前　言

QIAN YAN

“难点”对正在紧张备考的广大师生来讲，是使用频率最高的词。什么是“难点”？教育在改革，高考在变化，高考升学率在不断攀升，“难点”所代表的内容及意义都已发生了重大的变化。依据我国教育和高考改革的方向，根据教育部考试中心制定的2003年《考试说明》，在对近三年高考的研究中，我们对新高考中的难点进行了明确而具体的界定。

所谓“难点”，是指《考试说明》中所要求的不易掌握、不易理解、不易运用的教材中的知识点及考试中不易理解、不易解决的具体问题，它具体包括：

知识考查中不易对待的考点　即高考中高、中档题的知识待考点，一般来说，高考题分高、中、低三个档次，本书所关注的是高、中档题的命题点，这些点是从近3年高考中筛选出来的稳定考点，其难度系数小，理论性强，与生活实际联系少，在2003年高考的再现率高。

学科认知上的思维障碍点　绝大部分学生甚至一般教师在理解上有困难的问题，如以历史学科为例，人们多知道我国古代科技的辉煌，而很少认识其不足，对英国的光荣革命多知道其假光荣，不知道其真光荣的一面，等等。

“学以致用”中与现实生活的连接点　新教学大纲不再单纯强调以学科为中心，不再把学科的完整性、严密性作为第一标准，而是强调与现实生活联系，强调实际应用，强调与学生经验的联系，实践环节大大增加，注重创新能力的测试和评估。从这一思维角度讲，本书所定位的难点，不仅是学科知识的难点，还是学科知识与现实生活的连接点。这往往是一种思维角度，学生很难达到这一思维层次。

学科知识线索交叉点　这是从知识体系构成这个角度谈的，纵可看成线，横可看成面，不是一个孤立知识的死结（否则也没有探讨的价值）。当然，在本书中它和重点重迭，则就成为广大考生的难点也就更有探讨的意义了。

学科知识能力生长点　它代表学科知识研究和发展方向，也往往是高考在命题

中出新的地方，由于大多数考生对以前的东西比较熟悉，对新东西有些措手不及，故会显出难来。但这些东西不是无目的的，它一般来说，就是我们这儿所谈的学科知识能力生长点。

显而易见，我们这里所说的“难点”首先是2003年高考重点之中的重点，其次是热点之中的重点。

根据对“难点”严密而科学的界定，每科总结出了40个左右具体而突出，同时又简短明了的“难点”，然后对每一个“难点”运用多种方法进行具体的解决 这里所说的方法既包括一般的解题方法，也包括如何发现和解决新的难点的方法。

为了让广大考生更高效地进行最后阶段的复习，为了适应我国素质备考的发展方向，丛书在本次修订中引进了案例探究式复习法。即从全新情境的“难点磁场”入手，引导学生认识“难点”，检测对该“难点”的掌握程度；然后通过对体现该“难点”重点内容的案例(题例)的探究进行思维发散，全面检索该“难点”所涉及的知识，引出方法，并在“锦囊妙记”栏目中引导学生对知识和方法进行简洁明了的归纳和总结，最后通过“歼灭难点训练”对前面的学习内容进行巩固。此种复习方法强调了学生在学习中的主体地位，成功地实现了自主学习，对培养学生的创新能力和应用能力、开发学生的潜力、彻底实现素质教育有着划时代的积极意义。

根据所选题目难度系数的不同，我们把考题由易到难分为“★”(一星)、“★★”(二星)、“★★★”(三星)、“★★★★”(四星)和“★★★★★”(五星)，本书所选用的题绝大部分为“四星”或“五星”题，偶尔也选用典型的“三星”题，每个题的前面都用星号作了明确的标注，便于学生在做题时合理分配时间。这里的“难”不是“偏”，也不是“繁”，而是高考中重点中的“难点”、热点中的“难点”，所选用的“难”题都对2003年高考具有极强的预测性。

希望本书伴你在高考备考中百尺竿头，更进一步，并衷心祝愿所有读者在今年的高考中心随所愿，考上理想的大学！

编　者

2003年1月

目录 MU LU

目录

MU LU

一、基础与工具

难点 1　集合思想及应用

集合是高中数学的基本知识,为历年必考内容之一,主要考查对集合基本概念的认识和理解,以及作为工具,考查集合语言和集合思想的运用. 本节主要是帮助考生运用集合的观点,不断加深对集合概念、集合语言、集合思想的理解与应用.

〖难点磁场〗

(★★★★★)已知集合 $A=\{(x,y)|x^2+mx-y+2=0\}$,$B=\{(x,y)|x-y+1=0$,且 $0\leqslant x\leqslant 2\}$,如果 $A\cap B\neq\varnothing$,求实数 m 的取值范围.

〖案例探究〗

[例1]设 $A=\{(x,y)|y^2-x-1=0\}$,$B=\{(x,y)|4x^2+2x-2y+5=0\}$,$C=\{(x,y)|y=kx+b\}$,是否存在 k、$b\in\mathbf{N}$,使得 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$,证明此结论.

命题意图:本题主要考查考生对集合及其符号的分析转化能力,即能从集合符号上分辨出所考查的知识点,进而解决问题. 属★★★★★级题目.

知识依托:解决此题的闪光点是将条件 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$ 转化为 $A\cap C=\varnothing$ 且 $B\cap C=\varnothing$,这样难度就降低了.

错解分析:此题难点在于考生对符号的不理解,对题目所给出的条件不能认清其实质内涵,因而可能感觉无从下手.

技巧与方法:由集合 A 与集合 B 中的方程联立构成方程组,用判别式对根的情况进行限制,可得到 b、k 的范围,又因 b、$k\in\mathbf{N}$,进而可得值.

解:$\because (A\cup B)\cap C=\varnothing$,$\therefore A\cap C=\varnothing$ 且 $B\cap C=\varnothing$

$\because \begin{cases} y^2=x+1 \\ y=kx+b \end{cases}$

$\therefore k^2x^2+(2bk-1)x+b^2-1=0$

$\because A\cap C=\varnothing$

$\therefore \Delta_1=(2bk-1)^2-4k^2(b^2-1)<0$

$\therefore 4k^2-4bk+1<0$,此不等式有解,其充要条件是 $16b^2-16>0$,即 $b^2>1$　①

$\because \begin{cases} 4x^2+2x-2y+5=0 \\ y=kx+b \end{cases}$

$\therefore 4x^2+(2-2k)x+(5+2b)=0$

$\because B\cap C=\varnothing$,$\therefore \Delta_2=(1-k)^2-4(5-2b)<0$

$\therefore k^2-2k+8b-19<0$,从而 $8b<20$,即 $b<2.5$　②

由①②及 $b\in\mathbf{N}$,得 $b=2$ 代入由 $\Delta_1<0$ 和 $\Delta_2<0$ 组成的不等式组,得

$\begin{cases} 4k^2-8k+1<0, \\ k^2-2k-3<0 \end{cases}$

$\therefore k=1$,故存在自然数 $k=1$,$b=2$,使得 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$.

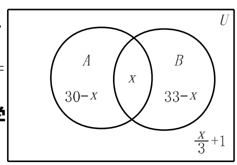
[例2]向 50 名学生调查对 A、B 两事件的态度,有如下结果:赞成 A 的人数是全体的五分之三,其余的不赞成,赞成 B 的比赞成 A 的多 3 人,其余的不赞成;另外,对 A、B 都不赞成的学生数比对 A、B 都赞成的学生数的三分之一多 1 人.问对 A、B 都赞成的学生和都不赞成的学生各有多少人?

命题意图:在集合问题中,有一些常用的方法如数轴法取交并集,韦恩图法等,需要考生切实掌握.本题主要强化学生的这种能力.属★★★★级题目.

知识依托:解答本题的闪光点是考生能由题目中的条件,想到用韦恩图直观地表示出来.

错解分析:本题难点在于所给的数量关系比较错综复杂,一时理不清头绪,不好找线索.

技巧与方法:画出韦恩图,形象地表示出各数量关系间的联系.



解:赞成 A 的人数为 $50\times\frac{3}{5}=30$,赞成 B 的人数为 $30+3=33$,如右图,记 50 名学生组成的集合为 U,赞成事件 A 的学生全体为集合 A;赞成事件 B 的学生全体为集合 B.

设对事件 A、B 都赞成的学生人数为 x,则对 A、B 都不赞成的学生人数为 $\frac{x}{3}+1$,赞成 A 而不赞成 B 的人数为 $30-x$,赞成 B 而不赞成 A 的人数为 $33-x$.

依题意 $(30-x)+(33-x)+x+(\frac{x}{3}+1)=50$,解得 $x=21$.

所以对 A、B 都赞成的同学有 21 人,都不赞成的有 8 人.

〖锦囊妙计〗

1. 解答集合问题,首先要正确理解集合有关概念,特别是集合中元素的三要素;对于用描述法给出的集合 $\{x|x\in P\}$,要紧紧抓住竖线前面的代表元素 x 以及它所具有的性质 P;要重视发挥图示法的作用,通过数形结合直观地解决问题.

2. 注意空集 $\varnothing$ 的特殊性,在解题中,若未能指明集合非空时,要考虑到空集的可能性,如 $A\subseteq B$,则有 $A=\varnothing$ 或 $A\neq\varnothing$ 两种可能,此时应分类讨论.

〖歼灭难点训练〗

一、选择题

1. (★★★★)**集合** $M=\{x|x=\frac{kx}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{x|x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$,**则** ……………………………………………… (　　)

A. $M=N$　　B. $M\supsetneqq N$　　C. $M\subsetneqq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

2. (★★★★)**已知集合** $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 7\}$,$B=\{x|m+1<x<2m-1\}$ **且** $B\neq\varnothing$,**若** $A\cup B=A$,**则** ……………………………………………… (　　)

A. $-3\leqslant m\leqslant 4$　　B. $-3<m<4$　　C. $2<m<4$　　D. $2<m\leqslant 4$

二、填空题

3. (★★★★)**已知集合** $A=\{x\in\mathbf{R}|ax^2-3x+2=0,a\in\mathbf{R}\}$,**若** A **中元素至多有** 1 **个,则** a **的取值范围是**________.

4. (★★★★)x、$y\in\mathbf{R}$,$A=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$,$B=\{(x,y)|\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1,a>0,b>0\}$,**当** $A\cap B$ **只有一个元素时**,a,b **的关系式是**________.

三、解答题

5. (★★★★★)**集合** $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$,$B=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}$,$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$,**求当** a **取什么实数时**,$A\cap B\supsetneqq\varnothing$ **和** $A\cap C=\varnothing$ **同时成立.**

6.(★★★★★)已知$\{a_n\}$是等差数列,d 为公差且不为 0,a_1 和 d 均为实数,它的前 n 项和记作 S_n,设集合 $A=\{(a_n,\frac{S_n}{n})|n\in \mathbf{N}^*\}$,$B=\{(x,y)|\frac{1}{4}x^2-y^2=1,x,y\in \mathbf{R}\}$.

试问下列结论是否正确,如果正确,请给予证明;如果不正确,请举例说明.

(1)若以集合 A 中的元素作为点的坐标,则这些点都在同一条直线上;

(2)$A\cap B$ 至多有一个元素;

(3)当 $a_1\neq 0$ 时,一定有 $A\cap B\neq\varnothing$.

7.(★★★★)已知集合 $A=\{z||z-2|\leqslant 2,z\in \mathbf{C}\}$,集合 $B=\{w|w=\frac{1}{2}zi+b,b\in \mathbf{R}\}$,当 $A\cap B=B$ 时,求 b 的值.

8.(★★★★)设 $f(x)=x^2+px+q$,$A=\{x|x=f(x)\}$,$B=\{x|f[f(x)]=x\}$.

(1)求证:$A\subseteq B$;

(2)如果 $A=\{-1,3\}$,求 B.

难点 2　充要条件的判定

充分条件、必要条件和充要条件是重要的数学概念，主要用来区分命题的条件 p 和结论 q 之间的关系. 本节主要是通过不同的知识点来剖析充分必要条件的意义，让考生能准确判定给定的两个命题的充要关系.

〖难点磁场〗

(★★★★★)已知关于 x 的实系数二次方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个实数根 α、β，证明：$|\alpha|<2$ 且 $|\beta|<2$ 是 $2|a|<4+b$ 且 $|b|<4$ 的充要条件.

〖案例探究〗

[例1]已知 $p:|1-\frac{x-1}{3}|\leqslant 2$，$q:x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$，若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件，求实数 m 的取值范围.

命题意图：本题以含绝对值的不等式及一元二次不等式的解法为考查对象，同时考查了充分必要条件及四种命题中等价命题的应用，强调了知识点的灵活性.

知识依托：本题解题的闪光点是利用等价命题对题目的文字表述方式进行转化，使考生对充要条件的难理解变得简单明了.

错解分析：对四种命题以及充要条件的定义实质理解不清晰是解此题的难点，对否命题，学生本身存在着语言理解上的困难.

技巧与方法：利用等价命题先进行命题的等价转化，搞清晰命题中条件与结论的关系，再去解不等式，找解集间的包含关系，进而使问题解决.

解：由题意知：

命题：若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件的等价命题即逆否命题为：p 是 q 的充分不必要条件.

$p:|1-\frac{x-1}{3}|\leqslant 2\Rightarrow -2\leqslant\frac{x-1}{3}-1\leqslant 2\Rightarrow -1\leqslant\frac{x-1}{3}\leqslant 3\Rightarrow -2\leqslant x\leqslant 10$

$q:x^2-2x+1-m^2\leqslant 0\Rightarrow[x-(1-m)][x-(1+m)]\leqslant 0$　*

∵ p 是 q 的充分不必要条件，

∴不等式 $|1-\frac{x-1}{3}|\leqslant 2$ 的解集是 $x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$ 解集的子集.

又∵ $m>0$

∴不等式 * 的解集为 $1-m\leqslant x\leqslant 1+m$

∴ $\begin{cases}1-m\leqslant -2\\1+m\geqslant 10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\geqslant 1\\m\geqslant 9\end{cases}$，∴ $m\geqslant 9$，∴实数 m 的取值范围是 $[9,+\infty)$.

[例2]已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项 $S_n=p^n+q(p\neq 0,p\neq 1)$，求数列 $\{a_n\}$ 是等比数列的充要条件.

命题意图：本题重点考查充要条件的概念及考生解答充要条件命题时的思维的严谨性.

知识依托：以等比数列的判定为主线，使本题的闪光点在于抓住数列前 n 项和与通项之间的递推关系，严格利用定义去判定.

错解分析：因为题目是求的充要条件，即有充分性和必要性两层含义，考生很容易忽视充分性的证明.

技巧与方法：由 $a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1)\\S_n-S_{n-1} & (n\geqslant 2)\end{cases}$ 关系式去寻找 a_n 与 a_{n+1} 的比值，但同时要注意充分性的证明.

解：$a_1=S_1=p+q$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=p^{n-1}(p-1)$

∵ $p\neq 0,p\neq 1$，∴ $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{p^n(p-1)}{p^{n-1}(p-1)}=p$

若 $\{a_n\}$ 为等比数列，则 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_{n+1}}{a_n}=p$

∴ $\frac{p(p-1)}{p+q}=p$，

∵ $p\neq 0$，∴ $p-1=p+q$，∴ $q=-1$

这是 $\{a_n\}$ 为等比数列的必要条件.

下面证明 $q=-1$ 是 $\{a_n\}$ 为等比数列的充分条件.

当 $q=-1$ 时，∴ $S_n=p^n-1(p\neq 0,p\neq 1)$，$a_1=S_1=p-1$

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=p^n-p^{n-1}=p^{n-1}(p-1)$

∴ $a_n=(p-1)p^{n-1}\quad(p\neq 0,p\neq 1)$

$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{(p-1)p^{n-1}}{(p-1)p^{n-2}}=p$ 为常数

∴ $q=-1$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为等比数列.

即数列 $\{a_n\}$ 是等比数列的充要条件为 $q=-1$.

〖锦囊妙计〗

本难点所涉及的问题及解决方法主要有：

(1)要理解"充分条件""必要条件"的概念：当"若 p 则 q"形式的命题为真时，就记作 $p\Rightarrow q$，称 p 是 q 的充分条件，同时称 q 是 p 的必要条件，因此判断充分条件或必要条件就归结为判断命题的真假.

(2)要理解"充要条件"的概念，对于符号"$\Leftrightarrow$"要熟悉它的各种同义词语："等价于"，"当且仅当"，"必须并且只需"，"……，反之也真"等.

(3)数学概念的定义具有相称性，即数学概念的定义都可以看成是充要条件，既是概念的判断依据，又是概念所具有的性质.

(4)从集合观点看，若 $A\subseteq B$，则 A 是 B 的充分条件，B 是 A 的必要条件；若 $A=B$，则 A、B 互为充要条件.

(5)证明命题条件的充要性时，既要证明原命题成立(即条件的充分性)，又要证明它的逆命题成立(即条件的必要性).

〖歼灭难点训练〗

一、选择题

1.(★★★★)函数 $f(x)=x|x+a|+b$ 是奇函数的充要条件是 …………… (　　)

A. $ab=0$　　B. $a+b=0$　　C. $a=b$　　D. $a^2+b^2=0$

2.(★★★★)"$a=1$"是函数 $y=\cos^2 ax-\sin^2 ax$ 的最小正周期为"π"的 …… (　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分条件也不是必要条件

二、填空题

3.(★★★★)$a=3$ 是直线 $ax+2y+3a=0$ 和直线 $3x+(a-1)y=a-7$ 平行且不重合的________.

4.(★★★★)命题 A：两曲线 $F(x,y)=0$ 和 $G(x,y)=0$ 相交于点 $P(x_0,y_0)$，命题 B：曲线 $F(x,y)+\lambda G(x,y)=0$(λ 为常数)过点 $P(x_0,y_0)$，则 A 是 B 的____条件.

三、解答题

5.(★★★★★)设 α,β 是方程 $x^2-ax+b=0$ 的两个实根，试分析 $a>2$ 且 $b>1$ 是两根 α、β 均大于 1 的什么条件？

6.(★★★★★)已知数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$满足:$b_n=\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+3+\cdots+n}$,求证:数列$\{a_n\}$成等差数列的充要条件是数列$\{b_n\}$也是等差数列.

7.(★★★★★)已知抛物线C:$y=-x^2+mx-1$和点$A(3,0)$,$B(0,3)$,求抛物线C与线段AB有两个不同交点的充要条件.

8.(★★★★★)p:$-2<m<0$,$0<n<1$;q:关于x的方程$x^2+mx+n=0$有2个小于1的正根,试分析p是q的什么条件.(充要条件)

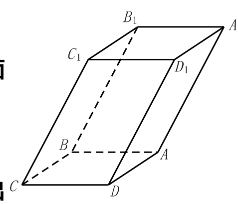
难点 3　运用向量法解题

平面向量是新教材改革增加的内容之一,近几年的全国使用新教材的高考试题逐渐加大了对这部分内容的考查力度,本节内容主要是帮助考生运用向量法来分析,解决一些相关问题.

〖难点磁场〗

(★★★★★)**三角形** ABC **中**,$A(5,-1)$、$B(-1,7)$、$C(1,2)$,**求**:(1)BC **边上的中线** AM **的长**;(2)$\angle CAB$ **的平分线** AD **的长**;(3)$\cos ABC$ **的值.**

〖案例探究〗



[例 1]如图,已知平行六面体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ **的底面** $ABCD$**是菱形,且**$\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD$.

(1)**求证**:$C_1C\perp BD$.

(2)**当**$\dfrac{CD}{CC_1}$**的值为多少时,能使** $A_1C\perp$ **平面** C_1BD**?请给出证明.**

命题意图:本题主要考查考生应用向量法解决向量垂直,夹角等问题以及对立体几何图形的解读能力.

知识依托:解答本题的闪光点是以向量来论证立体几何中的垂直问题,这就使几何问题代数化,使繁琐的论证变得简单.

错解分析:本题难点是考生理不清题目中的线面位置关系和数量关系的相互转化,再就是要清楚已知条件中提供的角与向量夹角的区别与联系.

技巧与方法:利用 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ **来证明两直线垂直,只要证明两直线对应的向量的数量积为零即可.**

(1)**证明:设**$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CC_1}=\boldsymbol{c}$,**依题意**,$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,**设**$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{CC_1}$**中两两所成夹角为** θ,**于是**$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CC_1}\cdot\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{c}|\cdot|\boldsymbol{a}|$

$\cos\theta-|\boldsymbol{c}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$，$\therefore C_1C\perp BD$.

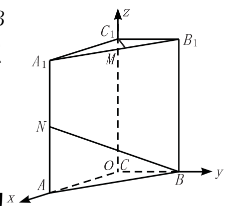
(2)解：若使 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD，只须证 $A_1C\perp BD$，$A_1C\perp DC_1$，

由 $\overrightarrow{CA_1}\cdot\overrightarrow{C_1D}=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AA_1})\cdot(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CC_1})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-|\boldsymbol{c}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{c}|^2+|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cos\theta-|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\cos\theta=0$，得

当 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{c}|$ 时，$A_1C\perp DC_1$，同理可证当 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{c}|$ 时，$A_1C\perp BD$，

$\therefore \dfrac{CD}{CC_1}=1$ 时，$A_1C\perp$ 平面 C_1BD.

[例2]如图，直三棱柱 $ABC—A_1B_1C_1$，底面 $\triangle ABC$ 中，$CA=CB=1$，$\angle BCA=90°$，$AA_1=2$，M、N 分别是 A_1B_1、A_1A 的中点



(1)求 $\overrightarrow{BN}$ 的长；

(2)求 $\cos<\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{CB_1}>$ 的值；

(3)求证：$A_1B\perp C_1M$.

命题意图：本题主要考查考生运用向量法中的坐标运算的方法来解决立体几何问题. 属★★★★级题目.

知识依托：解答本题的闪光点是建立恰当的空间直角坐标系 $O-xyz$，进而找到点的坐标和求出向量的坐标.

错解分析：本题的难点是建系后，考生不能正确找到点的坐标.

技巧与方法：可以先找到底面坐标面 xOy 内的 A、B、C 点坐标，然后利用向量的模及方向来找出其他的点的坐标.

(1)解：如图，以 C 为原点建立空间直角坐标系 $O-xyz$.

依题意得：$B(0,1,0)$，$N(1,0,1)$

$\therefore |\overrightarrow{BN}|=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{3}$.

(2)解：依题意得：$A_1(1,0,2)$，$C(0,0,0)$，$B_1(0,1,2)$. $\therefore \overrightarrow{BA_1}=(1,-1,2)$，$\overrightarrow{CB_1}=(0,1,2)$

$\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{CB_1}=1\times0+(-1)\times1+2\times2=3$

$|\overrightarrow{BA_1}|=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2+(2-0)^2}=\sqrt{6}$

$|\overrightarrow{CB_1}|=\sqrt{(0-0)^2+(1-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$

$\therefore \cos<\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{CB_1}>=\dfrac{\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{CB_1}}{|\overrightarrow{BC_1}|\cdot|\overrightarrow{CB_1}|}=\dfrac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

(3)证明：依题意得：$C_1(0,0,2)$，$M(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},2)$

$\overrightarrow{C_1M}=(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0)$，$\overrightarrow{A_1B}=(-1,1,-2)$

$\therefore \overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{C_1M}=(-1)\times\dfrac{1}{2}+1\times\dfrac{1}{2}+(-2)\times0=0$

$\therefore \overrightarrow{A_1B} \perp \overrightarrow{C_1M}$，$\therefore A_1B \perp C_1M$.

〖锦囊妙计〗

1. 解决关于向量问题时，一要善于运用向量的平移、伸缩、合成、分解等变换，正确地进行向量的各种运算，加深对向量的本质的认识. 二是向量的坐标运算体现了数与形互相转化和密切结合的思想.

2. 向量的数量积常用于有关向量相等，两向量垂直、射影、夹角等问题中. 常用向量的直角坐标运算来证明向量的垂直和平行问题；利用向量的夹角公式和距离公式求解空间两条直线的夹角和两点间距离的问题.

3. 用空间向量解决立体几何问题一般可按以下过程进行思考：

(1)要解决的问题可用什么向量知识来解决？需要用到哪些向量？

(2)所需要的向量是否已知？若未知，是否可用已知条件转化成的向量直接表示？

(3)所需要的向量若不能直接用已知条件转化成的向量表示，则它们分别最易用哪个未知向量表示？这些未知向量与由已知条件转化的向量有何关系？

(4)怎样对已经表示出来的所需向量进行运算，才能得到需要的结论？

〖歼灭难点训练〗

一、选择题

1.（★★★★）设 A、B、C、D 四点坐标依次是$(-1,0)$，$(0,2)$，$(4,3)$，$(3,1)$，则四边形 $ABCD$ 为 …………（　　）

A. 正方形　　B. 矩形　　C. 菱形　　D. 平行四边形

2.（★★★★）已知$\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{15}{4}$，$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=5$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 …………（　　）

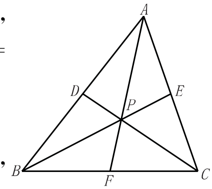
A. $30°$　　B. $-150°$　　C. $150°$　　D. $30°$或 $150°$

二、填空题

3.（★★★★★）将二次函数 $y=x^2$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移后得到的图象与一次函数 $y=2x-5$ 的图象只有一个公共点$(3,1)$，则向量 $\boldsymbol{a}=$________.

4.（★★★★）等腰$\triangle ABC$ 和等腰 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 有公共的底边 AB，它们所在的平面成 $60°$角，若 $AB=16\ \mathrm{cm}$，$AC=17\ \mathrm{cm}$，则 $CD=$________.

三、解答题



5.（★★★★★★）如图，在$\triangle ABC$ 中，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{c}$，

$\overrightarrow{AD}=\lambda \boldsymbol{a}$，$(0<\lambda<1)$，$\overrightarrow{AE}=\mu \boldsymbol{b}(0<\mu<1)$，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{c}$.

6.(★★★★)正三棱柱 $ABC—A_1B_1C_1$ 的底面边长为 a，侧棱长为$\sqrt{2}a$.

(1)建立适当的坐标系，并写出 A、B、A_1、C_1 的坐标；

(2)求 AC_1 与侧面 ABB_1A_1 所成的角.

7.(★★★★★)已知两点 $M(-1,0)$，$N(1,0)$，且点 P 使$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$，$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NP}$成公差小于零的等差数列.

(1)点 P 的轨迹是什么曲线？

(2)若点 P 坐标为(x_0,y_0)，Q 为$\overrightarrow{PM}$与$\overrightarrow{PN}$的夹角，求 $\tan\theta$.

8.(★★★★★)已知 E、F、G、H 分别是空间四边形 $ABCD$ 的边 AB、BC、CD、DA 的中点.

(1)用向量法证明 E、F、G、H 四点共面；

(2)用向量法证明：BD∥平面 $EFGH$；

(3)设 M 是 EG 和 FH 的交点，求证：对空间任一点 O，有$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$.

难点 4　三个"二次"及关系

三个"二次"即一元二次函数、一元二次方程、一元二次不等式是中学数学的重要内容，具有丰富的内涵和密切的联系，同时也是研究包含二次曲线在内的许多内容的工具. 高考试题中近一半的试题与这三个"二次"问题有关. 本节主要是帮助考生理解三者之间的区别及联系，掌握函数、方程及不等式的思想和方法.

〖难点磁场〗

已知对于 x 的所有实数值，二次函数 $f(x)=x^2-4ax+2a+12(a\in\mathbf{R})$ 的值都是非负的，求关于 x 的方程 $\frac{x}{a+2}=|a-1|+2$ 的根的取值范围.

〖案例探究〗

[例1]已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 和一次函数 $g(x)=-bx$，其中 a、b、c 满足 $a>b>c$，$a+b+c=0$，$(a,b,c\in\mathbf{R})$.

(1)求证：两函数的图象交于不同的两点 A、B；

(2)求线段 AB 在 x 轴上的射影 A_1B_1 的长的取值范围.

命题意图：本题主要考查考生对函数中函数与方程思想的运用能力. 属于★★★★★题目.

知识依托：解答本题的闪光点是熟练应用方程的知识来解决问题及数与形的完美结合.

错解分析：由于此题表面上重在"形"，因而本题难点就是一些考生可能走入误区，老是想在"形"上找解问题的突破口，而忽略了"数".

技巧与方法：利用方程思想巧妙转化.

(1)证明：由 $\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=-bx \end{cases}$ 消去 y 得 $ax^2+2bx+c=0$

$\Delta=4b^2-4ac=4(-a-c)^2-4ac=4(a^2+ac+c^2)=4[(a+\frac{c}{2})^2+\frac{3}{4}c^2]$