魔法数学同步学与练

——高一（学生用书）

李慧　主编

长征出版社

图书在版编目（CIP）数据

魔法数学同步学与练．高一/ 李慧主编．—北京：长征出版社，2004
学生用书
ISBN 7-80015-994-9

Ⅰ．魔… Ⅱ．李… Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 036426 号

魔法数学同步学与练高一

主创设计/ 魔法教育发展研究中心
电　　话/ 010 - 80602977
网　　址/ ttp:// www. magic365. com

出　　版/ 长征出版社
（北京市西城区阜外大街 34 号　邮编：100832）
行销企划/ 北京九恒世纪文化有限公司
（服务热线：010 - 80602977）
经　　销/ 全国新华书店
印　　刷/
开　　本/ 880×1230　1/ 16
字　　数/ 7600 千字
印　　张/ 238 印张
版　　次/ 2005 年 1 月第 1 版
印　　次/ 2005 年 1 月第 1 次印刷
书　　号/ ISBN 7-80015-994-9/ G・302
全套定价/ 288.00 元

第四章

三角函数

一　任意角的三角函数

4.1　角的概念的推广

预习导引

问题 1:经过 1 小时 10 分钟,时钟的分针所转的角是多少?

问题 2:α为锐角时,$\frac{\alpha}{2}$一定是锐角吗?α为第一象限角时,$\frac{\alpha}{2}$一定是第一象限角吗?为什么?

问题 3:设角 α,β满足 $-90°<\alpha<\beta<90°$,问 $\alpha-\beta$的范围是多少?

知能互动

1.我们规定,按逆时针方向旋转形成的角叫________,按顺时方向旋转形成的角叫做________.

2.如果一条射线没作任何旋转,我们称它形成了一个________.

3.我们常在直角坐标系内讨论角,为此使________与坐标原点重合,角的始边与 x 轴的________重合,角的终边(除端点外)在第几象限,我们就说这个角是________.

4.所有与角 α终边相同的角,连同角 α在内,可构成一个集合 $S=$________,即任一与角 α终边相同的角,都可以表示成角 α与________的和.

5.终边相同的角________相等,相等的角的终边________.

疑难解析

1.掌握角的概念应注意角的三要素:顶点、始边、终边.角可以是任意大小的.

2.角的分类

角:正角、零角、负角.

角的旋转方向是角分类的标准.

3.在平面直角坐标系内讨论角

(1)角的顶点在原点,始边在 x 轴的正半轴上,角的终边在第几象限,就说这个角是第几象限的角(或说这个角属于第几象限).这里强调以"角的顶点为原点,角的始边为 x 轴的非负半轴"为前提,否则就不能从终边的位置来判断某角属于第几象限.

(2)若角的终边在坐标轴上,就说这个角不属于任何象限.它叫轴上角.

4.与 α角终边相同的角集合

$\{\beta|\beta=k\cdot360°+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$.

这里应明确:(1)k 是整数;(2)α是任意角;(3)$k\cdot360°$与α之间是"+"号.如 $k\cdot360°-30°$应看成 $k\cdot360°+(-30°)$($k\in\mathbf{Z}$);(4)终边相同的角不一定相等,但相等的角,终边一定相同;(5)终边相同的角有无数多个,它们相差 360°的整数倍.

探究学习

例 1

(1)写出与 $-756°$角终边相同的角的集合 M;

(2)若 $\alpha\in M$,且 $-720°<\alpha\leq360°$,求 α.

> 命题意图:本题主要考查在 $\alpha+k\cdot360°$中,α是任意角,$k\in\mathbf{Z}$,并能根据题目要求,求出符合要求的角.

分析　利用与 α角终边相同的角的集合$\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$,再根据 k 为整数,求出符合要求的角.

答案　(1)由题意可得 $M=\{\alpha|\alpha=-756°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

(2)因为所求角 α满足:$-720°<\alpha\leq360°$,所以应在 $-756°$上加上 360°的正整数倍,使角变大,在集合 M 中,取 $k=1,2,3$可得满足要求的角为 $-396°,-36°,324°$.

探究:解此类问题,常用的方法是先写出终边相同的角的集合,再通过观察或利用不等式确定整数 k 的值,便可求得答案.若将(2)中 α 的范围改为 $-720°<\alpha\leq 720°$,那么将会有几个解呢?为什么?

变式题:在0°到360°范围内,找出与下列各角终边相同的角,并指出它们是哪个象限的角:

(1) $2903°15'$;　　(2) $-845°10'$.

解:(1)终边与 $2903°15'$ 相同的角的集合为:

$S=\{\beta|\beta=k\cdot 360°+2903°15', k\in \mathbf{Z}\}$.

当 $k=-8$ 时, $\beta=23°15'$.

故在0°到360°范围内,终边与 $2903°15'$ 相同的角是 $23°15'$,它是第一象限的角.

(2)终边与 $-845°10'$ 相同的角的集合为:

$S=\{\beta|\beta=k\cdot 360°-845°10', k\in \mathbf{Z}\}$,

当 $k=3$ 时, $\beta=234°50'$.

故在0°到360°范围内,终边与 $-845°10'$ 相同的角是 $234°50'$,它是第三象限的角.

例2

(1)表示第二象限的角的集合;

(2)表示与45°,315°终边相同的角的集合,并表示图4-1-1中终边在阴影部分的角的集合.

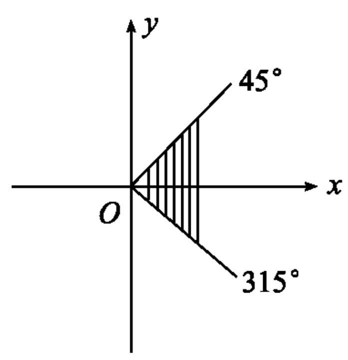


图4-1-1

命题意图:考查区间角和象限角的概念及表示方法.

分析　注意选择角的集合的表示方法;特别应注意在同一范围中,右端点应大于左端点.

答案　(1)由题意得,第二象限的角的集合为:

$\{\alpha| k\cdot 360°+90°<\alpha<k\cdot 360°+180°, k\in \mathbf{Z}\}$.

(2)由题意得,与45°,315°终边相同的角的集合分别为:

$S_1=\{\beta|\beta=k\cdot 360°+45°, k\in \mathbf{Z}\}$ 和

$S_2=\{\beta|\beta=k\cdot 360°+315°, k\in \mathbf{Z}\}$.

终边在阴影部分的角的集合为

$S=\{\beta| k\cdot 360°-45°\leq\beta\leq k\cdot 360°+45°, k\in \mathbf{Z}\}$.

探究:(1)应准确表示终边在坐标轴上的角和各个象限的角的集合.

(2)终边落在阴影部分角的集合也可以表示为 $S=\{\beta| k\cdot 360°+315°\leq\beta<k\cdot 360°$ 或 $k\cdot 360°\leq\beta\leq k\cdot 360°+45°, k\in \mathbf{Z}\}$.但不能表示为 $\{\beta| k\cdot 360°+315°<\beta<k\cdot 360°+45°\}$ 或 $\{\beta| -45°<\beta<45°\}$.

例3

若 α 是第二象限角,则 $2\alpha,\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{3}$ 分别是第几象限的角?

命题意图:主要考查象限角、区间角的表示方法.

分析　由于 α 是第二象限角,所以得 $k\cdot 360°+90°<\alpha<k\cdot 360°+180°(k\in \mathbf{Z})$.再得出 $2\alpha,\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{3}$,同时注意对整数 k 的讨论.

答案　①∵ α 是第二象限的角∴ $k\cdot 360°+90°<\alpha<k\cdot 360°+180°(k\in \mathbf{Z})$.则 $k\cdot 720°+180°<2\alpha<k\cdot 720°+360°$,故 2α 是第三或第四象限的角,或角的终边在 y 轴的负半轴上.

②∵ $k\cdot 180°+45°<\frac{\alpha}{2}<k\cdot 180°+90°(k\in \mathbf{Z})$,当 $k=2n$ $(n\in \mathbf{Z})$ 时, $n\cdot 360°+45°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot 360°+90°$, $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限的角,当 $k=2n+1(n\in \mathbf{Z})$ 时, $n\cdot 360°+225°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot 360°+270°$, $\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限的角,∴ $\frac{\alpha}{2}$ 是第一或第三象限的角.

③∵ $k\cdot 120°+30°<\frac{\alpha}{3}<k\cdot 120°+60°$,当 $k=3n(n\in \mathbf{Z})$ 时, $n\cdot 360°+30°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot 360°+60°$,∴ $\frac{\alpha}{3}$ 是第一象限的角;当 $k=3n+1$ 时 $(n\in \mathbf{Z})$ 时 $n\cdot 360°+150°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot 360°+180°$,∴ $\frac{\alpha}{3}$ 是第二象限的角;当 $k=3n+2(n\in \mathbf{Z})$ 时, $n\cdot 360°+270°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot 360°+300°$,∴ $\frac{\alpha}{3}$ 是第四象限的角;综上所述 $\frac{\alpha}{3}$ 是第一或第二或第四象限的角,如图4-1-2所示:

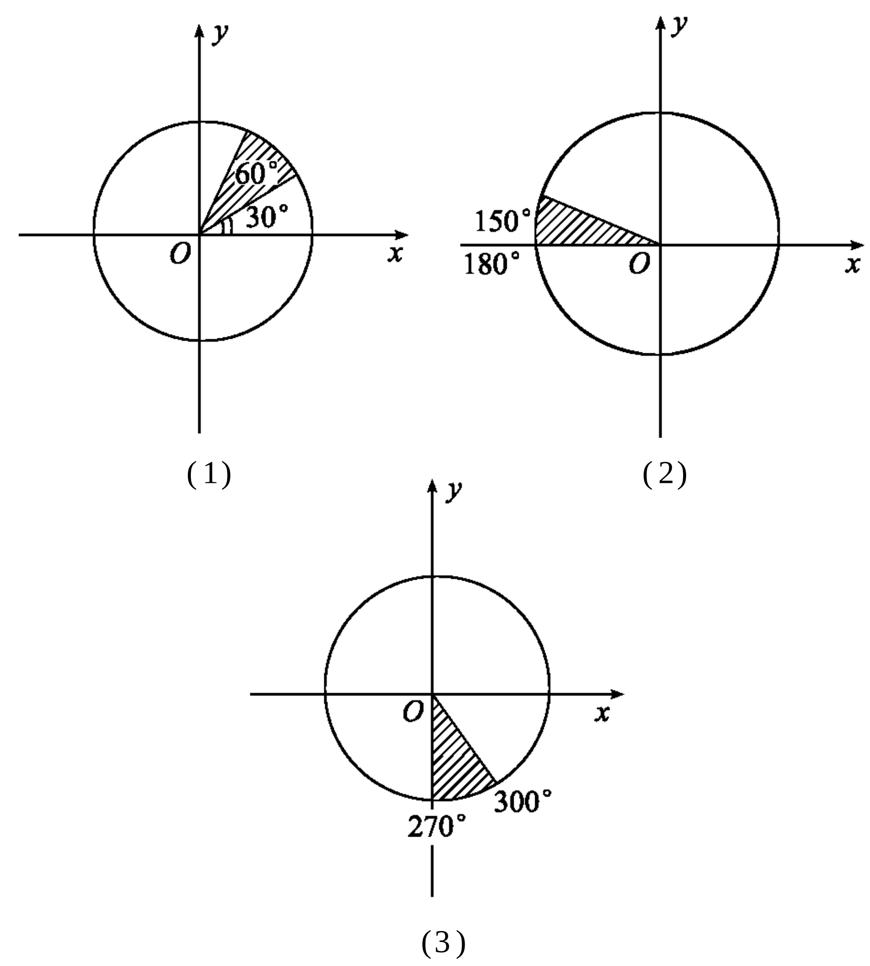


图4-1-2

探究:(1) α 为一个象限的角时, $\frac{\alpha}{2}$ 一般应在两个象限,可按 $k=2n,k=2n+1(k\in \mathbf{Z})$ 对整数 k 进行分类,目的是"凑"出表达式: $n\cdot 360°$.

(2)讨论形如 $\theta=\alpha+k\cdot120°(k\in\mathbf{Z})$所表示的角所在的象限,可按 $k=3n$、$k=3n+1$、$k=3n+2(k\in\mathbf{Z})$对整数 k进行分类,目的也是"凑"出表达方式:$n\cdot360°$.

(3)应掌握这类题目的求解方法.

变式题:若 α为第三象限角,那么 $-\alpha$, $\frac{\alpha}{2}$, 2α为第几象限的角?

解:因 α为第三象限角,故 $k\cdot360°+180°<\alpha<k\cdot360°+270°(k\in\mathbf{Z})$.

$\therefore -k\cdot360°-270°<-\alpha<-k\cdot360°-180°(k\in\mathbf{Z})$.

$\therefore -(k+1)\cdot360°+90°<-\alpha<-(k+1)\cdot360°+180°(k\in\mathbf{Z})$.

$\therefore -\alpha$为第二象限角.

因为 $k\cdot180°+90°<\frac{\alpha}{2}<k\cdot180°+135°$,故当 k为偶数值,$\frac{\alpha}{2}$为第二象限角;当 k为奇数时,$\frac{\alpha}{2}$为第四象限角.

因为 $2k\cdot360°+360°<2\alpha<2k\cdot360°+540°(k\in\mathbf{Z})$,

即 $(2k+1)\cdot360°<2\alpha<(2k+1)\cdot360°+180°(k\in\mathbf{Z})$.

故 2α的终边在第一、二象限或 y轴非负半轴上.所以,2α为第一、二象限角或 y轴非负半轴上角.

高考链接

(2001 全国,5 分,3 分钟)若 $\sin\theta\cos\theta>0$,则 θ在(　　)

A 第一、二象限　　B 第一、三象限

C 第一、四象限　　D 第二、四象限

解析　由 $\sin\theta\cos\theta>0$ 可知,$\sin\theta$、$\cos\theta$同号.

当 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$时,θ在第一象限.

当 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$时,θ在第三象限.

因此选 B.

答案　B

达标训练

基础过关

1 下列命题中,惟一正确的是　(　　)

A 终边与始边重合的角为零度角

B 终边在第一象限的角都是锐角

C 小于 90°的角都是锐角

D 相同的角终边一定相同

2 给出下列四个命题:(1) $-60°$是第四象限角;(2)235°是第三象限角;(3)475°是第二象限角;(4) $-315°$是第一象限角 其中正确的有　(　　)

A 1个　　B 2个　　C 3个　　D 4个

3 与 $-460°$终边相同的角可写成　(　　)

A $460°+k\cdot360°$, $k\in\mathbf{Z}$　B $100°+k\cdot360°$, $k\in\mathbf{Z}$

C $260°+k\cdot360°$, $k\in\mathbf{Z}$　D $-260°+k\cdot360°$, $k\in\mathbf{Z}$

4 在 $-360°$与 $360°$之间与 $-1840°$终边相同的角是________.

5 与 $-3920°$终边相同的最小正角是________.

6 用集合表示:

(1)第三象限角的集合;

(2)终边落在 y轴右侧的角的集合.

拓展训练

7 集合 $M=\{\alpha|\alpha=k\cdot90°, k\in\mathbf{Z}\}$中,各角的终边都在　(　　)

A x轴正半轴上

B y轴正半轴上

C x轴或 y轴上

D x轴正半轴或 y轴正半轴上

8 若 α是第一象限角,则下面各角中第四角限的角是　(　　)

A $90°-\alpha$　B $90°+\alpha$　C $360°-\alpha$　D $180°+\alpha$

9 下列说法中,正确的是　(　　)

A 第二象限的角是钝角

B 第二象限的角必大于第一象限的角

C $-150°$是第二象限的角

D $-252°16'$、$467°44'$、$1187°44'$是终边相同的角

10 已知角 α的终边在 x轴的上方,那么$\frac{\alpha}{2}$是　(　　)

A 第一象限角　　B 第一、二象限角

C 第一、三象限角　　D 第一、四象限角

11 经过 5 小时又 25 分钟,时钟的分针旋转________度.

12 若 α是第一象限的角,则 $-\frac{\alpha}{2}$是第__________象限的角.

13 ①若角 α与角 β的终边重合,则 α与 β的关系是________;②若角 α与角 β的终边在一条直线上,则 α与 β的关系是________.

14 θ为小于 360°的正角,这个角的 7 倍的角的终边与该角终边重合,则 θ________.

15 已知角 α的终边与 y轴的正半轴所夹的角为 30°,且终边落在第二象限,又 $-720°<\alpha<0°$,求 α.

16 写出终边在直线 $y=x$上的角的集合.

综合创新

17 已知角 α是第三象限的角,问:$\frac{\alpha}{3}$可能是哪几个象限的角?

18 若角 β的终边所在的直线经过点 $Q(-2,2)$,并且 $\beta\in(-360°,360°)$,试求角 β.

19 已知 $180°<\alpha+\beta<240°$, $-180°<\alpha-\beta<-60°$,求 $2\alpha-\beta$ 的范围.

20 如图 4-1-3,半径为 1 的圆的圆心位于坐标原点,点 P 从点 $A(1,0)$ 出发,依逆时针方向等速沿单位圆周旋转.已知 P 在 1 s 内转过的角度为 $\theta(0°<\theta<180°)$,经过 2 s 到达第三象限,经过 14 s 后又恰好回到出发点 A.求 θ.

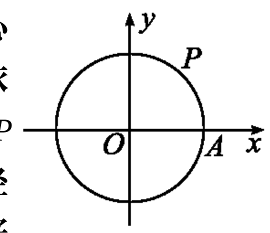


图 4-1-3

4.2　弧度制

预习导引

问题 1:将分针拨快 10 分钟,分针转过的弧度数是多少?

问题 2:在直径为 10 cm 的轮上有一条长为 6 cm 的弦,P 是该弦的中点,轮子以 5 弧度/秒的角速度旋转,经过 5 秒钟后点 P 转过的弧长是多少?

问题 3:自行车大链轮有 48 个齿,小链轮有 20 个齿,当大链轮转过一周时,小链轮转过的角度是多少度?多少弧度?

知能互动

1.我们规定周角的 $\frac{1}{360}$ 为 1 度的角,这种用度作单位来度量角的单位制叫做________.角的另一种度量方法——弧度制,把________叫做 1 弧度的角.

2.正角的弧度数是一个________,负角的弧度数是一个________,零角的弧度数是 0;角 α 的弧度数的绝对值 $|\alpha|=$________,其中 l 是以角 α 作为圆心角所对弧的长,r 是圆的半径.

3.1 弧度等于________,1°等于________.

4.分别写出下列角所对的弧度数,30°,45°,60°,90°,120°,135°,150°,180°,270°,360°,所对的弧度数依次为________,________,________,________,________,________,________,________,________,________.

5.与 α 角终边相同的角的集合,用弧度制可以表示为:________.

6.角度制下的弧长公式为________,扇形面积公式为________;弧度制下的弧长公式为________,扇形面积公式为________.

疑难解析

1.(1)根据定义,可以得出角度与弧度的互化关系:角度化为弧度,只需将角 α 乘以 $\frac{\pi}{180°}$;弧度化为角度,则只需将 α 乘以 $\frac{180°}{\pi}$.(2)以弧度为单位表示角的大小时,"弧度"两字可以省略不写,但以度(°)为单位表示角时,度(°)就不能省去.用弧度为单位表示角时,常常把弧度数写成多少 π 的形式,如:$45°=\frac{\pi}{4}$.(3)规定:正角的弧度数为正数,负角的弧度数为负数,零角的弧度数为零.

2.根据圆心角定理,对于任何一个圆心角 α,所对弧长与半径的比是一个仅与角 α 的大小有关的常数.因此,弧长等于半径的弧所对的圆心角的大小并不随半径变化而变化,而是一个大小确定的角,即为 1 弧度的角.

3.在弧度制中,弧长公式 $l=|\alpha|\cdot r$,扇形面积公式 $S=\frac{1}{2}l\cdot r=\frac{1}{2}|\alpha|\cdot r^2$,其形式特别简单,因而使用起来十分方便.

4.角集合与实数集 **R** 之间的一一对应

用弧度制来度量角,实际上是在角的集合与实数集 **R** 之间建立这样的一一对应关系:

每一个角都有惟一的一个实数(即这个角的弧度数)与它对应;反过来,每一个实数也都有惟一的一个角(角的弧度数等于这个实数)与它对应.

于是,就可以把三角函数看成是以实数为自变量的函数,它的自变量的意义可以有多种解释,从而使三角函数的应用更加广泛,在数学与科学研究中所以普遍采用弧度制,这是原因之一.

探究学习

例 1

集合 $M=\{x|x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{x|x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$ 则　(　　)

A $M=N$　B M　N　C M　N　D $M\cap N=$

命题意图:考查用弧度制表示终边相同的角的集合.

分析　本题由于是选择题,可以通过特殊值观察来解;也可以对整数 k 进行奇偶性讨论.

解法 1:集合 M 表示的是终边落在四个象限的角平分线上的角的集合,而集合 N 表示的是终边落在坐标轴上或四个象限的角平分线上的角的集合,故选 C.

解法 2:对集合 N,当 k 为奇数时,即 $k=2n+1$,$n\in\mathbf{Z}$ 时,

$x=\frac{(n+1)\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$, $n\in \mathbf{Z}$,这说明集合 M 为集合 N 的子集;而 k 为偶数时, $x\in M$,故选 C.

> 探究:记住以下表达式对解题有利($n,k\in \mathbf{Z}$):终边在 x 轴上的角:$\alpha=k\pi$;终边在 y 轴上的角:$\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}$;终边在坐标轴上的角:$\alpha=\frac{n\pi}{2}$;终边在各象限的角平分线上的角:$\alpha=\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$.
>
> 变式题:设集合 $M=\{x|x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in \mathbf{Z}\}$, $N=\{x|x=k\pi\pm\frac{\pi}{4},k\in \mathbf{Z}\}$,则 M,N 之间的关系是______.
>
> 解:M,N 均为终边在各象限角平分线上的角的集合,故 $M=N$.
>
> 答案:$M=N$.

例 2

设角 $\alpha_1=-570°$, $\alpha_2=750°$, $\beta_1=\frac{3}{5}\pi$, $\beta_2=-\frac{7}{3}\pi$.

(1)将 α_1,α_2 用弧度制表示出来,并指出它们各自所在的象限;

(2)将 β_1,β_2 用角度制表示出来,并在 $-720°\sim0°$ 之间找出与它们有相同终边的所有角.

> 命题意图:本题主要考查角度与弧度的互化.

分析 涉及角度与弧度的互化关系和终边相同角的概念,其基本公式 $360°=2\pi$ 弧度在解题中起关键作用.

解:(1)∵$180°=\pi$,

∴ $-570°=-\frac{570}{180}\pi=\frac{-19}{6}\pi$.

∴ $\alpha_1=-2\times2\pi+\frac{5\pi}{6}$.

同理 $\alpha_2=2\times2\pi+\frac{\pi}{6}$.

∴α_1 在第二象限,α_2 在第一象限.

(2)∵$\frac{3}{5}\pi=\frac{3}{5}\times180°=108°$,设 $\theta=k\cdot360°+\beta_1$ ($k\in \mathbf{Z}$).

由 $-720°\leq\theta<0°$,

∴ $-720°\leq k\cdot360°+108°<0°$.

∴ $k=-2$ 或 $k=-1$.

∴在 $-720°\sim0°$ 间与 β_1 有相同终边的角是:$-612°$ 和 $-252°$.

同理 $\beta_2=-360°-60°=-420°$,且在 $-720°\sim0$ 间与 β_2 有相同的终边的角是 $-420°$ 和 $-60°$.

> 探究:(1)迅速进行角度与弧度的互化、准确判断角所在的象限是学习三角函数知识的必备基本功.若需要在某一指定范围内求具有某种特性的角,通常可像上例一样化为解不等式去求对应的 k 值.
>
> (2)对于(2),应先写出与 β_1,β_2 终边相同的角的集合,再求解,为什么 $-720°\sim0$ 间只有两解?

例 3

已知扇形 AOB 的周长是 6 cm,该扇形的中心角是 1 弧度,求该扇形的面积.

> 命题意图:主要考查弧长公式与扇形的面积公式.

分析 扇形的周长为 $2r+l$(r 为半径,l 为弧长),中心角 $|\alpha|=\frac{l}{r}$,可联立解方程组先求出 r,l,再用面积公式求解.

解:设扇形的半径 r,弧长为 l,则有

$\begin{cases}2r+l=6,\\ \frac{l}{r}=1.\end{cases}$ 解得 $r=l=2$,

∴该扇形的面积 $S=\frac{1}{2}rl=2(\mathrm{cm}^2)$.

> 探究:注意弧长公式 $l=|\alpha|\cdot r$ 和扇形的面积公式 $S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}|\alpha|\cdot r^2$ 的应用.

高考链接

(2004 辽宁,5 分,3 分钟)若 $\cos\theta>0$,且 $\sin2\theta<0$,则角 θ 的终边所在的象限是 ( )

A 第一象限 B 第二象限 C 第三象限 D 第四象限

解析 ∵ $\begin{cases}\cos\theta>0,\\ \sin2\theta<0.\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}2k\pi-\frac{\pi}{2}<\theta<2k\pi+\frac{\pi}{2},\\ 2k\pi-\pi<2\theta<2k\pi(k\in \mathbf{Z}).\end{cases}$

∴ $\begin{cases}2k\pi-\frac{\pi}{2}<\theta<2k\pi+\frac{\pi}{2},\\ k\pi-\frac{\pi}{2}<\theta<k\pi(k\in \mathbf{Z}).\end{cases}$

当 k 为奇数时,无公共部分,当 k 为偶数时,公共范围是第四象限.

答案 D

达标训练

基础过关

1 -330 的弧度数为 ( )

A $-\frac{\pi}{6}$ B $\frac{\pi}{6}$ C $-\frac{5}{3}\pi$ D $-\frac{11}{6}\pi$

2 5 弧度的角所在的象限为 ( )

A 第一象限 B 第二象限

C 第三象限 D 第四象限

3 把 $-1485°$ 化成 $\alpha+2k\pi(0\leq\alpha<2\pi,k\in \mathbf{Z})$ 的形式是 ( )

A $\frac{\pi}{4}-8\pi$ B $-\frac{7\pi}{4}-8\pi$

C $-\frac{\pi}{4}-10\pi$ D $\frac{7\pi}{4}-10\pi$

4 三角形的三内角之比为 2∶5∶8,则各角的弧度数分别为________.

5 如果 $x=n\pi+\frac{\pi}{4}(n\in \mathbf{Z})$,则 x 的终边落在第 ______

__ 象限,又可写成集合 ________ 与集合 ________ 的并集.

6 一个半径为 r 的扇形,若它的周长等于弧所在的半圆的长,那么扇形的圆心角是多少弧度?扇形的面积是多少?

拓展训练

7 若 α 是第四象限角,则 $\pi-\alpha$ 一定是　　(　　)

A 第一象限角　　B 第二象限角

C 第三象限角　　D 第四象限角

8 若 $M=\{\alpha|\alpha=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{5},k\in\mathbf{Z}\}$, $N=\{\alpha|-\pi<\alpha<\pi\}$,则 $M\cap N=$　　(　　)

A $\{-\frac{\pi}{5},\frac{3\pi}{10}\}$　　B $\{-\frac{7\pi}{10},\frac{4\pi}{5}\}$

C $\{-\frac{\pi}{5},\frac{3\pi}{10},\frac{4\pi}{5},-\frac{7\pi}{10}\}$　D $\{\frac{3\pi}{10},-\frac{7\pi}{10}\}$

9 若 α 和 β 的终边关于 y 轴对称,则　　(　　)

A $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

B $\alpha+\beta=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\ (k\in\mathbf{Z})$

C $\alpha+\beta=2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$

D $\alpha+\beta=(2k+1)\pi\ (k\in\mathbf{Z})$

10 设集合 $A=\{x|x=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$,集合 $B=\{x|x=k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$,则 $A\cap B$ 等于　　(　　)

A A　　B B

C $\{x|x=\frac{2k+1}{2}\pi,k\in\mathbf{Z}\}$　D

11 已知扇形的圆心角为 α,半径为 r,弧长为 l:

(1)若 $l=3$, $r=2$,则 $\alpha=$ ________(弧度).

(2)若 $\alpha=3\pi$, $r=4$,则 $l=$ ________.

(3)若 $\alpha=-216°$, $l=7\pi$,则 $r=$ ________.

(4)若 $l=7\pi$, $r=2$,则 $\alpha=$ ________(弧度).

12 圆的弧长等于该圆内接正三角形的边长,则该弧所对的圆心角的弧度数是________.

13 若 α 角的终边与 $\frac{8\pi}{5}$ 角的终边相同,则在 $[0,2\pi]$ 上终边与 $\frac{\alpha}{4}$ 角的终边相同的角是________.

14 若 $2\pi<\alpha<4\pi$,且 α 与 $-\frac{7\pi}{6}$ 的角的终边垂直,则 $\alpha=$ ________.

15 已知四边形的四个内角之比是 1∶3∶5∶6,分别用角度和弧度将这些内角的大小表示出来.

16 蒸汽机飞轮的直径为 1.2 m,以 300 周/分的速度作逆时针旋转,求

(1)飞轮每一秒转过的弧度数;

(2)轮轴上一点每一秒所转过的弧长.

综合创新

17 已知如图 4-2-1,扇形 AOB 的面积为 4 cm^2,周长为 10 cm,求扇形 AOB 的中心角的弧度和弦 AB 的长.

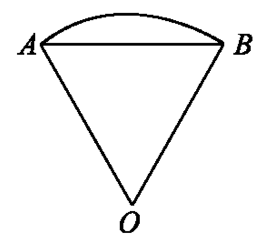


图 4-2-1

18 设集合 $A=\{\alpha|\alpha=\frac{3}{2}k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{\beta|\beta=\frac{5}{3}k\pi,|k|\leq10,k\in\mathbf{Z}\}$.求与 $A\cap B$ 的角的终边相同的角的集合.

19 若角 α 的终边与角 $\frac{\pi}{6}$ 的终边关于直线 $y=x$ 对称,且 $\alpha\in(-4\pi,4\pi)$.求 α.

20 一个扇形的周长为 l,求扇形的半径、圆心角各取何值时,此扇形的面积最大.

4.3　任意角的三角函数

预习导引

问题1:已知 α是三角形的内角,问 sin α, cos α, tan α, cot α中,可能取负值的有几个?

问题2:已知点 M 在角 θ的终边的反向延长线上,且 $|OM|=1$,则点 M 的坐标是 (　　)

A　$(\cos\theta, \sin\theta)$　　　B　$(\cos\theta, -\sin\theta)$

C　$(-\cos\theta, \sin\theta)$　　　D　$(-\cos\theta, -\sin\theta)$

问题3:设 α是第一象限的角,且 $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = -\sin\frac{\alpha}{2}$,则 $\frac{\alpha}{2}$是________象限的角.

知能互动

1.设 α是一个任意角,α的终边上任意一点 P 的坐标是 (x, y),它与原点的距离是 $r(r=\sqrt{x^2+y^2})$,那么角 α的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割可以表示为__________、________、________、________、________、________.

2.sin α, cos α的定义域是________.tan α的定义域是________.

3.正弦值在________象限为正,余弦值在________象限为正,正切值在________象限为正.

4.终边相同的角的________三角函数的值相等.

疑难解析

1.任意角的三角函数定义

设 α是一个任意大小的角,角 α的终边上任意一点 P 的坐标是 (x, y),它与原点的距离是 $r(r>0)$,那么角 α的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割分别是:

$\sin\alpha=\frac{y}{r}$, $\cos\alpha=\frac{x}{r}$, $\tan\alpha=\frac{y}{x}$, $\cot\alpha=\frac{x}{y}$, $\sec\alpha=\frac{r}{x}$, $\csc\alpha=\frac{r}{y}$;

正弦、余弦、正切、余切、正割、余割分别可看成是从一个角的集合到一个比值的集合的映射,它们都是以角为自变量,以比值为函数值的函数,这六个函数统称为三角函数.

2.三角函数的定义域

三角函数	sin α	cos α	tan α	cot α	sec α	csc α
定义域	**R**	**R**	$\{\alpha\mid\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\}$	$\{\alpha\mid\alpha\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$	$\{\alpha\mid\alpha\neq k\pi+\frac{2}{\pi}, k\in\mathbf{Z}\}$	$\{\alpha\mid\alpha\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$

注:确定三角函数的定义域时,主要应抓住分母为零时比值无意义这一关键,当且仅当角的终边在坐标轴上时,点 P 的坐标中必有一个为0.

3.三角函数值的符号

各三角函数值在每个象限的符号如图4-3-1(各象限注明的函数为正,其余为负).

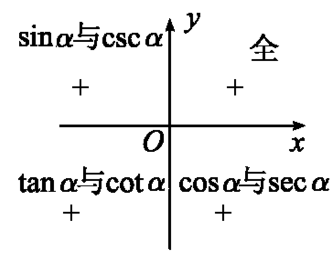


图4-3-1

4.三角函数线

设角 α的终边与以原点为圆心的单位圆交于点 P(图4-3-2),则有向线段 MP、OM、AT 的数量分别等于角 α的正弦、余弦、正切的值,分别称为角 α的正弦线、余弦线、正切线.

当角 α的终边在 x 轴上时,正弦线、正切线分别变成一个点;当角 α的终边在 y 轴上时,余弦线变成一点,正切线不存在.

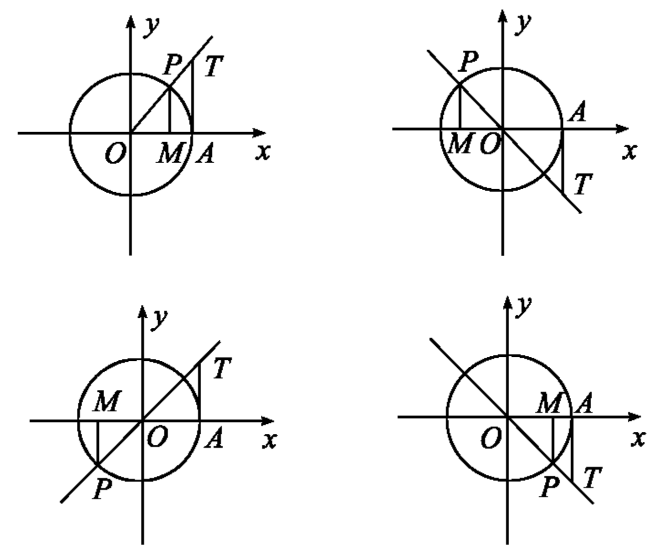


图4-3-2

5.根据三角函数的定义可知:(1)一个角的三角函数值只与这个角的终边位置有关,即角 α与 $\beta=2k\pi+\alpha(k\in\mathbf{Z})$的同名三角函数值相等;(2) $|x|\leq r$, $|y|\leq r$,故有 $|\sin\alpha|\leq1$, $|\cos\alpha|\leq1$,这是三角函数中最基本的一组不等关系.

探究学习

例1

若 α是第一象限角,那么 $\sin2\alpha$, $\cos2\alpha$, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$中必定能取正值的有哪些?

命题意图:本题考查三角函数的符号及象限角等.

分析　若 α是第一象限角,则可得 2α, $\frac{\alpha}{2}$的范围,再根据 2α, $\frac{\alpha}{2}$的范围判断其三角函数的符号.

解:∵α是第一象限角,

$\therefore 2k\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

$\therefore k\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}+k\pi$, $4k\pi<2\alpha<\pi+4k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

∴当 k 为偶数时,$\frac{\alpha}{2}$为第一象限角,当 k 为奇数,$\frac{\alpha}{2}$为第三象限角.而 2α为第一或第二象限角,或角的终边在 y 轴的正半轴上.

∴$\sin2\alpha$必定正值,其他的均不一定.

探究:应熟练掌握各种三角函数的值在各象限的符号.在具体判断时,应注意对角的范围的讨论.

例 2

已知角 α的终边上有一点 $P(-a,\ 3a)(a>0)$,求 α的各三角函数值.

命题意图:考查三角函数的定义.

分析　已知角 α的终边上有一点 P 的坐标,关键求出 r.当然应重视字母 a 的范围.

解:∵ $x=-a, y=\ 3a$,

∴ $r=\ (-a)^2+(\ 3a)^2=2a(a>0)$.

∴ $\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{3}{2}$, $\cos\alpha=\frac{x}{r}=-\frac{1}{2}$,

$\tan\alpha=\frac{y}{x}=-\ 3$, $\cot\alpha=\frac{x}{y}=-\frac{3}{3}$,

$\sec\alpha=\frac{r}{x}=-2$, $\csc\alpha=\frac{r}{y}=\frac{2\ 3}{3}$.

探究:对字母 a,应注意它的范围.如果将 $a>0$ 改为 $a<0$,哪些三角函数的值会变化?

变式题:已知角 α的终边上一点 $P(-15a,8a)(a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq0)$,求 α的各三角函数值.

解:∵ $x=-15a, y=8a$,

∴ $r=\ (-15a)^2+(8a)^2=17|a|(a\neq0)$.

(1)若 $a>0$,则 $r=17a$.

于是 $\sin\alpha=\frac{8}{17}$, $\cos\alpha=-\frac{15}{17}$,

$\tan\alpha=-\frac{8}{15}$, $\cot\alpha=-\frac{15}{8}$,

$\sec\alpha=-\frac{17}{15}$, $\csc\alpha=\frac{17}{8}$.

(2)若 $a<0$,则 $r=-17a$,于是 $\sin\alpha=-\frac{8}{17}$,

$\cos\alpha=\frac{15}{17}$, $\tan\alpha=-\frac{8}{15}$, $\cot\alpha=-\frac{15}{8}$, $\sec\alpha=\frac{17}{15}$,

$\csc\alpha=-\frac{17}{8}$.

例 3

求函数 $y=\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\tan x}{|\tan x|}$的值域.

命题意图:考查三角函数的符号及分类讨论的思想.

分析　因角 x 的范围不同,函数的取值可能不同,应注意分类讨论.

解:若角 x 是第一象限角,则 $y=2$;

若角 x 是第二象限角,则 $\cos x<0$ 且 $\tan x<0$,

∴ $y=-2$;

若角 x 是第三或第四象限角,则 $\cos x$ 与 $\tan x$ 异号.

∴ $y=0$.

综上,函数的值域为$\{-2,0,2\}$.

探究:本题通过对角 x 所在象限的讨论,进一步掌握三角函数值的符号,应熟练掌握并可以推广.

变式题:求函数 $y=\frac{|\sin x|}{\sin x}+\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\tan x}{|\tan x|}+\frac{\cot x}{|\cot x|}$的值域.

解:当 x 为第一象限角时,则 $y=4$.

当 x 为第二象限角时,则 $\sin x>0$, $\cos x<0$, $\tan x<0$, $\cot x<0$,∴ $y=-2$.

当 x 为第三象限角时,则 $\sin x<0$, $\cos x<0$, $\tan x>0$, $\cot x>0$,∴ $y=0$.

当 x 为第四象限角时,则 $\sin x<0$, $\cos x>0$, $\tan x<0$, $\cot x<0$,∴ $y=-2$.

因此,函数的值域为$\{-2,0,4\}$.

高考链接

1.(2003 全国,5 分,5 分钟)已知长方形的四个顶点 $A(0,0)$、$B(2,0)$、$C(2,1)$和 $D(0,1)$,一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 夹角 θ的方向射到 BC 的点 P_1 后,依次反射到 CD、DA 和 AB 上的点 P_2、P_3 和 P_4(入射角等于反射角).若 P_4 与 P_0 重合,则 $\tan\theta$等于　　(　　)

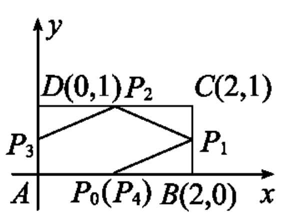


图 4-3-3

A　$\frac{1}{3}$　　B　$\frac{2}{5}$　　C　$\frac{1}{2}$　　D　1

解析　如图 4-3-3,因为 P_4 与 P_0 重合,∴ P_1 为 BC 中点,P_2 为 CD 中点,P_3 为 AD 的中点.

∴ $\tan\theta=\frac{1}{2}$.

答案　C

2.(2003 上海春,5 分,4 分钟),已知点 $P(\tan\alpha,\cos\alpha)$在第三象限,则角 α的终边在第________象限.

解析　因为点 $P(\tan\alpha,\cos\alpha)$在第三象限,因此有 $\tan\alpha<0$, $\cos\alpha<0$,故角 α的终边在第二象限.

答案　二

达标训练

基础过关

1　若 $\sin\theta\cdot\cos\theta<0$,则 θ在　　(　　)

A　第一、二象限　　B　第一、三象限

C　第二、三象限　　D　第二、四象限

2　已知 α的终边过点 $P(4,-3)$,则下面各式中正确的是　　(　　)

A　$\sin\alpha=\frac{3}{5}$　　B　$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$

C　$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$　　D　$\cot\alpha=-\frac{3}{4}$

3　若 MP 和 OM 分别是 $\alpha=\frac{17\pi}{18}$ 的正弦线和余弦线，则　　(　　)

A　$MP< OM<0$　　B　$OM<0<MP$
C　$OM<MP<0$　　D　$MP>0>OM$

4　角 α 终边上一点 $P(3a,-4a)$，其中 $a<0$，则 α 的六个三角函数值为________.

5　已知 $\sin\theta>0$ 且 $\tan\theta<0$，则 θ 为第______象限角.

6　已知角 α 的终边在直线 $y=2x$ 上，求 α 的六个三角函数值.

拓展训练

7　若一个 $600°$ 的角的终边上有一点 $P(-4,a)$，则 a 的值为　　(　　)

A　4 3　　B　-4 3　　C　±4 3　　D　3

8　若 $\cos\alpha=2-\ \ m$，则实数 m 的取值范围是　　(　　)

A　$1\le m\le 9$　　B　$0\le m\le 9$
C　$0\le m\le 1$　　D　$m=1$ 或 $m=9$

9　若 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则 $\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha$ 的大小关系为(　　)

A　$\tan\alpha<\cos\alpha<\sin\alpha$　　B　$\sin\alpha<\tan\alpha<\cos\alpha$
C　$\cos\alpha<\tan\alpha<\sin\alpha$　　D　$\cos\alpha<\sin\alpha<\tan\alpha$

10　已知 $|\cos\theta|=\cos\theta$，$|\tan\theta|=-\tan\theta$，则 $\frac{\theta}{2}$ 的终边在　　(　　)

A　第二、四象限　　B　第一、三象限
C　第一、三象限或 x 轴上　　D　第二、四象限或 x 轴上

11　设点 $P(x,2)$ 是角 α 终边上一点，且满足 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$，则 $x=$________.

12　函数 $y=\ \ \sin x+\ \ -\tan x$ 的定义域为________.

13　若角 α 终边过点 $M(3k,-4k)(k\neq 0)$，则 $4\csc\alpha-3\sec\alpha=$________.

14　已知角 α 的终边经过点 $(3a-9,a+2)$，且 $\cos\alpha\le 0$，$\sin\alpha>0$，则 a 的取值范围是________.

15　已知 $\sin\alpha<0$ 且 $\tan\alpha>0$，(1)求角 α 的集合；(2)求角 $\frac{\alpha}{2}$ 终边所在的象限；(3)试判断 $\tan\frac{\alpha}{2}$，$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$ 的符号.

16　(1)角 α 的终边上一个点 $P(4t,-3t)(t\neq 0)$，求 $2\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值；

(2)已知角 β 的终边在直线 $y=\ \ 3x$ 上，用三角函数定义求 $\sin\beta$ 和 $\cot\beta$ 的值.

综合创新

17　用单位圆证明：若 $a\in\ \ 0,\frac{\pi}{2}$，则有 $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

18　若 θ 在第四象限，试判断 $\sin(\cos\theta)\cdot\cos(\sin\theta)$ 的符号.

19　求下列函数的定义域：

(1) $y=\ \ 2\cos x-1$；(2) $y=\lg(3-4\sin^2 x)$.

20　设 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，求证：$1<\sin\alpha+\cos\alpha\le\ \ 2$.

4.4　同角三角函数的基本关系式

预习导引

问题1：下列命题正确的是　　(　　)

A　存在一个角 α，使 $\sin\alpha=\cos\alpha=0$

B　存在一个角 α，使 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，$\cos\alpha=-\frac{2}{3}$

C　存在一个锐角 α，使 $\sin\alpha+\cos\alpha<1$

D　存在一个角 α，使 $\tan\alpha=0$，$\cos\alpha=-1$

问题2：若 α 是三角形的一个内角，且 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2}{3}$，试判断这个三角形的形状.

问题3：若 $\sin\alpha+\cos\alpha=\ \ 2$，则 $\tan\alpha+\cot\alpha=$______；$\sin\alpha-\cos\alpha=$________.

知能互动

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=$________($\alpha$ 为任意角).

2. $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=$________$(\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z})$.

3. $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=$________$(\alpha\neq\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z})$.

疑难解析

1.同角三角函数的基本关系主要涉及这样两个方面:

(1)平方关系 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$;

(2)商数关系 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$.

需要注意的是:①这是一组同角关系式:如 $\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$,就不一定成立;②利用平方关系在进行开方运算时,要注意结果的符号;③为了解题的需要,有时可将计算式中"1"用"$\sin^2\theta+\cos^2\theta$"代换;④对复杂三角函数式,有时可以考虑"切割化弦".

2.同角三角函数的关系式的基本用途:根据一个角的某一个三角函数值,求出该角的其他三角函数值;化简同角的三角函数式;证明同角的三角恒等式.

(1)三角式的化简变形,除了靠记住正确的公式外,贵在活用,要熟记同角三角函数之间的平方关系、商数关系、倒数关系这三组常用公式.

(2)掌握几类求值题型:给角求值、给值求角、给方程关系求值及化简求值.

(3)运用同角三角函数关系式化简三角函数式,要体会运用公式的技巧及公式的常规变形方向,运用公式的过程就是熟悉公式的过程,反之也会提高三角式变形、化简的熟练程度.

3.在已知一个角的一个三角函数值,求这个角的其他三角函数值时,要注意题设中的角的范围,需要时就不同象限分别求相应的值.

4.在利用同角三角函数的基本关系化简、求值时,要注意用"是否是同角"来区分和选用公式.

探究学习

例 1

已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2}{3}$,求 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ 及 $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$ 的值.

命题意图:考查利用同角三角函数的基本关系求三角函数式的值.

分析　公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 是同角三角函数的基本关系式中最重要的,当看到题目中涉及同角的正弦或余弦关系时,一写要联想、应用.

解:$\because \sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2}{3}$,

两边平方得 $\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{4}{9}$.

$\because \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,

$\therefore$ 可得 $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{5}{18}$.

$\therefore \sin^3\alpha+\cos^3\alpha$

$=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)$

$=\frac{2}{3}(1+\frac{5}{18})=\frac{23}{27}$.

探究:(1)$\sin\alpha+\cos\alpha$,$\sin\alpha\cos\alpha$,$\sin\alpha-\cos\alpha$三个式子中,已知其中一个式子的值,可以求出其余两个式子的值.

(2)此类题目一般采用整体代换的思想.

变式题:若 $\sin\theta-\cos\theta=2$,求 $\tan\theta+\cot\theta$的值.

解:因 $\sin\theta-\cos\theta=2$,所以 $\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=2$.

$\therefore \sin\theta\cdot\cos\theta=-\frac{1}{2}$

于是 $\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=-2$.

例 2

设 $\tan\alpha=2$,(1)求 $\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$的值;

(2)求 $2\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha+5\cos^2\alpha$的值.

命题意图:考查利用同角三角函数的基本关系式求三角函数式的值.

分析　考查关于正弦、余弦的齐次式,齐次分式,形如 $y=a\sin\theta+b\cos\theta$,$y=a\sin^2\theta+b\sin\theta\cdot\cos\theta+c\cdot\cos^2\theta$,$y=\frac{a\sin\theta+b\cos\theta}{a'\sin\theta+b'\cos\theta}$等,如果 $\tan\theta=m(m\neq0)$,可用下述方法求值,分子分母分别除以 $\cos\theta$或 $\cos^2\theta$得到关于 $\tan\theta$的表达式,而求值.

解:(1)因为$\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$,

由已知 $\tan\alpha=2\neq0$ 知 $\cos\alpha\neq0$,对(1)式分子分母同除以 $\cos^2\alpha$,

得(1)式 $\frac{\tan^2\alpha+1+2\tan\alpha}{\tan^2\alpha-1}$

$=\frac{4+1+4}{4-1}=\frac{9}{3}=3$.

(2)$\because \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,

$\therefore 2\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha+5\cos^2\alpha$

$=\frac{2\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha+5\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\frac{2\tan^2\alpha-3\tan\alpha+5}{\tan^2\alpha+1}$

$=\frac{2\times4-3\times2+5}{4+1}$

$=\frac{7}{5}$.

探究:对于只含有正弦、余弦函数的齐次式,在求解时常常转化为只含有正切的式子这种变形技巧十分重要,复习时应注意掌握.

变式题:已知 $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$,求下列各式的值:

(1) $\frac{2\cos\alpha+3\sin\alpha}{3\cos\alpha+\sin\alpha}$;(2) $2\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha$.

解:(1)$\because\cos\alpha\neq0$,

$\therefore$原式 $=\frac{2+3\tan\alpha}{3+\tan\alpha}=\frac{2+3\times(-\frac{4}{3})}{3+(-\frac{4}{3})}=-\frac{6}{5}$.

(2)原式 $=\frac{2\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\frac{2\tan^2\alpha+\tan\alpha-3}{\tan^2\alpha+1}$

$=\frac{2\times(-\frac{4}{3})^2-\frac{4}{3}-3}{(-\frac{4}{3})^2+1}$

$=-\frac{7}{25}$.

例 3

已知 α 是三角形的内角,且 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$,求 $\tan\alpha$ 的值.

命题意图:考查利用同角三角函数的基本关系求三角函数的值

分析　不仅要注意同角公式的应用,关键还要注意角的范围对三角函数值的影响.

解法 1:$\because(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{1}{25}$,$\therefore\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{12}{25}<0$.

又 $0°<\alpha<180°$,$\therefore90°<\alpha<180°$,$\therefore\sin\alpha>0$,$\cos\alpha<0$,$\sin\alpha-\cos\alpha>0$.

$\therefore(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{49}{25}$,$\therefore\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{5}$,

$\therefore\sin\alpha=\frac{4}{5}$,$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$,

$\therefore\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{3}$.

解法 2:由解法 1 可得 $\sin\alpha>0$,$\cos\alpha<0$,$\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{12}{25}$.

$\therefore\sin\alpha$,$\cos\alpha$ 为方程 $x^2-\frac{1}{5}x-\frac{12}{25}=0$ 的两个根,

$\therefore\sin\alpha=\frac{4}{5}$,$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$,$\therefore\tan\alpha=-\frac{4}{3}$.

解法 3:由解法 1,可得 $\sin\alpha>0$,$\cos\alpha<0$.

$\because\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,$\therefore(\frac{1}{5}-\cos\alpha)^2+\cos^2\alpha=1$.

整理得:$25\cos^2\alpha-5\cos\alpha-12=0$,$\therefore\cos\alpha=\frac{4}{5}$(舍去)或 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$,$\therefore\sin\alpha=\frac{4}{5}$,$\therefore\tan\alpha=-\frac{4}{3}$.

解法 4:由解法 1 可知

$\sin\alpha>0$,$\cos\alpha<0$,$\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{12}{25}$.

$\because\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}>0$,$\therefore|\sin\alpha|>|\cos\alpha|$,利用单位圆中的三角函数线可知 $90°<\alpha<135°$,$\therefore\tan\alpha<-1$,

$\therefore\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=-\frac{12}{25}$,左端分子分母同除以 $\cos^2\alpha$,得 $\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{12}{25}$,$\therefore\tan\alpha=-\frac{3}{4}$(舍去)或 $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$.

探究:(1)本题主要是利用公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 和已知条件去求解 $\sin\alpha$,$\cos\alpha$,解法 4 还用到公式 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,渗透数学中的方程思想.

(2)对于三角求值的题目,一定要注意角的范围.有时要根据所给三角函数值的大小,适当缩小所给角的范围,才能求出准确的值.另外还应注意一题多解,一题多问.

高考链接

(2003 全国,4 分,3 分钟)已知 $\sin\alpha=\cos2\alpha$,$a\in(\frac{\pi}{2},\pi)$,则 $\tan\alpha=$________.

解析　$\because\sin\alpha=\cos2\alpha$,$\therefore\sin\alpha=1-2\sin^2\alpha$.

$\therefore2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1=0$.$\therefore\sin\alpha=\frac{1}{2}$或 $\sin\alpha=-1$.

$\because\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$,$\therefore\sin\alpha=\frac{1}{2}$,$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.$\therefore\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

答案　$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

达标训练

基础过关

1　已知 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$,$\alpha\in(0,\pi)$,则 $\tan\alpha=$　(　　)

A　$\frac{4}{3}$　　B　$-\frac{4}{3}$　　C　$\pm\frac{4}{3}$　　D　$\pm\frac{3}{4}$

2　已知 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{8}$且 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$,则 $\cos\alpha-\sin\alpha$ 的值等于　(　　)

A　$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B　$\frac{3}{4}$　　C　$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D　$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

3　化简 $\sin^4\beta+\cos^2\beta+\sin^2\beta\cdot\cos^2\beta$ 的结果是(　　)

A　$\frac{1}{4}$　　B　$\frac{1}{2}$　　C　1　　D　$\frac{3}{2}$

4　若 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$,则 $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}+\frac{\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{1-\cos^2\alpha}=$________.

5　若 $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2\sin\alpha-\cos\alpha}=2$,则 $\tan\alpha=$________.

6 求证:$\dfrac{1+2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$.

拓展训练

7 已知 α是第三象限角,化简 $\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}-\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$为　　(　　)

A　$-2\tan\alpha$　B　$2\tan\alpha$　C　$2\cot\alpha$　D　$-2\cot\alpha$

8 已知$\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{1}{2}$,则$\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha-1}$的值是　　(　　)

A　$\dfrac{1}{2}$　B　$-\dfrac{1}{2}$　C　2　D　-2

9 如果角 θ满足条件 $\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{k-3}{k+5}\\ \cos\theta=\dfrac{4-2k}{k+5}\end{cases}$,则 θ是　　(　　)

A　第二象限角　B　第二或第四象限角

C　第四象限角　D　第一或第三象限角

10已知 $a\in(0,1)$, x 是三角形的一个角, $\tan x=\dfrac{2a}{a^2-1}$,则 $\cos x$ 的值是　　(　　)

A　$\dfrac{2a}{a^2+1}$　B　$\dfrac{1-a^2}{a^2+1}$　C　$\dfrac{a^2-1}{a^2+1}$　D　$\pm\dfrac{a^2-1}{a^2+1}$

11化简:$\dfrac{1-2\sin 10°\cos 10°}{\sin 10°-\quad 1-\sin^2 10°}=$________.

12已知 $\tan\theta=-\dfrac{1}{2}$,则$\dfrac{\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta}{4\cos^2\theta-3\sin^2\theta+1}$的值为________.

13满足 $\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}=\tan\alpha-\sec\alpha$的 α范围是________.

14若 $\beta\in[0,2\pi)$, 且 $\quad 1-\cos^2\beta+\quad 1-\sin^2\beta=\sin\beta-\cos\beta$,则 β的取值范围是________.

15求证 $\cos\alpha(2\sec\alpha+\tan\alpha)(\sec\alpha-2\tan\alpha)=2\cos\alpha-3\tan\alpha$.

16已知 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$,求:(1) $\sin\theta\cdot\cos\theta$;(2) $\sin^3\theta-\cos^3\theta$;(3) $\sin^4\theta+\cos^4\theta$的值.

综合创新

17已知 $\sin\alpha+3\cos\alpha=0$,求:

(1) $\dfrac{3\cos\alpha-\sin\alpha}{3\cos\alpha+\sin\alpha}$;　(2) $2\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha+2$ 的值.

18当 $\sin\theta+\sin^2\theta=1$ 时,求 $\cos^2\theta+\cos^6\theta$的值.

19已知 $\sin^3\theta+\cos^3\theta=1$, 求 $\sin\theta+\cos\theta$ 的值和 $\sin^4\theta+\cos^4\theta$的值.

20已知关于 x 的方程 $2x^2-(\quad 3+1)x+m=0$ 的两根为 $\sin\theta$和 $\cos\theta$, $\theta\in(0,2\pi)$,求:

(1) $\dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta}$的值;

(2) m 的值;

(3)方程的两根及此时 θ的值.

4.5　正弦、余弦的诱导公式

预习导引

问题 1: n 为整数,化简$\dfrac{\sin(n\pi+\alpha)}{\cos(n\pi+\alpha)}$所得结果是　　(　　)

A　$\tan n\alpha$　B　$-\tan n\alpha$　C　$\tan\alpha$　D　$-\tan\alpha$

问题 2:若 $\cos(-100°)=k$,则 $\tan 80°$等于　　(　　)

A　$-\dfrac{1-k^2}{k}$　B　$\dfrac{1-k^2}{k}$

C　$\dfrac{1+k^2}{k}$　D　$-\dfrac{1+k^2}{k}$

问题 3:已 $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$,则下列等式成立的是　　(　　)

A　$f(2\pi-x)=f(x)$　B　$f(2\pi+x)=f(x)$

C　$f(-x)=-f(x)$　D　$f(-x)=f(x)$

知能互动

1 .$\sin(180°+\alpha)=$________, $\cos(180°+\alpha)=$________.

2 .$\sin(-\alpha)=$________, $\cos(-\alpha)=$________.

3 .$\sin(180°-\alpha)=$________, $\cos(180°-\alpha)=$________, $\tan(180°-\alpha)=$________.

4 .$\sin(360°-\alpha)=$________, $\cos(360°-\alpha)=$________.
$\tan(360°-\alpha)=$________, $\cot(360°-\alpha)=$________.

5 .$\sin(k\cdot 360°+\alpha)=$________, $\cos(k\cdot 360°+\alpha)=$________ $(k\in\mathbf{Z})$.

疑难解析

1 .诱导公式可概括如下: $\alpha+k\cdot 360°(k\in\mathbf{Z})$, $-\alpha$, $180°\pm\alpha$, $360°-\alpha$的三角函数值,等于 α的同名函数值,前面加上一个把 a 看成锐角时原函数值的符号,简化成“函数名不变,符号看象限”的口诀.

2 利用诱导公式求任意角的三角函数值的步骤:在求任

意角的三角函数值时一般可按以下步骤：

任意负角的三角函数 $\xrightarrow{\text{用公式三或公式一}}$ 任意正角的三角函数 $\xrightarrow{\text{用公式一}}$ 0 到 360 °的角的三角函数 $\xrightarrow{\text{用公式二或四或五}}$ 锐角三角函数 $\xrightarrow{\text{查表}}$ 求值

3 运用诱导公式解题的本质是多次运用“化归”思想方法，化负角为正角，化 0 到 360 °的角为 0 到 90 °间的角，再求值的过程 .

探究学习

例 1

计算 $\sin 315° - \sin(-480°) + \cos(-330°)$.

命题意图：考查求任意角的三角函数值及诱导公式的应用 .

分析　应利用诱导公式，按照求任意角的三角函数值的一般步骤进行计算 .

解：原式 $= \sin(360° - 45°) + \sin(360° + 120°) + \cos(-360° + 30°)$

$= -\sin 45° + \sin 60° + \cos 30° = \frac{3 - 2 + 1}{2}$.

探究：本题主要是通过诱导公式将一般三角函数问题转化为锐角三角函数问题 .

变式题：求值：$\sin^2 150° + \sin^2 135° + 2\sin 210° + \cos^2 225°$.

解：$\sin^2 150° + \sin^2 135° + 2\sin 210° + \cos^2 225°$

$= \sin^2(180° - 30°) + \sin^2(180° - 45°) + 2\sin(180° + 30°) + \cos^2(180° + 45°)$

$= \sin^2 30° + \sin^2 45° - 2\sin 30° + \cos^2 45°$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

例 2

已知 $\sin(\alpha - 3\pi) = 2\cos(\alpha - 4\pi)$，求 $\frac{\sin(\pi - \alpha) + 5\cos(2\pi - \alpha)}{2\cos(\pi + \alpha) - \sin(-\alpha)}$ 的值 .

命题意图：考查三角函数求值及诱导公式的应用 .

分析　对于含有形如“$k\pi \pm \alpha (k \in \mathbf{Z})$”的三角函数式，应注意使用诱导公式将其化为最简，再进行化简求值 .

解：由条件，可得 $-\sin\alpha = 2\cos\alpha$，

原式 $= \frac{\sin\alpha + 5\cos\alpha}{-2\cos\alpha + \sin\alpha} = \frac{-2\cos\alpha + 5\cos\alpha}{-2\cos\alpha - 2\cos\alpha} = -\frac{3}{4}$.

探究：要重视诱导公式的使用，并能熟练使用各种类型的诱导公式进行化简和计算 .

变式题：已知 $\sin(\pi + \alpha) = \frac{1}{2}$，求 $\sin(2\pi - \alpha) + \cot(\pi - \alpha) \cdot \cos\alpha$ 的值 .

解：$\because \sin(\pi + \alpha) = \frac{1}{2}$，$\therefore -\sin\alpha = \frac{1}{2}$，

$\therefore \sin\alpha = -\frac{1}{2}$.

$\therefore \sin(2\pi - \alpha) + \cot(\pi - \alpha) \cdot \cos\alpha$

$= -\sin\alpha - \cot\alpha \cdot \cos\alpha$

$= -\sin\alpha - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha$

$= -\sin\alpha - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = -\sin\alpha - \frac{1 - \sin^2\alpha}{\sin\alpha}$

$= \frac{1}{2} - \frac{1 - \frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}} = 1$.

例 3

若 $\left|\frac{\tan(\pi + \alpha) \cdot \cot(-\alpha - \pi)}{\cos(\pi - \alpha) \cdot \tan(3\pi - \alpha)}\right| = -\csc(-\alpha - 3\pi)$，求 α 的取值范围 .

命题意图：考查诱导公式及三角函数式的化简 .

分析　应采取逆向思维方法，先应用诱导公式将式子化简，再对比左右两边，得出 α 的取值范围 .

解：将原等式变形为

$\left|\frac{\tan(\pi + \alpha)[-\cot(\pi + \alpha)]}{-\cos\alpha \cdot (-\tan\alpha)}\right| = \frac{1}{\sin(3\pi + \alpha)}$.

即 $\left|\frac{1}{\sin\alpha}\right| = -\frac{1}{\sin\alpha}$.

$\therefore \sin\alpha < 0$，且 $\alpha \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$，故可得

$-\pi + 2k\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 或 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$.

探究：(1)对于此类题目，应注意诱导公式的使用 .

(2)重视约束条件 $\alpha \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$.若无此条件，则将导致 $\tan\alpha$ 无意义 .

高考链接

(2001 全国，5 分，4 分钟) $\tan 300° + \cot 405°$ 的值是 (　　)

A　1 + 3　　　　B　1 - 3

C　- 1 - 3　　　　D　- 1 + 3

解析　$\tan 300° + \cot 405° = \tan(360° - 60°) + \cot(360° + 45°) = -\tan 60° + \cot 45° = 1 - 3$.

答案　B

达标训练

基础过关

1 对于 $\alpha\in\mathbf{R}$,下列等式中恒成立的是 (　　)

A $\sin(2\pi-\alpha)=\sin\alpha$

B $\cos(-\alpha)=-\cos\alpha$

C $\cos(\pi-\alpha)=\cos(2\pi+\alpha)$

D $\tan(\pi+\alpha)=\tan(2\pi+\alpha)$

2 $\sin\ -\frac{19}{6}\pi$ 的值待于 (　　)

A $\frac{1}{2}$　B $-\frac{1}{2}$　C $\frac{3}{2}$　D $-\frac{3}{2}$

3 若 $\sin(\pi+\alpha)=\frac{4}{5}$,且 α 是第四象限的角,则 $\cos(\alpha-2\pi)$ 的值是 (　　)

A $\frac{4}{5}$　B $-\frac{4}{5}$　C $\pm\frac{4}{5}$　D $\frac{3}{5}$

4 适合等式 $|\cos(3\pi-x)|=\cos(\pi-x)$ 的 x 的集合为________.

5 已知 $\tan(\pi+\alpha)=3$,则 $\sin(\pi+\alpha)\cdot\cos(\pi-\alpha)=$________.

6 化简 $\frac{\sin^2(\alpha+\pi)\cdot\cos(\pi+\alpha)\cdot\cot(-\alpha-2\pi)}{\tan(\pi+\alpha)\cdot\cos^3(-\alpha-\pi)}$.

拓展训练

7 设函数 $f(x)=a\sin(\pi x+\alpha)+b\cos(\pi x+\beta)$,其中 a,b,α,β 都是非零实数,且满足 $f(2004)=-1$,则 $f(2005)$ 等于 (　　)

A -1　B 0　C 1　D 2

8 已知 α 是三角形的一个内角,下列各式中不一定正确的是 (　　)

A $\cot\frac{\alpha}{2}>0$　B $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$

C $\cos\alpha>0$　D $\sin\alpha>0$

9 α 和 β 的终边关于 y 轴对称,则下列各式中正确的是 (　　)

A $\sin\alpha=\sin\beta$　B $\cos\alpha=\cos\beta$

C $\tan\alpha=\tan\beta$　D $\cos(2\pi-\alpha)=\cos\beta$

10 函数 $f(x)=\cos\frac{\pi x}{3}(x\in\mathbf{Z})$ 的值域为 (　　)

A $-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1$　B $-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1$

C $-1,-\frac{3}{2},0,\frac{3}{2},1$　D $-1,-\frac{3}{2},\frac{3}{2},1$

11 求值 $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=$________.

12 已知 $f(x)=a\sin x+b\tan x+1$,且满足 $f(5)=7$,则 $f(-5)=$________.

13 化简 $\cos^2 20°+\sin^2 200°+\tan 140°\cot 220°=$________.

14 已知 $A=\frac{\sin(k\pi+\alpha)}{\sin\alpha}+\frac{\cos(k\pi+\alpha)}{\cos\alpha}(k\in\mathbf{Z})$,则 A 值所构成的集合是________.

15 已知 $\sin(\pi-\alpha)-\cos(\pi+\alpha)=\frac{2}{3}$ $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

求值:(1) $\sin\alpha-\cos\alpha$;　(2) $\sin^3(2\pi-\alpha)+\cos^3(2\pi-\alpha)$.

16 化简:$\frac{\sin[(k+1)\pi+\theta]\cdot\cos[(k+1)\pi-\theta]}{\sin(k\pi-\theta)\cdot\cos(k\pi+\theta)}(k\in\mathbf{Z})$.

综合创新

17 已知 A、B、C 为 $\triangle ABC$ 的三个内角,求证:

(1) $\cos(2A+B+C)=-\cos A$;

(2) $\tan\frac{A+B}{4}=-\tan\frac{3\pi+C}{4}$.

18 已知 $\sin\beta=\frac{1}{3}$,$\sin(\alpha+\beta)=1$,求 $\sin(2\alpha+3\beta)$ 的值.

19 设 $f(\theta)=\frac{\sin^2(6\pi+\theta)+\cos\theta-2\cos^3(3\pi+\theta)-3}{2+2\cos^2(\theta-4\pi)-\cos(-\theta)}$,

求 $f\ \frac{\pi}{3}$ 的值.

20 在△ABC中，若 $\sin(2\pi - A) = -2\sin(\pi - B)$，$3\cos A = -2\cos(\pi - B)$，求△$ABC$的三内角．

二　两角和与差的三角函数

4.6　两角和与差的正弦、余弦、正切

第一课时　两角和与差的正弦、余弦

预习导引

问题 1：下列四个命题中的假命题是　　　　　　（　　）

A　存在这样的 α、β 的值，使 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

B　不存在无穷多个 α、β 的值，使 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

C　对于任意的 α、β，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

D　存在这样的 α、β 的值，使 $\cos(\alpha+\beta)\neq\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

问题 2：根据 $C_{\alpha+\beta}$，你能推导出 $C_{\alpha-\beta}$、$S_{\alpha+\beta}$、$S_{\alpha-\beta}$ 吗？写出推导过程，并解决下列问题：

在△ABC中，$\cos A\cos B+\cos A\sin(A+C)+\cos B\sin A+\sin A\sin B=2$，请判断△$ABC$的形状？

问题 3：如图 4-6-1，已知一个长为 4 dm，宽为 3 dm 的长方形木块在桌面上作无滑动的翻滚．被一小木块挡住，使木块与桌面成 α 角（$\cos\alpha=\frac{3}{3}$）．试求面 $ABCD$ 的对角线 AC 转过的角的余弦值．

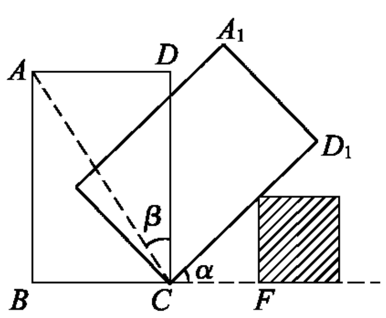


图 4-6-1

知能互动

1．两角和与差的正弦、余弦公式：

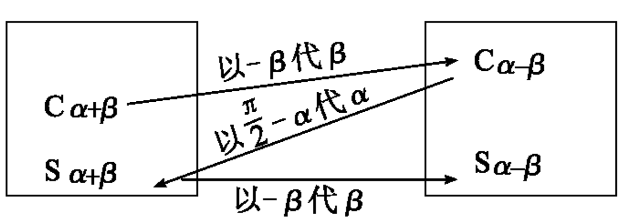
$\cos(\alpha+\beta)=$ ________________　（$C_{\alpha+\beta}$）

$\cos(\alpha-\beta)=$ ________________　（$C_{\alpha-\beta}$）

$\sin(\alpha+\beta)=$ ________________　（$S_{\alpha+\beta}$）

$\sin(\alpha+\beta)=$ ________________　（$S_{\alpha-\beta}$）

2．公式之间的内在联系：



3．应记住的几个公式：

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$ ________，$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$ ________，

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=$ ________，$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=$ ________，

$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=$ ____________，

$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=$ ____________，

$\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=$ ____________．

4．请将 $\sin x - 3\cos x$ 化为一个角的三角函数的形式____________．

$\sin x\pm\cos x$ 化为一个角的三角函数形式是________．

一般地，$a\sin x+b\cos x=$ ________．

疑难解析

一、本节的重点是掌握两角和与差的正弦、余弦公式及推导过程．难点是灵活运用公式，解决求值、化简证明问题，不但要熟练掌握公式的正用，也要熟练掌握公式的逆用及变形使用．例如：

1．不查表求 $\cos 15°+\cos 75°$ 的值．

分析　主要训练公式的正用，关键是将 15°、75°分解成两个特殊角的和与差．而：$15°=45°-30°=60°-45°$，$75°=45°+30°$．

答案　$\frac{6}{2}$

2．求 $\cos 80°\cos 20°+\sin 80°\sin 20°=$ ______________．

答案　$\frac{1}{2}$

3．化简 $\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta=$ __________．

答案　$\cos\alpha$

4．已知 $\sin x-\sin\beta=-\frac{1}{3}$，$\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{2}$，求 $\cos(\alpha-\beta)$．

分析　因 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，而将已知两个等式平方后，即可出现 $\cos\alpha\cos\beta$ 及 $\sin\alpha\sin\beta$，所以平方后相加，问题解决．

答案　$\frac{59}{72}$

以上四个问题，第一题训练公式的正用，第二、三题训练公式的逆用，第四题训练公式的灵活运用．记住公式是必须的，掌握公式的灵活运用是必要的．

二、在运用公式解决问题时，注意角的变换，如：$(\alpha+\beta)-\beta=\alpha$，$(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)=2\alpha$ 等．当 α、β 中有一个角为 90°的整数倍时，用诱导公式较简便．实际上，诱导公式是两角和与差的公式的一个特例．

例如：$\sin(\pi+\alpha)=\sin\pi\cos\alpha+\cos\pi\sin\alpha=0\cdot\cos\alpha+$