

魔法数学同步学与练

——高一(教师用书)

李慧 主编

长征出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

魔法数学同步学与练 . 高一 / 李慧主编 . —北京: 长征出版社, 2004
教师用书

ISBN 7-80015-994-9

. 魔... . 李... . 数学课—高中—教学参考资料 . G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 036429 号

魔 法 数 学 同 步 学 与 练 高 一

主创设计 / 魔法教育发展研究中心
电 话 / 010 - 80602977
网 址 / [http: www.magic365.com](http://www.magic365.com)

出 版 / 长征出版社
(北京市西城区阜外大街 34 号 邮编: 100832)
行销企划 / 北京九恒世纪文化有限公司
(服务热线: 010 - 80602977)
经 销 / 全国新华书店
印 刷 /
开 本 / 880 × 1230 1 / 16
字 数 / 7600 千字
印 张 / 238 印张
版 次 / 2005 年 1 月第 1 版
印 次 / 2005 年 1 月第 1 次印刷
书 号 / ISBN 7-80015-994-9 G · 302
全套定价 / 288.00 元

版权所有 · 侵权必究

第四章

三角函数

一 任意角的三角函数

4.1 角的概念的推广

教学建议

一、需要强调以下几点:

1 要让学生正确理解“ $0^\circ \sim 90^\circ$ 间的角”、“第一象限的角”、“锐角”和“小于 90° 的角”,这里应明确“ $0^\circ \sim 90^\circ$ 间的角”指的是一个前闭后开的区间 $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$;后面三种角的集合可分别表示为

$$\{ \alpha \mid k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z} \}, \{ \alpha \mid 0^\circ < \alpha < 90^\circ \}, \{ \alpha \mid \alpha < 90^\circ \}.$$

2 在让学生掌握角的概念的同时,还要注意几个问题:

(1)终边相同的角与相等的角的区别:终边相同的角不一定相等,相等的角终边一定相同.

(2)象限角、轴上角与区间角的区别.

(3)熟悉角的终边落在“射线上”、“直线上”等角的一般表达式.

(4)已知角 α 所在象限,应熟练地确定 $\frac{\alpha}{2}$ 所在象限:

	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
$\frac{\alpha}{2}$	第一或三象限		第二或四象限	
区域				

3 终边相同的角的集合是 $S = \{ \alpha \mid \alpha = k \cdot 360^\circ + \alpha_0, k \in \mathbf{Z} \}$ 此公式隐含了周期这一数学内容,每当角度增加 360° 或减少 360° 时,角的终边相应按逆时针方向或顺时针方向与角 α_0 的终边分别重合一次.当 k 取一切整数时,就一遍一遍地循环变化着.

可以让学生理解记忆,同时注意求具体的角 α 时,可用赋值法.

二、考查方向:

这部分内容属于三角函数的基础知识,一般不会单

独出题,有可能的是随着任意角的三角函数(包括三角函数的定义、三角函数的符号、直角三角形中锐角的三角函数)一起考查.

预习导引

问题 1: 经过 1 小时 10 分钟,时钟的分针所转的角是多少?

问题 2: 为锐角时, $\frac{\alpha}{2}$ 一定是锐角吗? 为第一象限角时,

$\frac{\alpha}{2}$ 一定是第一象限角吗? 为什么?

问题 3: 设角 α , 满足 $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$,问 $-\frac{\alpha}{2}$ 的范围是多少?

分析

1. 我们规定,按逆时针方向旋转形成的角叫做正角,按顺时针方向旋转形成的角叫做负角.所以本题应为负角.

2. 为锐角时, $\frac{\alpha}{2}$ 一定是锐角.但 α 为第一象限角时, $\frac{\alpha}{2}$ 不一定是第一象限角.

3. 应先求 $-\frac{\alpha}{2}$ 的范围,再求 $+\frac{\alpha}{2}$ 的范围.同时注意 $\alpha < 90^\circ$ 的限制.

答案

1. -420° .

2. 为锐角时, $\frac{\alpha}{2}$ 一定是锐角.为第一象限角时,

$\frac{\alpha}{2}$ 就不一定是第一象限角.因为 α 为第一象限角,则 $k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ (k \in \mathbf{Z})$.

$$k \cdot 180^\circ < \frac{\alpha}{2} < k \cdot 180^\circ + 45^\circ.$$

当 k 为偶数时, $\frac{\alpha}{2}$ 在第一象限;当 k 为奇数时,

一在第三象限.

3. $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$, $-90^\circ < -\alpha < 90^\circ$; 故 $-180^\circ < \alpha + (-\alpha) < 180^\circ$, 又因为 $-\alpha < 0$ 所以 $-\alpha$ 的范围是 $180^\circ < -\alpha < 0^\circ$.

知能互动

1. 我们规定,按逆时针方向旋转形成的角叫_____,按顺时针方向旋转形成的角叫做_____.

2. 如果一条射线没作任何旋转,我们称它形成了一个_____.

3. 我们常在直角坐标系内讨论角,为此使_____与坐标原点重合,角的始边与 x 轴的_____重合,角的终边(除端点外)在第几象限,我们就说这个角是_____.

4. 所有与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,可构成一个集合 $S = \{ \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$,即任一与角 α 终边相同的角,都可以表示成角 α 与_____的和.

5. 终边相同的角_____相等,相等的角的终边_____.

答案

1. 正角;负角 2. 零角 3. 角的顶点;非负半轴;第几象限角 4. $\{ \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$; 整倍周角 5. 不一定;一定相同

疑难解析

1. 掌握角的概念应注意角的三要素:顶点、始边、终边.角可以是任意大小的.

2. 角的分类

角:正角、零角、负角.

角的旋转方向是角分类的标准.

3. 在平面直角坐标系内讨论角

(1) 角的顶点在原点,始边在 x 轴的正半轴上,角的终边在第几象限,就说这个角是第几象限的角(或说这个角属于第几象限) 这里强调以“角的顶点为原点,角的始边为 x 轴的非负半轴”为前提,否则就不能从终边的位置来判断某角属于第几象限.

(2) 若角的终边在坐标轴上,就说这个角不属于任何象限.它叫轴上角.

4. 与角 α 终边相同的角集合

$\{ \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$.

这里应明确:(1) k 是整数;(2) α 是任意角;(3) $k \cdot 360^\circ$ 与 $-\alpha$ 之间是“+”号.如 $k \cdot 360^\circ - 30^\circ$ 应看成 $k \cdot 360^\circ + (-30^\circ)$ ($k \in \mathbf{Z}$);(4) 终边相同的角不一定相等,但相等的角,终边一定相同;(5) 终边相同的角有无数多个,它们相差 360° 的整数倍.

探究学习

例 1

(1) 写出与 -756° 角终边相同的角的集合 M ;

(2) 若 $\alpha \in M$,且 $-720^\circ < \alpha < 360^\circ$,求 α .

命题意图:本题主要考查在 $\alpha + k \cdot 360^\circ$ 中, α 是任意角, $k \in \mathbf{Z}$,并能根据题目要求,求出符合要求的角.

分析 利用与角 α 终边相同的角的集合 $\{ \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$,再根据 k 为整数,求出符合要求的角.

答案 (1) 由题意可得 $M = \{ \alpha = -756^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$.

(2) 因为所求角 α 满足: $-720^\circ < \alpha < 360^\circ$,所以应在 -756° 上加上 360° 的正整数倍,使角变大,在集合 M 中,取 $k = 1, 2, 3$ 可得满足要求的角为 $-396^\circ, -36^\circ, 324^\circ$.

探究:解此类问题,常用的方法是先写出终边相同的角的集合,再通过观察或利用不等式确定整数 k 的值,便可求得答案.若将(2)中的范围改为 $-720^\circ < \alpha < 720^\circ$,那么将会有几个解呢?为什么?

变式题:在 0° 到 360° 范围内,找出与下列各角终边相同的角,并指出它们是哪个象限的角:

(1) $2903^\circ 15'$; (2) $-845^\circ 10'$.

解:(1) 终边与 $2903^\circ 15'$ 相同的角的集合为:

$S = \{ \alpha = k \cdot 360^\circ + 2903^\circ 15', k \in \mathbf{Z} \}$.

当 $k = -8$ 时, $\alpha = 23^\circ 15'$.

故在 0° 到 360° 范围内,终边与 $2903^\circ 15'$ 相同的角是 $23^\circ 15'$,它是第一象限的角.

(2) 终边与 $-845^\circ 10'$ 相同的角的集合为:

$S = \{ \alpha = k \cdot 360^\circ - 845^\circ 10', k \in \mathbf{Z} \}$,

当 $k = 3$ 时, $\alpha = 234^\circ 50'$.

故在 0° 到 360° 范围内,终边与 $-845^\circ 10'$ 相同的角是 $234^\circ 50'$,它是第三象限的角.

例 2

(1) 表示第二象限的角的集合;

(2) 表示与 $45^\circ, 315^\circ$ 终边相同的角的集合,并表示图 4-1-1 中终边在阴影部分的角的集合.

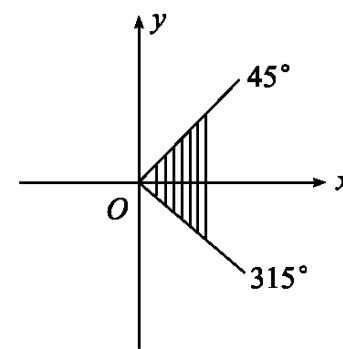


图 4-1-1

命题意图:考查区间角和象限角的概念及表示方法.

分析 注意选择角的集合的表示方法;特别应注意在同一范围中,右端点应大于左端点.

答案 (1) 由题意得,第二象限的角的集合为:

$\{ \alpha | k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$.

(2) 由题意得,与 $45^\circ, 315^\circ$ 终边相同的角的集合分别为:

$S_1 = \{ \alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 45^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$ 和

$S_2 = \{ \alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 315^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$.

终边在阴影部分的角的集合为

$S = \{ \alpha | k \cdot 360^\circ - 45^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 45^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$.

探究:(1)应准确表示终边在坐标轴上的角和各个象限的角的集合.

(2)终边落在阴影部分角的集合也可以表示为 $S = \{ \alpha \mid k \cdot 360^\circ + 315^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 360^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$.但不能表示为 $\{ \alpha \mid k \cdot 360^\circ + 315^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 45^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$ 或 $\{ \alpha \mid -45^\circ < \alpha < 45^\circ \}$.

例 3

若 $\frac{2}{3}$ 是第二象限角,则 $2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ 分别是第几象限的角?

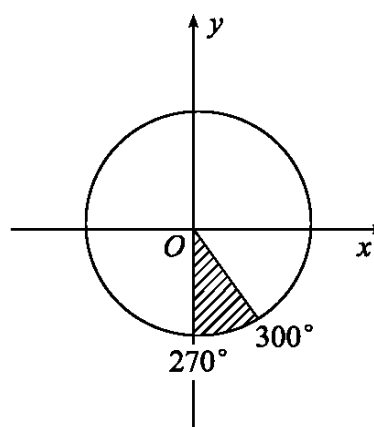
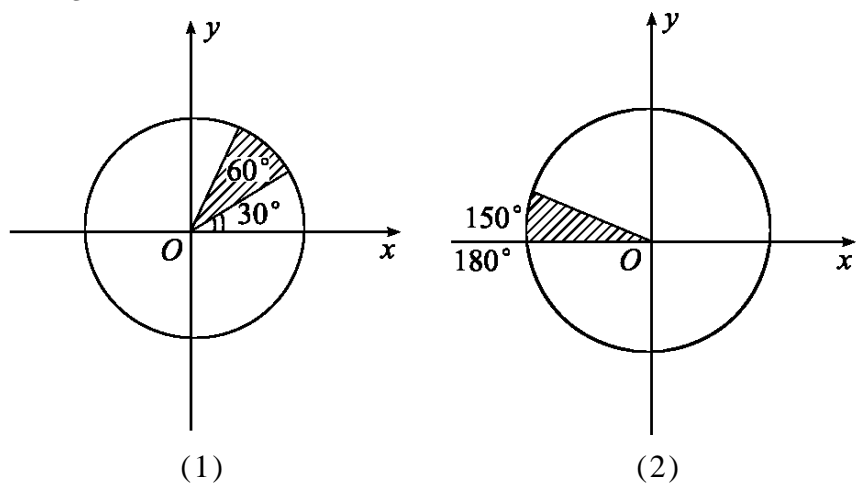
命题意图:主要考查象限角、区间角的表示方法.

分析 由于 $\frac{2}{3}$ 是第二象限角,所以得 $k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \frac{2}{3} < k \cdot 360^\circ + 180^\circ (k \in \mathbf{Z})$.再得出 $2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$,同时注意对整数 k 的讨论.

答案 $\frac{2}{3}$ 是第二象限的角 $k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \frac{2}{3} < k \cdot 360^\circ + 180^\circ (k \in \mathbf{Z})$ 则 $k \cdot 720^\circ + 180^\circ < 2 < k \cdot 720^\circ + 360^\circ$;故 2 是第三或第四象限的角,或角的终边在 y 轴的负半轴上.

$k \cdot 180^\circ + 45^\circ < \frac{1}{2} < k \cdot 180^\circ + 90^\circ (k \in \mathbf{Z})$,当 $k = 2n (n \in \mathbf{Z})$ 时, $n \cdot 360^\circ + 45^\circ < \frac{1}{2} < n \cdot 360^\circ + 90^\circ$; $\frac{1}{2}$ 是第一象限的角,当 $k = 2n + 1 (n \in \mathbf{Z})$ 时, $n \cdot 360^\circ + 225^\circ < \frac{1}{2} < n \cdot 360^\circ + 270^\circ$; $\frac{1}{2}$ 是第三象限的角, $\frac{1}{2}$ 是第一或第三象限的角.

$k \cdot 120^\circ + 30^\circ < \frac{1}{3} < k \cdot 120^\circ + 60^\circ$,当 $k = 3n (n \in \mathbf{Z})$ 时, $n \cdot 360^\circ + 30^\circ < \frac{1}{3} < n \cdot 360^\circ + 60^\circ$; $\frac{1}{3}$ 是第一象限的角;当 $k = 3n + 1 (n \in \mathbf{Z})$ 时 $n \cdot 360^\circ + 150^\circ < \frac{1}{3} < n \cdot 360^\circ + 180^\circ$; $\frac{1}{3}$ 是第二象限的角;当 $k = 3n + 2 (n \in \mathbf{Z})$ 时, $n \cdot 360^\circ + 270^\circ < \frac{1}{3} < n \cdot 360^\circ + 300^\circ$; $\frac{1}{3}$ 是第四象限的角;综上所述 $\frac{1}{3}$ 是第一或第二或第四象限的角,如图 4-1-2 所示:



(3)

图 4-1-2

探究:(1) 为一个象限的角时, $\frac{1}{2}$ 一般应在两个象限,可按 $k = 2n, k = 2n + 1 (k \in \mathbf{Z})$ 对整数 k 进行分类,目的是“凑”出表达式: $n \cdot 360^\circ$.

(2) 讨论形如 $\alpha = \frac{1}{3} + k \cdot 120^\circ (k \in \mathbf{Z})$ 所表示的角所在的象限,可按 $k = 3n, k = 3n + 1, k = 3n + 2 (k \in \mathbf{Z})$ 对整数 k 进行分类,目的也是“凑”出表达式: $n \cdot 360^\circ$.

(3) 应掌握这类题目的求解方法.

变式题:若 $\frac{1}{2}$ 为第三象限角,那么 $-\frac{1}{2}, 2$ 为第几象限的角?

解:因 $\frac{1}{2}$ 为第三象限角,故 $k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \frac{1}{2} < k \cdot 360^\circ + 270^\circ (k \in \mathbf{Z})$.

$$-k \cdot 360^\circ - 270^\circ < -\frac{1}{2} < -k \cdot 360^\circ - 180^\circ (k \in \mathbf{Z}).$$

$-(k+1) \cdot 360^\circ + 90^\circ < -\frac{1}{2} < -(k+1) \cdot 360^\circ + 180^\circ (k \in \mathbf{Z})$.

$-\frac{1}{2}$ 为第二象限角.

因为 $k \cdot 180^\circ + 90^\circ < \frac{1}{2} < k \cdot 180^\circ + 135^\circ$,故当 k 为偶数值, $\frac{1}{2}$ 为第二象限角;当 k 为奇数时, $\frac{1}{2}$ 为第四象限角.

$$\text{因为 } 2k \cdot 360^\circ + 360^\circ < 2 < 2k \cdot 360^\circ + 540^\circ (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{即 } (2k+1) \cdot 360^\circ < 2 < (2k+1) \cdot 360^\circ + 180^\circ (k \in \mathbf{Z}).$$

故 2 的终边在第一、二象限或 y 轴非负半轴上.

所以, 2 为第一、二象限角或 y 轴非负半轴上角.

* 例 4

若 $\alpha = k \cdot 360^\circ - 1575^\circ, k \in \mathbf{Z}$,则角 α 所在象限是 ()

- A 第一象限
- B 第二象限
- C 第三象限
- D 第四象限

解: $\alpha = k \cdot 360^\circ - 1575^\circ = (k-5) \cdot 360^\circ + 225^\circ$,

$k-5 \in \mathbf{Z}$, α 与 225° 的终边相同,即 α 在第三象限.

答案 C

* 例 5

已知角 α 的终边与 30° 角的终边关于直线 $y = x$ 对称,且 $\alpha \in (-1440^\circ, 1440^\circ)$,求 α .

解:由题意可得 $\alpha = k \cdot 360^\circ + 60^\circ, k \in \mathbf{Z}$.

$$\text{又 } -1440^\circ < k \cdot 360^\circ + 60^\circ < 1440^\circ, \text{ 则 } -\frac{13}{6} < k < \frac{11}{6}.$$

$k \in \mathbf{Z}, k = -2, -1, 0, 1$.

故 $\theta = -660^\circ, -300^\circ, 60^\circ, 420^\circ$.

* 例 6

若集合 $A = \{ \theta \mid k \cdot 180^\circ + 30^\circ < \theta < k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$,

集合 $B = \{ \theta \mid k \cdot 360^\circ - 45^\circ < \theta < k \cdot 360^\circ + 45^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$.

求 $A \cap B$.

解: 因为 $A = \{ \theta \mid k \cdot 180^\circ + 30^\circ < \theta < k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$,

故当 k 为偶数时, 即 $k = 2n, n \in \mathbf{Z}$.

$A = \{ \theta \mid n \cdot 360^\circ + 30^\circ < \theta < n \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$.

当 k 为奇数时, 即 $k = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}$.

$A = \{ \theta \mid n \cdot 360^\circ + 210^\circ < \theta < n \cdot 360^\circ + 270^\circ, n \in \mathbf{Z} \}$.

又 $B = \{ \theta \mid k \cdot 360^\circ - 45^\circ < \theta < k \cdot 360^\circ + 45^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$.

所以 $A \cap B = \{ \theta \mid k \cdot 360^\circ + 30^\circ < \theta < k \cdot 360^\circ + 45^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$.

高考链接

(2001 全国, 5 分, 3 分钟) 若 $\sin \theta \cos \theta > 0$, 则 θ 在 ()

- A 第一、二象限 B 第一、三象限
C 第一、四象限 D 第二、四象限

解析 由 $\sin \theta \cos \theta > 0$ 可知, $\sin \theta, \cos \theta$ 同号.

当 $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$ 时, θ 在第一象限.

当 $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$ 时, θ 在第三象限.

因此选 B.

答案 B

达标训练

基础过关

1 下列命题中, 惟一正确的是 ()

- A 终边与始边重合的角为零度角
B 终边在第一象限的角都是锐角
C 小于 90° 的角都是锐角
D 相同的角终边一定相同

答案 D

2 给出下列四个命题: (1) -60° 是第四象限角;
(2) 235° 是第三象限角; (3) 475° 是第二象限角; (4) -315° 是第一象限角. 其中正确的有 ()

- A 1 个 B 2 个 C 3 个 D 4 个

解析 (1) 正确, (2) 正确, (3) $475^\circ = 360^\circ + 115^\circ$ 是第二象限角, (4) $-315^\circ = (-1) \times 360^\circ + 45^\circ$ 是第一象限角.

答案 D

3 与 -460° 终边相同的角可写成 ()

- A $460^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$ B $100^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$
C $260^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$ D $-260^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$

解析 $k = -2$ 时, $260^\circ + k \cdot 360^\circ = -460^\circ$.

答案 C

4 在 -360° 与 360° 之间与 -1840° 终边相同的角是_____.

解析 由于与 -1840° 终边相同的角的集合 $M = \{ \theta \mid \theta = -1840^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$, 再通过观察, 在 M 中求出满足要

求的角为 $-40^\circ, 320^\circ$. 或利用 $k \in \mathbf{Z}$ 求解. 过程为: 由 -360°

$-1840^\circ + k \cdot 360^\circ > -360^\circ$, 求出 $\frac{37}{9} < k < \frac{55}{9}$, 又 $k \in \mathbf{Z}$.

$k = 5, 6$. 故所求角为 $-40^\circ, 320^\circ$.

答案 $-40^\circ, 320^\circ$

5 与 -3920° 终边相同的最小正角是_____.

解析 $-3920^\circ = -11 \times 360^\circ + 40^\circ$, 最小正角为 40° .

答案 40°

6 用集合表示:

(1) 第三象限角的集合;

(2) 终边落在 y 轴右侧的角的集合.

解: (1) 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 中, 第三象限的角范围为 $180^\circ < \theta < 270^\circ$; 而与每个 θ 角终边相同的角可记为 $\theta + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$, 故该范围中每个角适合 $k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \theta < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbf{Z}$, 故第三象限角的集合为 $\{ \theta \mid k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \theta < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$.

(2) 在 $-180^\circ \sim 180^\circ$ 中, y 轴右侧的角可记为 $-90^\circ < \theta < 90^\circ$, 同样把该范围“旋转” $k \cdot 360^\circ$ 后, 得 $-90^\circ + k \cdot 360^\circ < \theta < 90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$, 故 y 轴右侧角的集合为 $\{ \theta \mid k \cdot 360^\circ - 90^\circ < \theta < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$.

拓展训练

7 集合 $M = \{ \theta \mid \theta = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$ 中, 各角的终边都在 ()

- A x 轴正半轴上
B y 轴正半轴上
C x 轴或 y 轴上
D x 轴正半轴或 y 轴正半轴上

解析 若 k 为偶数, 则 θ 终边在 x 轴; 若 k 为奇数, 则 θ 的终边在 y 轴上.

答案 C

8 若 θ 是第一象限角, 则下面各角中第四象限的角是 ()

- A $90^\circ - \theta$ B $90^\circ + \theta$
C $360^\circ - \theta$ D $180^\circ + \theta$

解析 θ 的终边与 $- \theta$ 的终边关于 x 轴对称, 由于 θ 是第一象限角, 故 $- \theta$ 是第四象限角, 又 $360^\circ - \theta$ 的终边与 $- \theta$ 的终边相同, 从而 $360^\circ - \theta$ 是第四象限角.

答案 C

9 下列说法中, 正确的是 ()

- A 第二象限的角是钝角
B 第二象限的角必大于第一象限的角
C -150° 是第二象限的角
D $-252^\circ 16', 467^\circ 44', 1187^\circ 44'$ 是终边相同的角

解析 $467^\circ 44' = 2 \times 360^\circ + (-252^\circ 16')$,
 $1187^\circ 44' = 4 \times 360^\circ + (-252^\circ 16')$.

答案 D

10 已知角 θ 的终边在 x 轴的上方, 那么 $\frac{\theta}{2}$ 是 ()

- A 第一象限角 B 第一、二象限角
C 第一、三象限角 D 第一、四象限角

解析 角的终边在 x 轴的上方,

$$k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z}.$$

$$k \cdot 180^\circ < \frac{\alpha}{2} < k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}.$$

当 $k = 2n (n \in \mathbf{Z})$ 时, $n \cdot 360^\circ < \frac{\alpha}{2} < n \cdot 360^\circ + 90^\circ$, $\frac{\alpha}{2}$ 在第一象限.

当 $k = 2n + 1 (n \in \mathbf{Z})$ 时, $n \cdot 360^\circ + 180^\circ < \frac{\alpha}{2} < n \cdot 360^\circ + 270^\circ$, $\frac{\alpha}{2}$ 在第三象限, 故选 C.

答案 C

11 经过 5 小时又 25 分钟, 时钟的分针旋转_____度.

解析 $= - (5 \times 360^\circ + 150^\circ) = -1950^\circ$.

答案 -1950°

12 若 α 是第一象限的角, 则 $-\frac{\alpha}{2}$ 是第_____象限的角.

解析 α 是第一象限的角,

$$k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ (k \in \mathbf{Z}).$$

$$k \cdot 180^\circ < \frac{\alpha}{2} < k \cdot 180^\circ + 45^\circ (k \in \mathbf{Z}).$$

$$-k \cdot 180^\circ - 45^\circ < -\frac{\alpha}{2} < -k \cdot 180^\circ (k \in \mathbf{Z}).$$

$k \in \mathbf{Z}$, $-k \in \mathbf{Z}$ 故当 $-k$ 为偶数时, $-\frac{\alpha}{2}$ 为第四象限的角; 当 $-k$ 为奇数时, $-\frac{\alpha}{2}$ 为第二象限的角.

答案 二或四

13 若角 α 与角 β 的终边重合, 则 α 与 β 的关系是_____ ; 若角 α 与角 β 的终边在一条直线上, 则 α 与 β 的关系是_____.

答案 $\alpha = \beta + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbf{Z})$; $\alpha = \beta + k \cdot 180^\circ (k \in \mathbf{Z})$.

14 为小于 360° 的正角, 这个角的 7 倍的角的终边与该角终边重合, 则_____.

解析 $7\alpha = k \cdot 360^\circ + \alpha$, $6\alpha = k \cdot 360^\circ (k \in \mathbf{Z})$, $\alpha = 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$.

答案 $60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$

15 已知角 α 的终边与 y 轴的正半轴所夹的角为 30° , 且终边落在第二象限, 又 $-720^\circ < \alpha < 0^\circ$, 求 α .

解: 由题意得 $\alpha = 120^\circ + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbf{Z})$,

又 $-720^\circ < \alpha < 0^\circ$, $\alpha = -240^\circ, -600^\circ$.

16 写出终边在直线 $y = x$ 上的角的集合.

解: 终边在直线 $y = x$ 上且在 0° 到 360° 之间的角有 2 个: 45° 与 225° , 故终边在 $y = x$ 上的角的集合为:

$$\{ \alpha \mid \alpha = k \cdot 360^\circ + 45^\circ, k \in \mathbf{Z} \} \cup \{ \alpha \mid \alpha = k \cdot 360^\circ + 225^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$$

$$= \{ \alpha \mid \alpha = 2k \cdot 180^\circ + 45^\circ, k \in \mathbf{Z} \} \cup \{ \alpha \mid \alpha = (2k + 1) \cdot 180^\circ + 45^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$$

$$= \{ \alpha \mid \alpha = k \cdot 180^\circ + 45^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$$

综合创新

17 已知角 α 是第三象限的角, 问: $\frac{\alpha}{3}$ 可能是哪几个象限的角?

解: 因为 α 是第三象限的角,

所以 $k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 270^\circ (k \in \mathbf{Z})$.

$$k \cdot 120^\circ + 60^\circ < \frac{\alpha}{3} < k \cdot 120^\circ + 90^\circ (k \in \mathbf{Z}).$$

当 $k = 3m (m \in \mathbf{Z})$ 时, $m \cdot 360^\circ + 60^\circ < \frac{\alpha}{3} < m \cdot 360^\circ + 90^\circ$, 故 $\frac{\alpha}{3}$ 是第一象限角.

$$\text{当 } k = 3m + 1 \text{ 时, } m \cdot 360^\circ + 180^\circ < \frac{\alpha}{3} < m \cdot 360^\circ + 210^\circ;$$

故 $\frac{\alpha}{3}$ 是第三象限角.

$$\text{当 } k = 3m + 2 \text{ 时, } m \cdot 360^\circ + 300^\circ < \frac{\alpha}{3} < m \cdot 360^\circ + 330^\circ;$$

故 $\frac{\alpha}{3}$ 是第四象限角. 综上所述, $\frac{\alpha}{3}$ 可能是第一、三、四限的角.

18 若角 α 的终边所在的直线经过点 $Q(-2, 2)$, 并且 $(-360^\circ, 360^\circ)$, 试求角 α .

解: 角 α 的终边所在的直线经过点 $Q(-2, 2)$, 角 α 的集合是 $\{ \alpha \mid \alpha = k \cdot 180^\circ + 135^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$, 其中介于 -360° 与 360° 之间的角有 $-225^\circ, -45^\circ, 135^\circ, 315^\circ$.

19 已知 $180^\circ < \alpha + \beta < 240^\circ$, $-180^\circ < \alpha - \beta < -60^\circ$, 求 $2\alpha - \beta$ 的范围.

解: 令 $m(\alpha + \beta) + n(\alpha - \beta) = 2\alpha - \beta$,

$$\text{即 } (m+n)\alpha + (m-n)\beta = 2\alpha - \beta.$$

$$m+n=2, \quad m=\frac{1}{2},$$

$$m-n=-1, \quad n=\frac{3}{2}.$$

$$\text{于是 } 2\alpha - \beta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{3}{2}(\alpha - \beta).$$

$$\text{由 } 180^\circ < \alpha + \beta < 240^\circ, -180^\circ < \alpha - \beta < -60^\circ,$$

$$\text{得 } 90^\circ < \frac{1}{2}(\alpha + \beta) < 120^\circ, -270^\circ < \frac{3}{2}(\alpha - \beta) < -90^\circ.$$

$$-180^\circ < \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{3}{2}(\alpha - \beta) < 30^\circ,$$

$$\text{即 } -180^\circ < 2\alpha - \beta < 30^\circ.$$

20 如图 4-1-3, 半径为 1 的圆的圆心位于坐标原点, 点 P 从点 $A(1, 0)$ 出发, 依逆时针方向等速沿单位圆周旋转. 已知 P 在 1 s 内转过的角度为 α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$), 经过 2 s 到达第三象限, 经过 14 s 后又恰好回到出发点 A 求 α .

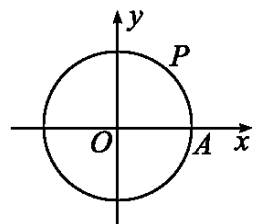


图 4-1-3

分析 P 点重回 A 点的数学语言即 14 的终边与 x 轴的非负半轴重合, 利用 $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ 的范围限制, 可以找到角 α .

解: $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, 且 $k \cdot 360^\circ + 180^\circ < 2\alpha < k \cdot 360^\circ + 270^\circ (k \in \mathbf{Z})$, 则必有 $k=0$, 于是 $90^\circ < 2\alpha < 145^\circ$.

$$\text{又 } 14\alpha = n \cdot 360^\circ (n \in \mathbf{Z}), \quad \alpha = \frac{n \cdot 180^\circ}{7}.$$

从而 $90^\circ < \frac{n \cdot 180^\circ}{7} < 145^\circ; \frac{7}{2} < n < \frac{203}{36}$ 5.6.

$n=4$ 或 5 , 故 $= \frac{720^\circ}{7}$ 或 $= \frac{900^\circ}{7}$.

一、在本节学习中,要求学生能熟悉角的终边落在“射线上”、“直线上”等不同说法,并对以下关系理解记忆.

(1)若角 α 与角 β 适合关系: $\alpha - \beta = (2k) \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$, 则 α 、 β 终边相同.

(2)若角 α 与 β 适合关系: $\alpha - \beta = (2k+1) \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$, 则 α 、 β 终边互为反向延长线.

(3)若角 α 与角 β 适合关系: $\alpha = k \cdot 180^\circ + \beta$, $k \in \mathbf{Z}$, 则 α 、 β 终边在一条直线上.

(4)若角 α 与角 β 的终边关于 x 轴对称, 则 α 与 β 的关系为 $\alpha = k \cdot 360^\circ - \beta$, $k \in \mathbf{Z}$.

(5)若角 α 与角 β 的终边关于 y 轴对称, 则 α 与 β 的关系为 $\alpha = (2k+1)180^\circ - \beta$, $k \in \mathbf{Z}$.

(6)若角 α 与角 β 的终边互相垂直, 则 α 与 β 的关系为 $\alpha = \pm 90^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$.

二、备选题

1. 若角 α 的终边为第一或第三象限的角平分线, 则的集合是_____.

答案: $\{ \alpha \mid \alpha = k \cdot 180^\circ + 45^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$

2. 写出与角 1991° 的终边关于原点对称的最小正角.

解: 因为角 1990° 的终边关于原点对称的角的集合为:

$S = \{ \alpha \mid \alpha = k \cdot 360^\circ + 180^\circ + 1991^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$.

在 S 中找最小正角为 11° .

4.2 弧度制

教学建议

一、需要强调以下几点:

1. 角度制与弧度制的比较

引进弧度制后, 我们将它与角度制进行比较, 应明确: (1) 弧度制是以“弧度”为单位度量角的制度, 角度制是以“度”单位度量角的制度; (2) 1 弧度是等于半径长的圆弧所对的圆心角(或该弧)的大小, 而 1° 是圆的 $\frac{1}{360}$ 所对的圆心角(或该弧)的大小; (3) 不论是以“弧度”还是以“度”为单位的角的大小都是一个与半径大小无关的定值.

2. 用弧度制表示终边相同的角 $2k\pi + \alpha$ ($k \in \mathbf{Z}$) 时, $2k\pi$ 是 α 的偶数倍, 而不是 α 的整数倍.

3. 注意 $\sin 1$ 与 $\sin 1^\circ$ 的区别, 前者表示 1 弧度角对应的正弦值, 而后者则表示 1 度角对应的正弦值.

4. 任一角 α 的弧度的绝对值 $|\alpha| = \frac{l}{R}$, 也就是说, 对于任意角的度量, 其弧度要把符号和绝对值分开求.

5. 在同一角的式子中, 度与弧度不能混合表示. 如 $\alpha = 2^\circ + 30^\circ$ 是不正确的写法.

二、考查方向:

这部分内容属于三角函数的基础知识, 一般不会单独出题, 有可能的是随着任意角的三角函数一起考查.

预习导引

问题 1: 将分针拨快 10 分钟, 分针转过的弧度数是多少?

问题 2: 在直径为 10 cm 的轮上有一条长为 6 cm 的弦, P 是该弦的中点, 轮子以 5 弧度/秒的角速度旋转, 经过 5 秒钟后点 P 转过的弧长是多少?

问题 3: 自行车大链轮有 48 个齿, 小链轮有 20 个齿, 当大链轮转过一周时, 小链轮转过的角度是多少度? 多少弧度?

分析

1. $\frac{10}{60} \cdot 2\pi = \frac{1}{3}\pi$, 这里需注意旋转的方向: 拨慢则分针按逆时针方向旋转, 为正方向; 若拨快, 则旋转方向为负方向.

2. 由平面几何知识, 易得该弦的弦心距为 $5^2 - 3^2 = 4$ (cm), 点 P 转过的角度为 $5 \times 5 = 25$ (弧度), 点 P 转过的弧长为 $4 \times 25 = 100$ (cm).

3. 因为大链轮与小链轮在同一时间内转过的齿数相同, 所以两轮转过的圈数之比等于它们齿数的反比.

于是 $\frac{\text{大轮转过的圈数}}{\text{小轮转过的圈数}} = \frac{20}{48}$, 因此, 大轮转一周, 小轮转 2.4 周. 所以转过的角度为 $2.4 \times 360^\circ = 864^\circ$; 即 $\frac{1}{180} \times 864 = \frac{24}{5}$ 弧度.

答案

- $-\frac{1}{3}\pi$.
- 100 cm.
- $864^\circ; \frac{24}{5}$ 弧度.

知能互动

1. 我们规定周角的 $\frac{1}{360}$ 为 1 度的角, 这种用度作单位来度量角的单位制叫做 _____. 角的另一种度量方法——弧度制, 把 _____ 叫做 1 弧度的角.

2. 正角的弧度数是一个 _____, 负角的弧度数是一个 _____, 零角的弧度数是 0; 角 _____ 的弧度数的绝对值 $|\alpha| = \frac{l}{r}$, 其中 l 是以角 _____ 作为圆心角所对弧的长, r 是圆的半径.

3. 1 弧度等于 _____, 1 等于 _____.

4. 分别写出下列角所对的弧度数, $30^\circ; 45^\circ; 60^\circ; 90^\circ; 120^\circ; 135^\circ; 150^\circ; 180^\circ; 270^\circ; 360^\circ$; 所对的弧度数依次为 _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____.

5. 与 _____ 角终边相同的角的集合, 用弧度制可以表示为: _____.

6. 角度制下的弧长公式为 _____, 扇形面积公式为 _____; 弧度制下的弧长公式为 _____, 扇形面积公式

为 _____.

答案

- 角度制; 长度等于半径长的弧所对的圆心角
- 正数; 负数; $\frac{l}{r}$ $3.57.30^\circ(57.18^\circ); \frac{1}{180}(0.01745 \text{ 弧度})$
- $\frac{1}{6}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{5}{6}; \frac{3}{2}; 2$ $5. \{ \alpha | \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \}$
- $l = \frac{n \cdot r}{180}; S = \frac{n \cdot r^2}{360}; l = |\alpha| \cdot r; S = \frac{1}{2} l r$ (或 $\frac{1}{2} |\alpha| \cdot r^2$)

疑难解析

1. (1) 根据定义, 可以得出角度与弧度的互化关系: 角度化为弧度, 只需将角 _____ 乘以 $\frac{1}{180}$; 弧度化为角度, 则只需将 _____ 乘以 180° . (2) 以弧度为单位表示角的大小时, “弧度”两字可以省略不写, 但以度 ($^\circ$) 为单位表示角时, 度 ($^\circ$) 就不能省去. 用弧度为单位表示角时, 常常把弧度数写成多少 _____ 的形式, 如: $45^\circ = \frac{\pi}{4}$. (3) 规定: 正角的弧度数为正数, 负角的弧度数为负数, 零角的弧度数为零.

2. 根据圆心角定理, 对于任何一个圆心角 _____, 所对弧长与半径的比是一个仅与角 _____ 的大小有关的常数. 因此, 弧长等于半径的弧所对的圆心角的大小并不随半径变化而变化, 而是一个大小确定的角, 即为 1 弧度的角.

3. 在弧度制中, 弧长公式 $l = |\alpha| \cdot r$, 扇形面积公式 $S = \frac{1}{2} l \cdot r = \frac{1}{2} |\alpha| \cdot r^2$, 其形式特别简单, 因而使用起来十分方便.

4. 角集合与实数集 \mathbf{R} 之间的一一对应

用弧度制来度量角, 实际上是在角的集合与实数集 \mathbf{R} 之间建立这样的一一对应关系:

每一个角都有唯一的一个实数 (即这个角的弧度数) 与它对应; 反过来, 每一个实数也都有唯一的一个角 (角的弧度数等于这个实数) 与它对应.

于是, 就可以把三角函数看成是以实数为自变量的函数, 它的自变量的意义可以有多种解释, 从而使三角函数的应用更加广泛, 在数学与科学研究中所以普遍采用弧度制, 这是原因之一.

探究学习

例 1

$$\text{集合 } M = \{ x | x = \frac{k}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z} \}, N = \{ x | x = \frac{k}{4} + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \}$$

则 _____ ()

- A $M = N$ B $M \subset N$
C $M \subset N$ D $M \supset N$

命题意图: 考查用弧度制表示终边相同的角的集合.

分析 本题由于是选择题,可以通过特殊值观察来解;也可以对整数 k 进行奇偶性讨论.

解法 1:集合 M 表示的是终边落在四个象限的角平分线上的角的集合,而集合 N 表示的是终边落在坐标轴上或四个象限的角平分线上的角的集合,故选 C.

解法 2:对集合 N ,当 k 为奇数时,即 $k=2n+1, n \in \mathbf{Z}$ 时,
 $x = \frac{(n+1)}{2} + \frac{1}{4}, n \in \mathbf{Z}$,这说明集合 M 为集合 N 的子集;而
 k 为偶数时, $x \in M$, 故选 C.

探究:记住以下表达式对解题有利($n, k \in \mathbf{Z}$):终边在 x 轴上的角: $x = k\pi$; 终边在 y 轴上的角: $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$; 终边在坐标轴上的角: $x = \frac{n\pi}{2}$; 终边在各象限的角平分线上

的角: $x = \frac{n\pi}{2} + \frac{k\pi}{4}$.
 变式题:设集合 $M = \{x | x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{x | x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 M, N 之间的关系是_____.
 解: M, N 均为终边在各象限角平分线上的角的集合,故 $M = N$.
 答案: $M = N$.

例 2

设角 $\alpha_1 = -570^\circ, \alpha_2 = 750^\circ, \alpha_3 = \frac{3}{5}\pi, \alpha_4 = -\frac{7}{3}\pi$.

(1) 将 α_1, α_2 用弧度制表示出来,并指出它们各自所在的象限;

(2) 将 α_1, α_2 用角度制表示出来,并在 $-720^\circ \sim 0^\circ$ 之间找出与它们有相同终边的所有角.

命题意图:本题主要考查角度与弧度的互化.

分析 涉及角度与弧度的互化关系和终边相同角的概念,其基本公式 $360^\circ = 2\pi$ 弧度在解题中起关键作用.

解:(1) $180^\circ = \pi$,
 $-570^\circ = -\frac{570}{180}\pi = -\frac{19}{6}\pi$.

$\alpha_1 = -2 \times 2\pi + \frac{5}{6}\pi$.

同理 $\alpha_2 = 2 \times 2\pi + \frac{\pi}{6}$.

α_1 在第二象限, α_2 在第一象限.

(2) $\frac{3}{5}\pi = \frac{3}{5} \times 180^\circ = 108^\circ$, 设 $\alpha_3 = k \cdot 360^\circ + \alpha_3 (k \in \mathbf{Z})$.

由 $-720^\circ < \alpha_3 < 0^\circ$,

$-720^\circ < k \cdot 360^\circ + 108^\circ < 0^\circ$.

$k = -2$ 或 $k = -1$.

在 $-720^\circ \sim 0^\circ$ 间与 α_3 有相同终边的角是: -612° 和 -252° .

同理 $\alpha_4 = -360^\circ - 60^\circ = -420^\circ$, 且在 $-720^\circ \sim 0^\circ$ 间与 α_4 有相同的终边的角是 -420° 和 -60° .

探究:(1)迅速进行角度与弧度的互化、准确判断角所在的象限是学习三角函数知识的必备基本功.若需要在某一指定范围内求具有某种特性的角,通常可像上例一样化为解不等式去求对应的 k 值.

(2)对于(2),应先写出与 α_1, α_2 终边相同的角的集合,再求解,为什么 $-720^\circ \sim 0^\circ$ 间只有两解?

例 3

已知扇形 AOB 的周长是 6 cm, 该扇形的中心角是 1 弧度, 求该扇形的面积.

命题意图:主要考查弧长公式与扇形的面积公式.

分析 扇形的周长为 $2r + l$ (r 为半径, l 为弧长), 中心角 $|\alpha| = \frac{l}{r}$, 可联立解方程组先求出 r, l , 再用面积公式求解.

解:设扇形的半径 r , 弧长为 l , 则有

$$2r + l = 6,$$

$$\frac{l}{r} = 1.$$

解得 $r = l = 2$,

$$\text{该扇形的面积 } S = \frac{1}{2}lr = 2(\text{cm}^2).$$

探究:注意弧长公式 $l = |\alpha| \cdot r$ 和扇形的面积公式 $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}|\alpha| \cdot r^2$ 的应用.

* 例 4

设角 α 的终边与 $\frac{7}{5}\pi$ 的终边关于 y 轴对称, 且 $\alpha \in (-2\pi, 2\pi)$, 求 α .

解:由题意得 $\alpha = 2k\pi + \frac{7}{5}\pi = 2k\pi - \frac{2}{5}\pi$.

又 $\alpha \in (-2\pi, 2\pi)$, $k = 0, 1$.

故 $\alpha = -\frac{2}{5}\pi$ 或 $\frac{8}{5}\pi$.

* 例 5

若两个角的差为 1° , 它们的和为 1 弧度.

求这两个角的弧度数.

解:设这两个角的弧度数分别为 α, β ($\alpha > \beta$).

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{180},$$

$$\alpha + \beta = 1.$$

$$\text{解得: } \alpha = \frac{180 + \pi}{360}, \beta = \frac{180 - \pi}{360}.$$

高考链接

(2004 辽宁, 5 分, 3 分钟) 若 $\cos \alpha > 0$, 且 $\sin 2\alpha < 0$, 则角 α 的终边所在的象限是 ()

- A 第一象限 B 第二象限
 C 第三象限 D 第四象限

解析 $\cos > 0,$
 $\sin 2 < 0.$

$$2k - \frac{\pi}{2} < < 2k + \frac{\pi}{2},$$

$$2k - < 2 < 2k (k \in \mathbf{Z}).$$

$$2k - \frac{\pi}{2} < < 2k + \frac{\pi}{2},$$

$$k - \frac{\pi}{2} < < k (k \in \mathbf{Z}).$$

当 k 为奇数时, 无公共部分, 当 k 为偶数时, 公共范围是第四象限.

答案 D

达标训练

基础过关

- 1 -330° 的弧度数为 ()
A $-\frac{\pi}{6}$ B $\frac{\pi}{6}$ C $-\frac{5\pi}{3}$ D $-\frac{11\pi}{6}$

解析 $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad},$

$$330^\circ = 330 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{6}.$$

答案 D

- 2 5 弧度的角所在的象限为 ()
A 第一象限 B 第二象限
C 第三象限 D 第四象限

解析 方法 1: $1 \text{ rad} = (\frac{180^\circ}{\pi}),$

$$5 \text{ rad} = 5 \times (\frac{180^\circ}{\pi}) \approx 286.5^\circ = 286^\circ 30'.$$

是第四象限角.

方法 2: $\frac{3}{2} < 5 < 2$. 选 D.

答案 D

- 3 把 -1485° 化成 $+2k$ ($0 < 2 < 2\pi, k \in \mathbf{Z}$) 的形式是 ()

- A $\frac{\pi}{4} - 8$ B $-\frac{7\pi}{4} - 8$
C $-\frac{\pi}{4} - 10$ D $\frac{7\pi}{4} - 10$

解析 因为 $-1485^\circ = -5 \times 360^\circ + 315^\circ = -10\pi + \frac{7\pi}{4}.$

所以选 D.

答案 D

- 4 三角形的三内角之比为 $2:5:8$, 则各角的弧度数分别为_____.

解析 利用三角形内角之和为 $180^\circ = \pi$. 因三内角之比为 $2:5:8$, 所以设三个角分别为 $2x, 5x$ 和 $8x$ (弧度).

$$\text{由内角和定理得 } 2x + 5x + 8x = \pi, \text{ 得 } x = \frac{\pi}{15}.$$

$$\text{三个内角的弧度数分别为 } \frac{2\pi}{15}, \frac{\pi}{3}, \frac{8\pi}{15}.$$

答案 $\frac{2\pi}{15}, \frac{\pi}{3}, \frac{8\pi}{15}.$

- 5 如果 $x = n\pi + \frac{\pi}{4}$ ($n \in \mathbf{Z}$), 则 x 的终边落在第_____

象限, 又可写成集合_____与集合_____的并集.

解析 注意整数 n 的奇偶性讨论.

答案 第一或第三象限, $|\alpha| = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z},$

$$|\alpha| = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$$

- 6 一个半径为 r 的扇形, 若它的周长等于弧所在的半圆的长, 那么扇形的圆心角是多少弧度? 扇形的面积是多少?

解: 设扇形的圆心角为 α , 依题意, 可得 $2r + r\alpha = \pi r,$

$$\alpha = \pi - 2 \text{ (弧度)}, \text{ 扇形的面积 } S = \frac{1}{2}r^2\alpha = \frac{1}{2}r^2(\pi - 2).$$

拓展训练

- 7 若 α 是第四象限角, 则 $-\alpha$ 一定是 ()
A 第一象限角 B 第二象限角
C 第三象限角 D 第四象限角

解析 若 α 是第四象限角, 则

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} < \alpha < 2k\pi, (k \in \mathbf{Z})$$

$$-2k\pi < -\alpha < -2k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

$$-2k\pi < -\alpha < -2k\pi + \frac{3\pi}{2}.$$

$k \in \mathbf{Z}, -\alpha \in k\pi - \frac{\pi}{2}, -\alpha$ 是第三象限角.

答案 C

- 8 若 $M = \{x \mid x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{5}, k \in \mathbf{Z}\}, N = \{x \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\},$

则 $M \cap N =$ ()

- A $-\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}$ B $-\frac{7\pi}{10}, \frac{4\pi}{5}$
C $-\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}, \frac{4\pi}{5}, -\frac{7\pi}{10}$ D $\frac{3\pi}{10}, -\frac{7\pi}{10}$

解析 由题意得 $-\frac{\pi}{2} < \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2},$

$$-\frac{8\pi}{5} < k\pi < \frac{12\pi}{5}.$$

$$\text{又 } k \in \mathbf{Z}, k = -1, 0, 1, 2. \therefore x = -\frac{7\pi}{10}, -\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}, \frac{4\pi}{5}.$$

答案 C

- 9 若 α 和 β 的终边关于 y 轴对称, 则 ()

- A $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
B $\alpha + \beta = 2k\pi + \frac{1}{2}\pi (k \in \mathbf{Z})$
C $\alpha + \beta = 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$
D $\alpha + \beta = (2k+1)\pi (k \in \mathbf{Z})$

解析 α 和 β 的终边关于 y 轴对称,

$$\alpha = 2k\pi + (\pi - \beta), (k \in \mathbf{Z}). \therefore \alpha + \beta = (2k+1)\pi (k \in \mathbf{Z}).$$

答案 D

- 10 设集合 $A = \{x \mid x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\},$ 集合 $B = \{x \mid x = k\pi, k \in \mathbf{Z}\},$ 则 $A \cap B$ 等于 ()

A A B B

C $\{x | x = \frac{2k+1}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$ D

解析 因为当 $k=2n, n \in \mathbf{Z}$ 时, $A=B$; 当 $k=2n+1, n \in \mathbf{Z}$ 时, $A \neq B$. 所以 $A \neq B$.

答案 B

11 已知扇形的圆心角为 α , 半径为 r , 弧长为 l :

(1) 若 $l=3, r=2$, 则 $\alpha = \frac{l}{r}$ (弧度).

(2) 若 $\alpha = 3, r=4$, 则 $l = \alpha r$.

(3) 若 $\alpha = -216^\circ, l=7$, 则 $r = \frac{l}{|\alpha|}$.

(4) 若 $l=7, r=2$, 则 $\alpha = \frac{l}{r}$ (弧度).

解析 (1) $\alpha = \frac{l}{r} = \frac{3}{2}$ (取 $\alpha > 0$).

(2) 由 $l = \alpha r$ 及 $\alpha = 3, r=4, l=12$.

(3) 由 $l = \alpha r$ 及 $\alpha = -216^\circ = -\frac{6}{5}\pi, l=7, r = \frac{35}{6}$.

或由 $l = \frac{|\alpha| r}{180}$ 及 $n = -216^\circ, l=7$, 可得 $r = \frac{35}{6}$.

(4) $\alpha = \frac{l}{r} = \frac{7}{2}$ (取 $\alpha > 0$).

答案 (1) $\frac{3}{2}$ (2) 12 (3) $\frac{35}{6}$ (4) $\frac{7}{2}$

12 圆的弧长等于该圆内接正三角形的边长, 则该弧所对的圆心角的弧度数是_____.

解析 设圆半径为 r , 则内接正三角形边长为 $3r$, 当弧长 $l = 3r$ 时, 其所对圆心角 $\alpha = \frac{l}{r} = 3$.

答案 3

13 若 α 角的终边与 $\frac{8}{5}\alpha$ 角的终边相同, 则在 $[0, 2\pi)$ 上终边与 $\frac{1}{4}\alpha$ 角的终边相同的角是_____.

解析 α 角的终边与 $\frac{8}{5}\alpha$ 角的终边相同,

$$2k\pi + \frac{8}{5}\alpha = k\pi + \frac{2}{5}\alpha + 2m\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

又 $\frac{1}{4}\alpha \in [0, 2\pi)$, 分取 $k=0, 1, 2, 3$, 可得 $\frac{1}{4}\alpha$ 的值分别为: $\frac{2}{5}, \frac{9}{10}, \frac{7}{5}, \frac{19}{10}$.

答案 $\frac{2}{5}, \frac{9}{10}, \frac{7}{5}, \frac{19}{10}$

14 若 $2 < \alpha < 4$, 且 α 与 $-\frac{7}{6}\alpha$ 的角的终边垂直, 则 $\alpha = \frac{7}{3}$ 或 $\frac{10}{3}$.

解析 由题意得 $\alpha - (-\frac{7}{6}\alpha) = \frac{13}{6}\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

又 $2 < \alpha < 4, \alpha = \frac{7}{3}$ 或 $\frac{10}{3}$.

答案 $\frac{7}{3}$ 或 $\frac{10}{3}$

15 已知四边形的四个内角之比是 1:3:5:6, 分别用角度和弧度将这些内角的大小表示出来.

解: 设四边形的四个内角分别是 $x, 3x, 5x, 6x$, 则有 $x + 3x + 5x + 6x = 360^\circ$, 得 $x = 24^\circ$.

用角度制表示, 这四个内角的大小是 $24^\circ, 72^\circ, 120^\circ, 144^\circ$; 若用弧度制表示, 则是 $\frac{2}{15}, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}$.

16 蒸汽机飞轮的直径为 1.2 m, 以 300 周/分的速度作逆时针旋转, 求

(1) 飞轮每一秒转过的弧度数;

(2) 轮轴上一点每一秒所转过的弧长.

解: (1) 因为蒸汽机的飞轮每分钟转 300 周, 故每秒钟应转 $\frac{300}{60} = 5$ 周, 因此飞轮每 1 秒转过的弧度数为 10π .

(2) 由弧长公式 $l = |\alpha| \cdot r = 10\pi \cdot \frac{1.2}{2} = 6\pi$ (m),

轮轴上一点每一秒所转过的弧长为 6π m.

综合创新

17 已知如图 4-2-1, 扇形 AOB 的面积为 4 cm^2 , 周长为 10 cm , 求扇形 AOB 的中心角的弧度和弦 AB 的长.

解: 设 AB 的弧长为 l , 扇形半径为 r ,

$$\begin{cases} l + 2r = 10, \\ \frac{1}{2}lr = 4. \end{cases} \quad \begin{matrix} r=1, & \text{或} & r=4, \\ l=8; & & l=2. \end{matrix}$$

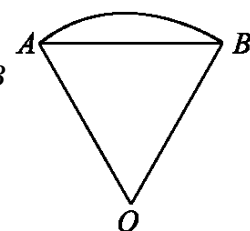


图 4-2-1

设扇形的中心角的弧度数为 α , 则 $\alpha = \frac{l}{r}$.

当 $r=1, l=8$ 时, $\alpha = 8$ ($\alpha = 8 > 2\pi$, 不合题意, 舍去)

当 $r=4, l=2$ 时, 得 $\alpha = \frac{1}{2}$ (弧度)

如图 4-2-2, 在 $\triangle AOB$ 中, 作 AB 边上的高 OC ,

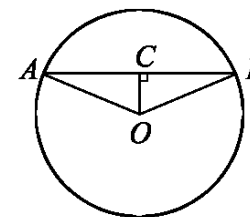


图 4-2-2

则 $AB = 2AC = 2r \sin \frac{\alpha}{2} = 8 \sin \frac{1}{4}$ (cm).

答: 扇形 AOB 的中心角的弧度数为 $\frac{1}{2}$, 弦 AB 的长为 $8 \sin \frac{1}{4}$ cm.

18 设集合 $A = \{\alpha | \alpha = \frac{3}{2}k, k \in \mathbf{Z}\}, B = \{\alpha | \alpha = \frac{5}{3}k, k \in \mathbf{Z}\}$. 求与 $A \cap B$ 中的角的终边相同的角的集合.

分析 先求出 $A \cap B$ 中的元素, 再写出与这些角终边相同的角的集合.

解: 设 $\alpha \in A \cap B$, 则 $\alpha \in A$ 且 $\alpha \in B$,

$$\text{所以 } \alpha = \frac{3}{2}k_1, \alpha = \frac{5}{3}k_2,$$

$$\text{所以 } \frac{3}{2}k_1 = \frac{5}{3}k_2,$$

$$\text{即 } k_1 = \frac{10}{9}k_2.$$

因为 $|k_2| \leq 10, k_2 \in \mathbf{Z}$, 且 $k_1 \in \mathbf{Z}$, 所以 $k_2 = 0, \pm 9$.

因此 $A \cap B = \{0, -15, 15\}$, 故与 $A \cap B$ 中的角的终边相同的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = 2k\pi \text{ 或 } \alpha = (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}\} = \{\alpha | \alpha = n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$.

19 若角 α 的终边与角 $\frac{1}{6}\alpha$ 的终边关于直线 $y=x$ 对称,

且 $(-4, 4)$ 求 .

分析 如图 4-2-3 所示, 如果角 $\frac{\pi}{6}$ 的终边 OA 与 OB 关于直线 $y=x$ 对称, 那么以 OB 为终边且在 0 到 2π 之间的角为 $\frac{\pi}{3}$.

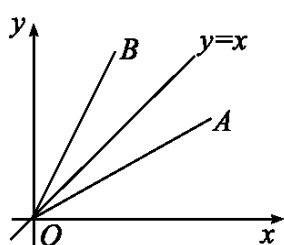


图 4-2-3

解: 设角 $\frac{\pi}{6}$ 的终边为 OA , OA 关于直线 $y=x$ 对称的射线为 OB , 则以 OB 为终边的角的集合为

$$|\alpha| = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}.$$

$$(-4, 4),$$

$$-4 < 2k\pi + \frac{\pi}{3} < 4,$$

$$-\frac{13}{6} < k < \frac{11}{6}.$$

$$k \in \mathbf{Z}, k = -2, -1, 0, 1.$$

$$= \left\{ -\frac{11\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3} \right\}.$$

20 一个扇形的周长为 l , 求扇形的半径、圆心角各取何值时, 此扇形的面积最大.

分析 解答本题, 需灵活运用弧度制下的求弧长和求面积公式. 本题是求扇形面积的最大值, 因此应想法写出面积 S 以半径 r 为自变量的函数表达式, 再用配方法求出半径 r 和已知周长 l 的关系.

解: 设扇形面积为 S , 半径为 r , 圆心角为 α , 则扇形弧长为 $l - 2r$. 所以

$$S = \frac{1}{2}(l - 2r) \cdot r$$

$$= -r^2 + \frac{l}{2}r.$$

$$\text{故当 } r = \frac{l}{4}, \text{ 且 } \alpha = \frac{l - 2 \cdot \frac{l}{4}}{\frac{l}{4}} = 2 \text{ 时, 扇形面积最大.}$$

教学建议

一、需要强调以下几点:

1. 三角函数的值是一个比值, 这个值的大小和点 P 在终边上的位置无关, 而由角 α 的终边位置所决定.

2. 要熟练掌握各个不同象限中三角函数值的符号, 其符号规律为“一正二正弦, 三切四余弦”.

一、解题规律

有了弧度制, 实现了角度集与实数集之间的一一对应, 对应法则是正比例函数 $f(n) = \frac{\pi}{180}n$ (n 为角度集中的元素, $f(n)$ 为实数集中的元素).

用“弧度”与“度”去度量每一个角时, 除了零角以外, 所得到的量数都是不同的, 但它们既然是度量同一个角的结果, 二者就可以相互换算. 我们已经知道若弧是一个整圆, 它的圆心角是周角, 其弧度数是 2π , 而在角度制里它是 360° , 因此 $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$, 即 $180^\circ = \pi \text{ rad}$. 这是一个非常重要的关系式, 应理解并熟记.

二、备选题

1. 在 1 时 15 分时, 时针与分针所成的最小正角是多少弧度?

解: 1 时与 2 时时针的夹角为 $\frac{\pi}{6}$ (弧度), 由于分针指向 15 分, 故分针自 0 分到 15 分走了一圈的 $\frac{1}{4}$, 从而时针也应“同步”走过一份 (即 1 时与 2 时之间的 $\frac{1}{4}$), 即已走过 $\frac{1}{4} \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{24}$ 弧度.

故在 1 时 15 分时, 时针与分针的最小正角为 $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{24} = \frac{7\pi}{24}$ 弧度. 或 $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{24} = \frac{7\pi}{24}$.

2. 一只正常的时钟, 自零点开始到分针与时针再一次重合, 分针所转过的角的弧度数是多少?

解: 设再一次重合时分针转过的弧度数为 α , 则 $\alpha = 12(\alpha - 2\pi)$ (再一次重合时, 时针比分针少转了一周, 且分针的旋转速度是时针的 12 倍), 得 $\alpha = \frac{24\pi}{11}$ (弧度). (若考虑方向, 因为是顺时针方向转动, $\alpha = -\frac{24\pi}{11}$ (弧度)).

4.3 任意角的三角函数

3. 用单位圆中的有向线段分别表示正弦值、余弦值、正切值时, 一定要注意这三条有向线段的书写、方向及位置.

4. 确定三角函数定义域时, 主要应抓住三角函数定义中, 比值的分母不得为零这一制约条件, 当终边落在坐标轴上时, 终边上任一点 $P(x, y)$ 的坐标中, 必有一分量为 0, 故相应有一比值无意义.

二、考查方向:

本节内容属于三角函数中的重要基础知识, 有可能单独考查, 更有可能与其他知识一起综合考查.

预习导引

问题 1: 已知 α 是三角形的内角, 问 $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ 中, 可能取负值的有几个?

问题 2: 已知点 M 在角 α 的终边的反向延长线上, 且 $|OM| = 1$, 则点 M 的坐标是 ()

- A $(\cos \alpha, \sin \alpha)$
- B $(\cos \alpha, -\sin \alpha)$
- C $(-\cos \alpha, \sin \alpha)$
- D $(-\cos \alpha, -\sin \alpha)$

问题 3: 设 α 是第一象限的角, 且 $|\sin \frac{\alpha}{2}| = -\sin \frac{\alpha}{2}$, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 是_____象限的角.

分析

1. 由 α 是三角形的内角可知, $0 < \alpha < \pi$, 所以 $\sin \alpha > 0$, 而当 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ 时, $\cos \alpha < 0$, $\tan \alpha < 0$, $\cot \alpha < 0$, 从而可能取负值的有 3 个.

2. 由题意可知, 点 M 在单位圆上. 设角 α 的终边与单位圆交于点 M , 则 M 与 M 关于原点对称. 又 $M(\cos \alpha, \sin \alpha)$, 所以 $M(-\cos \alpha, -\sin \alpha)$.

3. 因 α 是第一象限的角, 即 $2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, ($k \in \mathbf{Z}$), 所以 $k\pi < \frac{\alpha}{2} < k\pi + \frac{\pi}{4}$, ($k \in \mathbf{Z}$), 从而 $\frac{\alpha}{2}$ 在一、三象限. 又 $|\sin \frac{\alpha}{2}| = -\sin \frac{\alpha}{2}$, $\sin \frac{\alpha}{2} < 0$. 故 $\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限的角.

答案

1. 3 个 2. D 3. 第三

知能互动

1. 设 α 是一个任意角, 的终边上任意一点 P 的坐标是 (x, y) , 它与原点的距离是 $r(r = \sqrt{x^2 + y^2})$, 那么角 α 的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割可以表示为_____、_____、_____、_____、_____、_____.

2. $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ 的定义域是_____. $\tan \alpha$ 的定义域是_____.

3. 正弦值在_____象限为正, 余弦值在_____象限为正, 正切值在_____象限为正.

4. 终边相同的角的_____三角函数的值相等.

答案

- 1. $\frac{y}{r}; \frac{x}{r}; \frac{y}{x}; \frac{x}{y}; \frac{r}{x}; \frac{r}{y}$
- 2. $\mathbf{R}; \{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$
- 3. 一、二; 一、四; 一、三
- 4. 同一

疑难解析

1. 任意角的三角函数定义

设 α 是一个任意大小的角, 角 α 的终边上任意一点 P 的坐标是 (x, y) , 它与原点的距离是 $r(r > 0)$, 那么角 α 的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割分别是:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \cos \alpha = \frac{x}{r}, \tan \alpha = \frac{y}{x}, \cot \alpha = \frac{x}{y}, \sec \alpha = \frac{r}{x},$$

$$\csc \alpha = \frac{r}{y};$$

正弦、余弦、正切、余切、正割、余割分别可看成是从一个角的集合到一个比值的集合的映射, 它们都是以角为自变量, 以比值为函数值的函数, 这六个函数统称为三角函数.

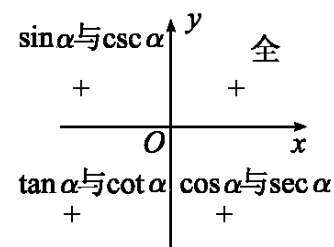
2. 三角函数的定义域

三角函数	\sin	\cos	\tan	\cot	\sec	\csc
定义域	\mathbf{R}	\mathbf{R}	$\{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$	$\{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$	$\{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$	$\{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

注: 确定三角函数的定义域时, 主要应抓住分母为零时比值无意义这一关键, 当且仅当角的终边在坐标轴上时, 点 P 的坐标中必有一个为 0.

3. 三角函数值的符号

各三角函数值在每个象限的符号如图 4-3-1 (各象限注明的函数为正, 其余为负).



4. 三角函数线

设角 α 的终边与以原点为圆心的单位圆交于点 P (图 4-3-2), 则有向线段 MP 、 OM 、 AT 的数量分别等于角 α 的正弦、余弦、正切的值, 分别称为角 α 的正弦线、余弦线、正切线.

当角 α 的终边在 x 轴上时, 正弦线、正切线分别变成一个点; 当角 α 的终边在 y 轴上时, 余弦线变成一点, 正切线不存在.

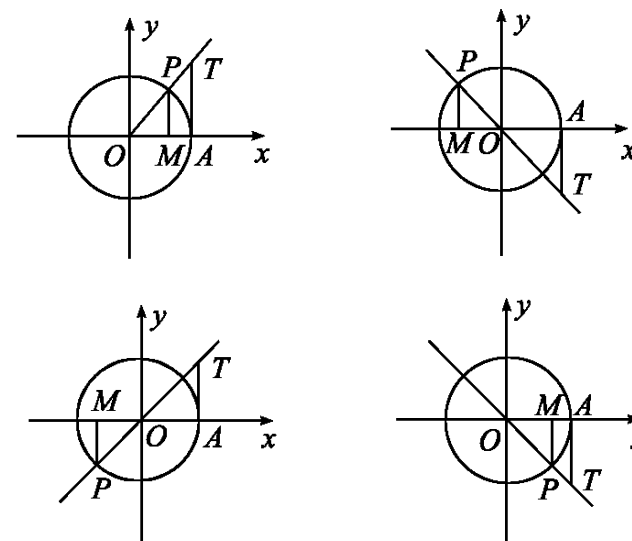


图 4-3-2

5. 根据三角函数的定义可知: (1) 一个角的三角函数值只与这个角的终边位置有关, 即角 α 与 $\alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) 的同名三角函数值相等; (2) $|x| \leq r$, $|y| \leq r$, 故有 $|\sin \alpha| \leq 1$, $|\cos \alpha| \leq 1$, 这是三角函数中最基本的一组不等关系.

探究学习

例 1

若 θ 是第一象限角, 那么 $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$, $\sin \frac{\theta}{2}$, $\cos \frac{\theta}{2}$ 中必定能取正值的有哪些?

命题意图: 本题考查三角函数的符号及象限角等.

分析 若 θ 是第一象限角, 则可得 2θ , $\frac{\theta}{2}$ 的范围, 再根据 2θ , $\frac{\theta}{2}$ 的范围判断其三角函数的符号.

解: θ 是第一象限角,

$$2k\pi < \theta < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

$$k\pi < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad 4k\pi < 2\theta < \pi + 4k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

当 k 为偶数时, $\frac{\theta}{2}$ 为第一象限角, 当 k 为奇数, $\frac{\theta}{2}$ 为第三象限角. 而 2θ 为第一或第二象限角, 或角的终边在 y 轴的正半轴上.

$\sin 2\theta$ 必定正值, 其他的均不一定.

探究: 应熟练掌握各种三角函数的值在各象限的符号. 在具体判断时, 应注意对角的范围的讨论.

例 2

已知角 θ 的终边上有一点 $P(-a, 3a) (a > 0)$, 求 θ 的各三角函数值.

命题意图: 考查三角函数的定义.

分析 已知角 θ 的终边上有一点 P 的坐标, 关键求出 r . 当然应重视字母 a 的范围.

解: $x = -a, y = 3a,$

$$r = \sqrt{(-a)^2 + (3a)^2} = 2a \quad (a > 0).$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{3}{2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = -\frac{1}{2},$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = -3, \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = -\frac{1}{3},$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = -2, \quad \csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{2}{3}.$$

探究: 对字母 a , 应注意它的范围. 如果将 $a > 0$ 改为 $a < 0$, 哪些三角函数的值会变化?

变式题: 已知角 θ 的终边上一点 $P(-15a, 8a)$ ($a \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$), 求 θ 的各三角函数值.

解: $x = -15a, y = 8a,$

$$r = \sqrt{(-15a)^2 + (8a)^2} = 17|a| \quad (a \neq 0).$$

(1) 若 $a > 0$, 则 $r = 17a.$

$$\text{于是 } \sin \theta = \frac{8}{17}, \quad \cos \theta = -\frac{15}{17},$$

$$\tan \theta = -\frac{8}{15}, \quad \cot \theta = -\frac{15}{8},$$

$$\sec \theta = -\frac{17}{15}, \quad \csc \theta = \frac{17}{8}.$$

(2) 若 $a < 0$, 则 $r = -17a$, 于是 $\sin \theta = -\frac{8}{17},$

$$\cos \theta = \frac{15}{17}, \quad \tan \theta = -\frac{8}{15}, \quad \cot \theta = -\frac{15}{8}, \quad \sec \theta = \frac{17}{15},$$

$$\csc \theta = -\frac{17}{8}.$$

例 3

求函数 $y = \frac{|\cos x|}{\cos x} + \frac{\tan x}{|\tan x|}$ 的值域.

命题意图: 考查三角函数的符号及分类讨论的思想.

分析 因角 x 的范围不同, 函数的取值可能不同, 应注意分类讨论.

解: 若角 x 是第一象限角, 则 $y = 2;$

若角 x 是第二象限角, 则 $\cos x < 0$ 且 $\tan x < 0,$

$$y = -2;$$

若角 x 是第三或第四象限角, 则 $\cos x$ 与 $\tan x$ 异号.

$$y = 0.$$

综上, 函数的值域为 $\{-2, 0, 2\}.$

探究: 本题通过对角 x 所在象限的讨论, 进一步掌握三角函数值的符号, 应熟练掌握并可以推广.

变式题: 求函数 $y = \frac{|\sin x|}{\sin x} + \frac{|\cos x|}{\cos x} + \frac{\tan x}{|\tan x|} + \frac{\cot x}{|\cot x|}$ 的值域.

解: 当 x 为第一象限角时, 则 $y = 4.$

当 x 为第二象限角时, 则 $\sin x > 0, \cos x < 0, \tan x < 0, \cot x < 0,$

$$y = -2.$$

当 x 为第三象限角时, 则 $\sin x < 0, \cos x < 0, \tan x > 0, \cot x > 0,$

$$y = 0.$$

当 x 为第四象限角时, 则 $\sin x < 0, \cos x > 0, \tan x < 0, \cot x < 0,$

$$y = -2.$$

因此, 函数的值域为 $\{-2, 0, 4\}.$

* 例 4

求函数 $y = \sin x + \tan x$ 的定义域.

解:由 $\sin x = 0$,
 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$) 得
 $2k\pi < x < 2k\pi + \pi$,
 $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$)
 $2k\pi < x < 2k\pi + \pi$ 且 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$).
 定义域为 $(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}) \cup (2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \pi)$ ($k \in \mathbf{Z}$).

*** 例 5**

若 $\sin \alpha \cdot \tan \alpha < 0$, 试确定 α 所在的象限.

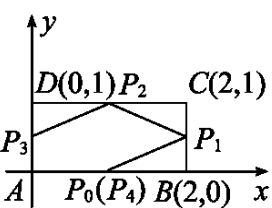
解:由 $\sin \alpha \cdot \tan \alpha < 0$ 知 $\sin \alpha, \tan \alpha$ 异号.

故 $\begin{cases} \sin \alpha > 0, \\ \tan \alpha < 0; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \sin \alpha < 0, \\ \tan \alpha > 0. \end{cases}$

为第二或第三象限的角.

高考链接

1. (2003 全国, 5 分, 5 分钟) 已知长方形的四个顶点 $A(0, 0)$ 、 $B(2, 0)$ 、 $C(2, 1)$ 和 $D(0, 1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 夹角 α 的方向射到 BC 的点 P_1 后, 依次反射到 CD 、 DA 和 AB 上的点 P_2 、 P_3 和 P_4 (入射角等于反射角). 若 P_4 与 P_0 重合, 则 $\tan \alpha$ 等于 ()



- A $\frac{1}{3}$ B $\frac{2}{5}$ C $\frac{1}{2}$ D 1

解析 如图 4-3-3, 因为 P_4 与 P_0 重合, P_1 为 BC 中点, P_2 为 CD 中点, P_3 为 AD 的中点.

$$\tan \alpha = \frac{1}{2}.$$

答案 C

2. (2003 上海春, 5 分, 限时 4 分钟), 已知点 $P(\tan \alpha, \cos \alpha)$ 在第三象限, 则角 α 的终边在第_____象限.

解析 因为点 $P(\tan \alpha, \cos \alpha)$ 在第三象限, 因此有 $\tan \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$, 故角 α 的终边在第二象限.

答案 二

达标训练

基础过关

1 若 $\sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$, 则 α 在 ()

- A 第一、二象限 B 第一、三象限
 C 第二、三象限 D 第二、四象限

解析 因为 $\sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$, $\sin \alpha, \cos \alpha$ 异号. α 在第二、四象限.

答案 D

2 已知角 α 的终边过点 $P(4, -3)$, 则下面各式中正确的是 ()

- A $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ B $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$
 C $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ D $\cot \alpha = -\frac{3}{4}$

解析 $P(4, -3)$, $r=5$. $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$, $\cot \alpha = -\frac{4}{3}$.

答案 C

3 若 MP 和 OM 分别是 $\frac{17}{18}$ 的正弦线和余弦线, 则 ()

- A $MP < OM < 0$ B $OM < 0 < MP$
 C $OM < MP < 0$ D $MP > 0 > OM$

解析 观察单位圆中的三角函数线, 注意角 α 在第二象限, 从而 $MP > 0 > OM$.

答案 D

4 角 α 终边上一点 $P(3a, -4a)$, 其中 $a < 0$, 则 α 的六个三角函数值为_____.

解析 $P(3a, -4a) (a < 0)$, $r = \sqrt{(3a)^2 + (-4a)^2} = 5|a| = -5a$,

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = -\frac{3}{5}, \tan \alpha = -\frac{4}{3}, \cot \alpha = -\frac{3}{4},$$

$$\sec \alpha = -\frac{5}{3}, \csc \alpha = \frac{5}{4}.$$

答案 $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = -\frac{3}{5}, \tan \alpha = -\frac{4}{3}, \cot \alpha = -\frac{3}{4},$

$$\sec \alpha = -\frac{5}{3}, \csc \alpha = \frac{5}{4}.$$

5 已知 $\sin \alpha > 0$ 且 $\tan \alpha < 0$, 则 α 为第_____象限角.

解析 若 $\sin \alpha > 0$ 且 $\tan \alpha < 0$, 则 α 在第二象限.

答案 二

6 已知角 α 的终边在直线 $y = 2x$ 上, 求 α 的六个三角函数值.

解: 先确定终边位置.

(1) 若 α 在第一象限, 在其上任取一点 $P(1, 2)$, $|OP| = 5$, 则

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{2}{5} = \frac{2-5}{5}, \cos \alpha = \frac{1}{5}, \tan \alpha = 2,$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{2}, \sec \alpha = 5, \csc \alpha = \frac{5}{2};$$

(2) 若 α 在第三象限, 在终边上任取一点 $P(-1, -2)$, $|OP| = 5$, 则

$$\sin \alpha = -\frac{2-5}{5}, \cos \alpha = -\frac{1}{5}, \tan \alpha = 2,$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{2}, \sec \alpha = -5, \csc \alpha = -\frac{5}{2}.$$

拓展训练

7 若一个 600° 的角的终边上有一点 $P(-4, a)$, 则 a 的值为 ()

- A $4\sqrt{3}$ B $-4\sqrt{3}$ C $\pm 4\sqrt{3}$ D 3

解析 $\tan 600^\circ = 3$, $\frac{a}{-4} = 3$.

$$a = -4\sqrt{3}.$$

答案 B

8 若 $\cos \theta = 2 - m$, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A $1 < m < 9$ B $0 < m < 9$
C $0 < m < 1$ D $m = 1$ 或 $m = 9$

解析 $|\cos \theta| \leq 1$, $-1 \leq 2 - m \leq 1$, 解得 $1 < m < 9$.

答案 A

9 若 $\frac{1}{4} < \theta < \frac{1}{2}$, 则 $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ 的大小关系为

- ()
A $\tan \theta < \cos \theta < \sin \theta$ B $\sin \theta < \tan \theta < \cos \theta$
C $\cos \theta < \tan \theta < \sin \theta$ D $\cos \theta < \sin \theta < \tan \theta$

解析 利用角 θ 的三角函数线, 即得 $\tan \theta > \sin \theta > \cos \theta$.

答案 D

10 已知 $|\cos \theta| = \cos \theta, |\tan \theta| = -\tan \theta$, 则 $\frac{\theta}{2}$ 的终边在

- ()
A 第二、四象限 B 第一、三象限
C 第一、三象限或 x 轴上 D 第二、四象限或 x 轴上

解析 由 $\cos \theta \geq 0$, 知 $-\frac{\theta}{2} + 2k \leq \frac{\theta}{2} + 2k$; 由

$\tan \theta \leq 0$, 知 $\frac{\theta}{2} + k \leq (k+1)\pi, -\frac{\theta}{2} + 2k \leq 2k\pi$,

$-\frac{\theta}{4} + k \leq \frac{\theta}{2} \leq k (k \in \mathbf{Z})$, 故选 D.

答案 D

11 设点 $P(x, 2)$ 是角 θ 终边上一点, 且满足 $\sin \theta = \frac{2}{3}$, 则 $x =$ _____.

解析 $P(x, 2), r = \sqrt{x^2 + 2^2}$. 又 $\sin \theta = \frac{2}{3}$,

$\frac{2}{\sqrt{x^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}$, 解得 $x = \pm 5$.

答案 ± 5

12 函数 $y = \sin x + \frac{1}{\tan x}$ 的定义域为 _____.

解析 由 $\begin{cases} \sin x > 0, \\ -\tan x > 0. \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \sin x > 0, \\ \tan x < 0. \end{cases}$ 角 x 的终边落在第二象限, 或 x 轴上. 故定义域为

$x | 2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \pi$ 或 $x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

答案 $x | 2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \pi$ 或 $x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

13 若角 θ 终边过点 $M(3k, -4k) (k \neq 0)$, 则 $4\csc \theta - 3\sec \theta =$ _____.

解析 $M(3k, -4k), x = 3k, y = -4k$.

$r = \sqrt{(3k)^2 + (-4k)^2} = 5|k|$, 因 $k \neq 0$,

若 $k > 0$, 则 $r = 5k, \csc \theta = -\frac{5}{4}, \sec \theta = \frac{5}{3}$.

$4\csc \theta - 3\sec \theta = -10$.

若 $k < 0$, 则 $r = -5k, \csc \theta = \frac{5}{4}, \sec \theta = -\frac{5}{3}$.

$4\csc \theta - 3\sec \theta = 10$.

答案 ± 10

14 已知角 θ 的终边经过点 $(3a - 9, a + 2)$, 且 $\cos \theta < 0, \sin \theta > 0$, 则 a 的取值范围是 _____.

解析 由 $\cos \theta = \frac{x}{r} < 0$ 及 $r > 0, x < 0$. 同理由 $\sin \theta > 0$ 知 $y > 0$. 由题意得 $3a - 9 < 0$ 且 $a + 2 > 0$.

$a < 3$ 且 $a > -2$. 即 $-2 < a < 3$.

答案 $(-2, 3)$

15 已知 $\sin \theta < 0$ 且 $\tan \theta > 0$, (1) 求角 θ 的集合; (2) 求角 $\frac{\theta}{2}$ 终边所在的象限; (3) 试判断 $\tan \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}$ 的符号.

解: (1) 由条件知角 θ 是第三象限角,

$2k\pi + \pi < \theta < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$;

(2) 由题意得 $k\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < k\pi + \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$.

故当 k 为偶数时, $\frac{\theta}{2}$ 在第二象限, 当 k 为奇数时, $\frac{\theta}{2}$ 在第四象限. 因此, 角 $\frac{\theta}{2}$ 终边在第二或第四象限;

(3) 由(2)知 $\tan \frac{\theta}{2} < 0, \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} < 0$.

16 (1) 角 θ 的终边上一个点 $P(4t, -3t) (t \neq 0)$, 求 $2\sin \theta + \cos \theta$ 的值;

(2) 已知角 θ 的终边在直线 $y = 3x$ 上, 用三角函数定义求 $\sin \theta$ 和 $\cot \theta$ 的值.

分析 由题目特点, 可考虑利用三角函数的定义求解.

解: (1) 据题意, 有 $x = 4t, y = -3t$, 所以 $r = \sqrt{(4t)^2 + (-3t)^2} = 5|t|$.

当 $t > 0$ 时, $r = 5t, \sin \theta = -\frac{3}{5}$,

$\cos \theta = \frac{4}{5}, 2\sin \theta + \cos \theta = -\frac{6}{5} + \frac{4}{5} = -\frac{2}{5}$;

当 $t < 0$ 时, $r = -5t, \sin \theta = \frac{-3t}{-5t} = \frac{3}{5}$,

$\cos \theta = \frac{4t}{-5t} = -\frac{4}{5}, 2\sin \theta + \cos \theta = \frac{6}{5} - \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$;

(2) 设 $P(a, 3a) (a \neq 0)$ 是角 θ 终边 $y = 3x$ 上一点, 则 $\cot \theta = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$,

若 $a < 0$, 则 θ 是第三象限角, $r = -2a$,

此时 $\sin \theta = \frac{3a}{-2a} = -\frac{3}{2}$;

若 $a > 0$, 则 θ 是第一象限角, $r = 2a$,

此时 $\sin \theta = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2}$.

综合创新

17 用单位圆证明: 若 $a > 0, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, 则有 $\sin \theta < a < \tan \theta$.

解: 如图 4-3-4, 设角 θ 的终边与单位圆交于点 P , 单位圆与 x 轴正半轴的交点为 A , 过点 A 作圆的切线交 OP 的延长线于 T , 过 P 作 $PM \perp OA$ 于 M , 连结 AP . 则

在 $\text{Rt} \triangle MOP$ 中,

$\sin \theta = \frac{MP}{OP} = MP$.