除运算以及复数本身表示的互为共轭复数的积等都是有机联系着的。要求学生能够“掌握复数的代数、几何、三角表示及其转换。”

复数没有大小，但复数的模与辐角主值有大小。所以复数的模与辐角主值常与函数的最值相结合，在求最值时，除了代数、三角的常规方法外，还需注意几何法及不等式$||z_1|-|z_2||\le|z_1\pm z_2|\le|z_1|+|z_2|$的运用。

复数与复平面上的点以及原点为始点的向量之间具有一一对应的关系，因此复数的向量表示及其几何意义与解析几何中点的坐标、距离等问题相互联系，有些复数模的方程的几何意义表示曲线，求满足某种条件的复数，实际上是求曲线交点所对应的复数，往往通过数形结合加以解决。

总之，复数内容具有综合性；解决复数问题的方法具有选择性，这两者往往与复数的模及辐角有机相联，既体现了综合运用基本知识及其基本技能，又有效地发展逻辑思维及综合分析问题的能力。

二、教学方案

课题：复数的模与辐角。

课型：复习课。

教学目的：使学生掌握复数的模与辐角及其在代数、几何、三角形式相互转换方面的运用。

教学方法：程序教学法。

（一）引入

1.师：前面我们复习了复数的三角形式，大家知道，模与辐角是复数三角形式表示的两个基本元素，那么请同学们考虑：它们与复数代数形式表示的实、虚部以及向量表示的乘除运算是否有联系，有什么联系？

生：有 $z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 中 $a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$，$r=a^2+b^2$，乘除运算可以表示成复平面上向量的旋转与伸缩。

师：对，另外模与复数本身表示的互为共轭复数的积等都有一定的联系：$zz=|z|^2=|z|^2$，即“模方公式”。

2.师：下面请做练习：

(1) 若虚数 $z=a+bi\ (a,b\in R,b\neq0)$，则$|z^2|$、$|z|^2$、$z^2$的关系是（　　）。

A.互不相等	B.$\|z^2\|\neq\|z\|^2=z^2$
C.$\|z^2\|=\|z\|^2\neq z^2$	D.$\|z^2\|=\|z\|^2=z^2$

(2) 设复数 z 的辐角主值是 0，则 z2 的辐角主值是（　　）。

A.2θ	B.$2\theta-2\pi$
C.$2\pi-\theta$	D.2θ或$2\theta-2\pi$

检查学生答案后提问：那么“复数的模”与“实数的绝对值”以及“辐角”与“辐角主值”各有什么关系呢？

生：(教师帮助概括) 对于 $z=a+bi\ (a,b\in R)$ 来说，当 $b=0$ 时，则 $z=a+bi$ 是一个实数 a，它的模就是$|a|$，这与实数意义上的绝对值一致，与 $b\neq0$ 时的几何意义亦相同，都表示其对应的点到坐标原点的距离，因此，复数的模是实数绝对值概念的扩充，但实数中绝对值的性质对于复数模来讲未必都成

立，例如|z|=±z、|z|2=z2，在复数范围内不成立。

argz=argz+2kπ（k∈R），其中 argz∈[0，2π），被某一非零复数唯一确定，但并非一一对应。

下面来进一步探求解决有关复数模与辐角问题的基本思路与方法。

（二）授课

（三）练习（课内或课外）

已知复数 z 满足 zz-3iz=1+3i，求 z 的模和辐角的主值。

解：z=-1 或 z=-1+3i

当 z=-1 时，|z|=1，argz=π

当 z=-1+3i 时，|z|=10，argz=π-arctg3。

证明：本题除了可设 z=x+yi（x，y∈R）代入求解还可以将关系 f（z）=0，两边取共轭得到一个与之对应的关系式，f（z）=0，即“共轭配对”，然后通过两式的合成运算使问题得解。

（四）小结

回顾本课题的解题思路和方法，提倡“总结（解题）规律，形成（解题）模式，产生知识，解题就方便。”

（杨正勋王慧）

一元 n 次方程根与系数的关系教案设计

【教学目的】通过教学让学生明确一元 n 次方程的根与系数的关系是一元二次方程的根与系数关系的推广，通过证明让学生理解韦达定理的实质，并会正确应用定理来解题。

【教学重点和难点】 重点是根与系数的关系，难点是根与系数关系的证明。

【教学过程】

一、复习提问

1.定理 1 及定理 2 的内容及作用。

定理 1　一元 n 次方程 f（x）=0 有一个根 x=b 的充要条件是多项式 f（x）有一个一次因式（x-b）。

定理 2　复系数一元 n 次方程 f（x）=0 在复数集中有且仅有 n 个根。

定理 1 指出寻求方程根的方法,而定理 2 只解决根的存在性及根的个数。

2.一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（a≠0）的根与系数之间有什么关系？如何证明？

设二根为 x_1 和 x_2，则根与系数间关系为：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$ 称韦达定理。`

证明：若 x_1 和 x_2 是 $ax^2+bx+c=0$（a≠0）的两个根，则根据定理 1 得到 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$。∵a≠0

$\therefore x_2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - x(x_1 + x_2)x + x_1x_2$，对比系数得到：$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$，同理对一元n次方程的根与系数之间仍存在这个关系。

二、引入新课

三、小结

韦达定理中诸关系式是 n 个 n 元方程，仍无法解出各根，故与解一元 n 次方程是等价问题，只有给出了各根之间满足的某些条件时，应用根与系数的关系，才能求出方程的解集，在应用时注意符号的规律。这个定理的逆命题也成立，即对于任何一元 n 次方程 f（x）$=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 如果有 n 个数 x_1，x_2，…，x_n 满足诸关系式，那么 x_1，x_2，…，x_n 一定是方程 f（x）=0 的根。

四、作业

（王秋芳）

韦达定理的应用教案设计

【教学目的】让学生进一步理解韦达定理的实质是反映出由 n 个根与系数构成了 n 个 n 元方程组，与解一元 n 次方程是完全等价的问题。因而只利用根与系数之关系并不能解决一元 n 次方程求根的问题。只有当给出了各根之间满足的某些条件时才能应用韦选定理求方程的解集。

【教学重点和难点】 重点是韦达定理的应用，难点是灵活应用韦达定理解综合性题。

【教学过程】

一、复习提问

1.韦达定理及其作用。

2.已知方程 $x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0$，的根为α、β、γ，则由韦达定理，得

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-p & (1) \\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=p_2 & (2) \\ \alpha\beta\gamma=-p_3 & (3) \end{cases}$$

下面解含α、β、γ的方程组，结果说明什么问题？

解：（1）$\times\alpha^2$ 得 $\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma=-p_1\alpha^2$ （4）

（2）×（-α）得 $-\alpha^2\beta-\alpha\beta\gamma-\alpha^2\gamma=-\alpha p_2$ （5）

（3）+（4）+（5）得 $\alpha^3+p_1\alpha^2+p_2\alpha+p_3=0$ 这个结果与原方程完全相同，说明如果我们没有办法解出原方程时，同样从这三个根与系数的关系仍不能解出它的根来，只有当给出各根之间具有某种特殊关系时，应用根与系数之关系才能求出方程的根。

二、引入新课——韦达定理的应用

三、小结

1.已知方程的根与系数具有某种关系时应用韦达定理转化为解方程组的问题求解，当未知数的个数少于方程组中方程个数时，要适当选择方程组求解，之后必须通过检验该解满足余下的方程才是原方程的解。

2.应用韦达定理确定方程中的参数。

四、作业（略）

（王秋芳）

实系数方程虚根成对定理教案设计

【教学目的】掌握实系数方程虚根成对定理并会运用定理求实系数方程在复数集 C 中的解集。

【教学重点和难点】 重点是定理的正确应用：突出强调定理中的条件是实系数方程；难点是定理的证明过程。

【教学过程】

一、复习提问

二、引入新课

三、小结

注意定理中的条件" 实系数方程 " 必不可少，若为复系数方程则没有" 虚根成对共轭出现 " 的结论，应用此定理解方程时要特别注意。

四、作业

1.复习实系数方程虚根成对定理。

2.求证实系数一元 n 次方程在 n 为奇数时有奇数个实根；在 n 为偶数时有偶数个实根，或者没有实根。[提示：应用实系数一元 n 次方程有且仅有 n 个复数根，而且虚根是成对出现，说明虚根只能是偶数个（包括 0 个），所以当 n 为奇数时，由于奇数与偶数之差为奇数，从而有奇数个实根。当 n 为偶数时，由于偶数与偶数之差仍为偶数，从而有偶数个实根（包括没有实数根）]

3.根据已知条件求下列方程在复数集 C 中解集。

（王秋芳）

实系数方程虚根成对定理的应用教案设计

【教学目的】应用实系数方程虚根成对定理求实系数方程在复数集 C 中的解集并会求次数最低的实系数方程。

【教学重点和难点】 重点是利用实系数方程虚根成对定理解实系数方程，难点是应用虚根成对定理进行论证。

【教学过程】

一、复习提问

1.叙述实系数方程虚根成对定理以及它的作用。

2.求证实系数一元 n 次方程在 n 为奇数时有奇数个实数根；在 n 为偶数时有偶数个实根，或者没有实根（即前节课后作业题）。

证明：因为实系数一元 n 次方程有且只有 n 个复数根，而且虚根又是成对出现的，说明虚根只能是偶数个（包括 0 个）所以当 n 为奇数时由于奇数与偶数之差为奇数，从而有奇数个实根，当 n 为偶数时由于偶数与偶数之差仍为偶数，从而有偶数个实根（包括没有实数根）。

二、引入新课——习题课

三、小结

（1）只有对实系数方程才能应用虚根成对定理。

（2）已知实系数方程在复数集 C 中有虚根时，可以应用虚根成对定理求次数最低的实系数方程。

(3)灵活应用根与系数的关系及实系数方程虚根成对定理求方和在复数集 C 中的解集。

四、作业

1.求次数最低的实系数方程 f（x）=0，已知它在复数集 C 中的解集含有下列数：

（1）3+2i（答：$x^2-6x+13=0$）

（2）-2，1-i（答：x3-2x+4=0）

（3）2+i，-1+i（答：x4-2x3-x2+2x+10=0）

（4）$\sqrt{2},\sqrt{2}I$（答：$x^3-\sqrt{2}x^2+2x-2\sqrt{2}=0$）

（王秋芳）

加法原理和乘法原理教案设计

【教学目的】

1.使学生理解和掌握加法原理和乘法原理并能准确、熟练地运用两个基本原理。

2.加强对学生思维条理性的训练，培养学生分析问题、解决问题的能力。

【教学重点和难点】重点是两个基本原理的应用，难点是对两个基本原理的准确理解。

【教学过程】

一、讲授新课

加法原理和乘法原理是有关排列、组合问题所遵循的两条基本原理，深入理解和准确运用这两个原理是学好排列、组合这一单元的重要一环。

请同学们考虑下面两个问题：

问题 1　从甲地到乙地，旱路有 3 条，水路有 2 条，间从甲地到乙地共有多少种不同的走法？

从图中很容易找到答案：从甲地到乙地共有 5 种不同的走法。

问题 2　由 A 村到 B 村的路有 3 条，由 B 村到 C 村的路有 2 条，问从 A 村经过 B 村到达 C 村共有多少种不同的走法？

从图中不难看出此题的答案是：共有 6 种不同的走法。

我们从上面两个问题中可以抽象出一般性的规律，得出以下的结论：

（一）完成一件工作的两种不同的方式。

问题 1 和问题 2 的共同之处在于：它们都是在研究做一件事（或工作）完成它共有多少种不同的方法？这两个问题的不同点是完成工作的方式不同。

问题 1 中的每条旱路或水路都可以从甲地直接到达乙地，其中旱路和水路只不过是完成从甲地到乙地这件工作的两类不同的办法。

问题 2 中的从 A 村到 B 村的 3 条路和从 B 村到 C 村的 2 条路的任意一条路都不能把从 A 村经过 B 村到达 C 村这件工作做完，只能完成这件工作的一部分。问题 2 中的工作是分两个步骤完成的：第一步从 A 村到达 B 村，第二步从 B 村到达 C 村。

我们不难总结出：完成一件工作有以下两种不同的方式：

第一种方式：用不同类的办法去完成一件工作，每类办法中的任意一种方法都可以从头至尾把这件工作做完。

第二种方式：分成几个步骤去完成一件工作，每个步骤中的任意一种方法只能完成这件工作的一部分，这几个步骤都完成了，这件工作才能做完。

（二）加法原理和乘法原理。

下面我们来研究：完成一件工作的不同方法的总数怎样计算：

问题 1 的答案是共有 5 种不同的走法，已知旱路 3 条，水路 2 条，显然 5=3+2。

问题 2 的答案是共有 6 种不同的走法，已知从 A 村到 B 村 3 条路，从 B 村到 C 村 2 条路，显然 6=3×2。

总结一般规律如下：

加法原理　做一件事，完成它有 n 类办法，其中第一类办法中有 m_1 种方法，第二类中有 m_2 种方法……，第 n 类办法中有 m_n 种方法，那么完成这件事

共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法。

如问题 1 从甲地到乙地的走法可以分为两类：

第一类办法是走旱路有 3 种不同的走法。

第二类办法是走水路有 2 种不同的走法。

由加法原理共有 3+2=5 种不同的走法。

乘法原理　做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，第一个步骤有 m_1 种不同的方法，第二个步骤有 m_2 种不同的方法……，第 n 个步骤有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m_1\cdot m_2\cdots\cdots m_n$ 种不同的方法。

如问题 2 从 A 村经过 B 村到达 C 村可分为两个步骤完成：

第一步 A 村→B 村，有 3 种不同的走法。

第二步 B 村→C 村，有 2 种不同的走法。

由乘法原理，共有 3×2=6 种不同的走法。

例 1　从甲地到乙地可以乘火车，也可以乘汽车或轮船。一天中火车有 4 班，汽车有 2 班，轮船有 3 班，那么一天中，乘坐这些交通工具从甲地到乙地共有多少种不同的走法？

解：完成由甲地到乙地这件事有三类办法：

第一类办法坐火车，一天中有 4 种不同走法。

第二类办法坐汽车，一天中有 2 种不同走法。

第三类办法坐轮船，一天中有 3 种不同走法。

由加法原理得：4+2+3=9

答：有 9 种不同的走法。

例 2 由数字 1、2、3、4、5 可以组成多少个允许有重复数字的三位数？无重复数字的三位数？

解：（1）组成允许有重复数字的三位数这件事可分三个步骤完成：

第一步确定百位上的数字：有 5 种不同方法。

第二步确定十位上的数字：有 5 种不同方法。

第三步确定个位数字：有 5 种不同方法。

由乘法原理：5×5×5=125。

答：可组成允许有重复数字的三位数 125 个。

此题第（2）问由同学们自己完成，提醒大家注意：允许有重复数字和无重复数字这两个条件的区别。第（2）问答案是 60 个。

（三）运用两个基本原理时要注意以下几点：

1.抓住两个基本原理的区别不要用混，不同类的方法（其中每一个方法都能把事情从头至尾做完）数之间做加法，不同步的方法（其中每一个方法都只能完成这件事的一部分）数之间做乘法。

2.在研究完成一件工作的不同方法数时，要遵循“不重不漏”的原则。

如：从若干件产品中抽出几件产品来检验，把抽出的产品中至多有 2 件次品的抽法分为两类：第一类抽出的产品中有 2 件次品，第二类抽出的产品中有一件次品，这样的分类显然漏掉了抽出的产品中无次品的情况。

又如：把能被 2、被 3 或被 6 整除的数分为三类：第一类能被 2 整除的数，第二类能被 3 整除的数，第三类能被 6 整除的数，其中第一类、第二类都和第三类有重复，这样分类是不行的。

3.在运用乘法原理时，要注意每个步骤都做完这件事也必须完成，而且

前面一个步骤中的每一种方法，在下个步骤中都得有 m 种不同的方法。

二、巩固练习

1.书架上层放有 6 本不同的数学书，下层放有 5 本不同的语文书：

（1）从中任取一本书，有多少种不同的取法？

（2）从中任取数学、语文书各一本，有多少种不同的取法？（答案：(1) 11 种，（2）30 种。）

2.有三个袋子，其中一个袋子装有红色小球 20 个，每个球上标有 1 至 20 中的一个号码，一个袋子装有白色小球 15 个，每个小球上标有 1 至 15 中的一个号码。第三个袋子装有 8 个黄色小球，每个球上标有 1 至 8 中的一个号码。

（1）从袋子里任取一个小球，有多少种不同的取法？（2）从袋子里任取红、白、黄色小球各一个，有多少种不同的取法？（答案：（1）43 种，（2）2400 种）

三、布置作业

1.复习本节内容：读书和看笔记。

2.做教科书 2.1 基本原理后的练习 1 至 7 题。（答案：1.有 9 种选法；2.有 7 种选法；3.列出 200 个式子；4.共有 60 项；5.有 14 种走法；6.（1）9 种，（2）20 种；7.（1）有 6 种，（2）有 8 种）

3.预习 2.2 排列（要求看书）

（邵光砚）

排列数公式教案设计（一）

【教学目的】

1.使学生在正确理解排列概念的基础上能从乘法原理推导出排列数公式，能熟练地运用符号 P_{mn}，并能初步运用排列数公式解题。

2.培养学生分析问题、解决问题的能力。

【教学重点】排列数公式的初步运用。

【教学过程】

一、复习提问

从张、王、李、赵四位同学中选出 3 位同学分别担任团支书、组委和宣委，问有多少种不同的选法？并把所有的可能性不重漏地写出来（按支书、组委、宣委顺序写）

解：分三个步骤完成

第一步选团支书：有 4 种选法。

第二步选组委：有 3 种选法。

第三步选宣委：有 2 种选法。

4×3×2=24

答：有 24 种不同的选法。

（所有可能的选举结果略）

二、讲解新课

在上面问题的答案中，张王赵是一个排列，所有不同的排列总数是 24，我们把 24 这个数叫做从 4 个不同元素中任取 3 个元素的排列数，记做 P_{34} 即 $P_{34}=24$。

本节课，我们给出排列数的一般的定义，并推导出无重复元素的排列数公式。

（一）排列数公式

1.排列数定义：

从 n 个不同元素中任取 m（m≤n）个元素的所有排列的个数叫做从 n 个不同元素中任取 m 个元素的排列数，记做 P^m_n。

“排列”的第一个字母

m，n 所满足的条件是：①m∈N，n∈N；②m≤n。

如：对于 P^5_n 必有①n∈N；②n≥5。

2.无重复元素的排列数公式的推导。

在解决提问中的不同选法的计算时，我们所用的方法叫做占位法，这是解决排列问题的最基本的方法，但求解过程较繁，下面我们来推导 P_{mn} 的计算公式，以使今后的解题过程简化。

一般地，从 n 个不同元素中任取 m 个不同元素的排列数可用占位法计算如下：

解：分 m 个步骤完成：

第一步确定第一个位置上的元素：有 n 种方法。

第二步确定第二个位置上的元素：有（n-1）种方法。

第三步确定第三个位置上的元素：有（n-2）种方法。

……第 m 步确定第 m 个位置上的元素：有[n-（m-1）]=（n-m+1）种方法。