魔法数学同步学与练

——高二（下册）(教师用书)

何锡冰 主编

长征出版社

图书在版编目（CIP）数据

魔法数学同步学与练．高二/ 何锡冰主编．—北京：长征出版社，2004
教师用书
ISBN 7-80015-994-9

Ⅰ．魔…　Ⅱ．何…　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 036427 号

魔法数学同步学与练高二下

主创设计/ 魔法教育发展研究中心
电　　话/ 010 - 80602977
网　　址/ ttp://www.magic365.com

出　　版/ 长征出版社
　　　　（北京市西城区阜外大街 34 号　邮编：100832）
行销企划/ 北京九恒世纪文化有限公司
　　　　（服务热线：010 - 80602977）
经　　销/ 全国新华书店
印　　刷/
开　　本/ 880×1230　1/16
字　　数/ 7600 千字
印　　张/ 238 印张
版　　次/ 2005 年 1 月第 1 版
印　　次/ 2005 年 1 月第 1 次印刷
书　　号/ ISBN 7-80015-994-9/G·302
全套定价/ 288.00 元

第九章
直线、平面、简单几何体

一　空间的直线与平面

9.1　平面的基本性质

教学建议

本节重点是平面的有关概念和基本性质,难点是空间概念的建立,图形、符号、文字三种数学语言的正确应用.

1.平面是不加定义的概念,在教学时要充分联系生活中的实例、实物来加强直观认识.利用平面图形的"有限性"作对照来强调平面的"无限延展性",讲清楚它没有边界、大小、面积等概念,但要指出,平面是没有厚度的.

2.在讲解用平行四边形表示平面时,强调要把它想象成无限延展的,不要认为平面就是平行四边形这么大,也可以用其他的平面图形,如菱形、三角形、角、圆等图形来表示.

3.三个公理和三个推论的教学,要强调它们的重要性和作用.公理1是研究直线和平面的公共点的,可用来检验某个物体的表面是否平整.公理2是研究两个平面的公共点的,用它可证明共点、共线、共面等问题.公理3及其3个推论,是确定平面的依据.在教学中可以举生活中的例子加以说明,要特别强调"有且只有一个平面"的含义.在证明中用到了反证法,要和学生一起总结反证法的证明步骤.

4.要加强图形和符号语言的教学.我们用集合中的符号来表示点、线、面的位置关系,要注意它们的读法.引导学生养成做题时先画图、尽可能用符号表达的习惯.

5.在直观图的教学中,画图的每一步骤都要严格按程序操作,不能敷衍了事.

预习导引

问题1:四条腿的凳子与三条腿的凳子哪种更稳固?

问题2:怎样检查一张桌子的四条腿的下端是否在同一平面内?

问题3:为什么有的自行车后轮旁只安装一只撑脚?

点拨

1. 三条腿的凳子的下端看作不共线的三个点,一定在一个平面内,无论放在哪里都比较稳固;四条腿的凳子的下端应看作四个点,不一定共面,稳固性差一点.

2. 把两根细绳交叉地放在四条腿的下端,拉紧,如果细绳相交,则说明四条腿的下端在同一平面内,否则,就不在同一平面内.这样做的根据是公理3的推论2:两条相交直线确定一个平面.

3. 由公理3知道:不共线的三点确定一个平面.我们把自行车的前后轮看作两个点,因此,只需要在自行车旁安装一只撑脚作为第三个点,由这不共线的三点可以确定一个平面.因此,自行车旁只需安装一只撑脚就可以了.

知能互动

1.在空间中,基本图形有________.

2.画水平平面,通常把平行四边形的锐角画成____,横边画成邻边的2倍.

3.平面通常用____等表示,或平行四边形的________或平行四边形的________表示.

4.一个平面被另一平面遮住时,被遮部分的线段应画成____或____.

5.一条直线的____点在一个平面内,那么这条直线上的____点都在这个平面内.

6.有一个公共点的两个平面相交于____________一条直线.

7.经过________的三点确定一个平面.

8.经过________和直线外________有且只有一个平面.

9.两条________或________的直线确定一个平面.

10.在直观图的斜二测画法中,

(1) $x'O'y'$________,$\angle x'O'z'$________,

$x'O'y'$所确定的平面表示________.

(2)已知图形中平行于x轴、y轴、z轴的线段,在直观图中分别画成________的线段.

(3)已知图形中平行于 x 轴、z 轴的线段,在直观图中长度________;平行于 y 轴的线段,长度________.

> 答案
>
> 1. 点、直线、射线、线段、平面　2. 45°　3. 希腊字母 α,β,γ　四个顶点字母(如平面 $ABCD$)　对角线顶点字母(如平面 AC)　4. 虚线　不画　5. 两个　所有　6. 经过这点　7. 不在同一条直线上　8. 一条直线　一点　9. 相交　平行　10. (1) = 45°或 135°　= 90°　水平平面　(2)平行于 x'轴、y'轴、z'轴　(3)不变　变为原来的一半

疑难解析

1.平面是最基本的几何概念,它是无限延展的,与平面几何中的平面图形是不同的,没有边界、大小和厚薄,没有面积.一个平面把整个空间分成两部分,如果要想从平面的一侧到达平面的另一侧,则必须穿过这个平面.

2.我们无法将一个无限延展的平面画在纸上,但可以选取它的一部分来表示它,并且将它想象成无限延展的.通常画平行四边形表示平面,需要时,可以把它延展开来,如同在平面几何中画直线一样,直线是无限延伸的,但在画直线时却只画出一条线段来表示."通常"两字的意思是根据需要也可用其他平面图形来表示平面,如三角形、矩形、圆等,并不强求千篇一律.

3.本节使用了∈、| 、 、∩等集合符号,在读法上仍可用传统的几何语言.例如,A∈α,读作"点 A 在平面 α内";a　α,读作"直线 a在平面 α内";α∩β= l,读作"平面 α,β交于直线 l".

4.公理 1 是研究直线和平面的关系,反映了平面与曲面的本质区别,通过直线的"直"和"无限延伸"的特性,揭示了平面的"平"和"无限延展"的特性.从集合的角度看,这个公理是说,如果一条直线(点集)中有两个元素(点)属于一个平面(点集),那么这条直线就是这个平面的真子集.用它既可判定直线是否在平面内,又可检验平面.

5.公理 2 是研究平面与平面关系的基础,说明了若两平面相交,必交于一条直线,这是由平面的无限延展性决定的.它是确定两平面交线的依据,即先找两平面的公共点,再作连线.

6.公理 3 及其推论是研究有关确定平面的条件,要透彻理解"有且只有一个"的含义.这里"有"是说图形存在,"只有一个"是说图形惟一.本公理强调的是存在和惟一两方面,不能仅用"只有一个平面"代替"有且只有一个平面",否则就不表达存在性和惟一性了.

7.表示空间图形的平面图形,叫做空间图形的直观图,要把空间图形在平面内画得既富立体感,又能表达出图形各主要部分的位置关系和度量关系.

探究学习

例 1

判断下列命题是否正确,并说明理由.

(1)平面的形状是平行四边形;

(2)任何一个平面图形都是一个平面;

(3)空间图形中先画的是实线,后画的是虚线;

(4)如果平行四边形 $ABCD$ 的面积大于平行四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 的面积,则平面 $ABCD$ 大于平面 $A_1B_1C_1D_1$.

(5)8 个平面重叠起来要比 6 个平面重叠起来厚;

(6)用斜二测画法画水平放置的平面图形的直观图时,由于选轴的不同所画的直观图可能不同.

> 命题意图:熟悉巩固平面的基本概念,增强分析问题、辨别正误的能力.

分析　仔细分析每个命题的条件和结论,与平面的概念和性质认真对照,找出共同点和区别,即可辨明正误.

答案　(1)不正确.平面是无限延展的,我们只是画平行四边形表示平面.

(2)不正确.平面图形和平面是两个完全不同的概念.平面图形是由大小、有面积可以度量的,而平面具有无限延展性,类似于直线可以无限延长,是不可度量的.

(3)不正确.在空间图形中,我们一般是把能够看得见的线画成实线,把被平面遮住看不见的线画成虚线(无论是题中原有的还是后引的辅助线)或者不画.

(4)不正确.平面是无限延展的,不论大小,不计面积.

(5)不正确.平面是没有厚度的.

(6)不正确.图形中线面的位置关系是不变的,所以不论坐标轴怎样选取,直观图都是一样的.

> 探究:对平面的性质要真正理解,牢牢抓住无限延展性这个特点,严格区分"平面图形"和"平面"这两个概念,注意和平面图形性质的区别.

例 2

一条直线与三条平行直线都相交,

求证:这四条直线共面.

> 命题意图:熟悉公理 3 及其推论,掌握线共面的证明方法.

分析　先将已知和求证改写成符号语言.要证明诸线共面,一种方法是先由 a、b确定一个平面,由公理 1 证明 c, l 也在此平面内;另一种方法是先由 a、b确定一个平面,c、l确定另一平面,再证两平面重合.

答案　已知:$a /\!/ b /\!/ c$, $l \cap a = A$, $l \cap b = B$, $l \cap c = C$.

求证:直线 a, b, c, l 共面.

证法 1:∵ $a /\!/ b$,

∴ a、b确定一个平面 α,

∵ $l \cap a = A$, $l \cap b = B$,

∴ A∈α, B∈α,故 l　α.

又∵ $a∥c$,
∴ a、c 确定一个平面β,
同理可证 l　β,
∴α∩β= a 且 α∩β= l,
∵过两条相交直线 a、l 有且只有一个平面,
故 α与β重合 .
即直线 a, b, c, l 共面 .
证法 2: 由证法 1 得 a、b、l 共面 α,
也就是说 b 在 a、l 确定的平面α内,
同理可证 c 在 a、l 确定的平面内 .
∵过 a 和 l 只能确定一个平面,
∴ a, b, c, l 共面 .

> 探究:(1)本题可推广到更一般的情形:若一条直线和一组平行线都相交,则这条直线和该组平行线是共面直线 .
> (2)分别由某些直线(相交直线或平行直线)确定出平面,然后证明这几个平面重合(由公理 3 及其三个推论),也是一种行之有效的证明线共面的方法 .
> (3)解决线共面问题的基本方法是:
> ①由推论 2 及推论 3,直接得出某两条相交或平行直线共面;
> ②先由两个推论确定出平面,然后再由公理 1 证明其余的直线也在这个平面内;
> ③由一部分直线确定一个平面,再由另一部分线确定另一个平面,最后由公理 3 或其推论证明这两个平面重合 .

例 3

已知:如图 9 - 1 - 1,△ABC 在平面α外, $AB∩α= P$, $AC∩α= R$, $BC∩α= Q$,
求证: P、Q、R 三点共线 .

> 命题意图:熟悉公理 2 的应用,掌握点共线问题的证明方法 .

分析　证明 P、Q、R 为平面 ABC 与α的公共点,则由公理 2 可知,它们在两平面的交线上 .

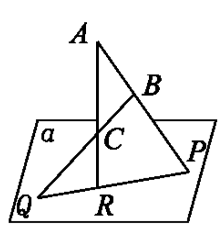


图 9 - 1 - 1

答案　∵ $AB∩α= P$, AB　平面 ABC,
∴ P∈平面 ABC, P ∈α,
∴ P 在平面 ABC 与α的交线上 .
同理可证: Q、R 也在平面 ABC 与α的交线上 .
∴ P、Q、R 三点共线

> 探究:证明空间三点共线通常采用以下方法:
> (1)首先找出两平面的交线,然后证明这三点都是两个平面的公共点,根据公理 2 知,这些点都在交线上 .
> (2)选择其中两点确定一条直线,然后证明另一点在这条直线上 .

例 4

如图 9 - 1 - 2,水平放置的△ABC 的斜二测画法的直观图△$A'B'C'$是边长为 a 的正三角形 .
试求原三角形 ABC 的面积 .

> 命题意图:熟悉直观图的斜二测画法的规则,提高应用能力 .

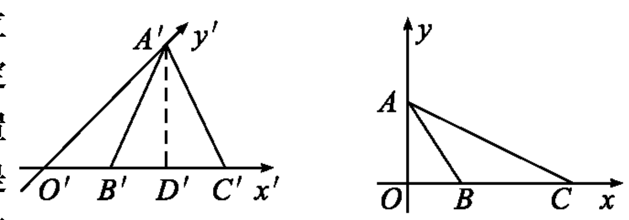


图 9 - 1 - 2

分析　先建立坐标系以便确定点、线的相对位置关系 .△ABC 高是 OA,由斜二测画法的规则知,它是 $O'A'$ 的两倍,三角形的底 BC 等于 $B'C'$.为了求 $O'A'$,先求△$A'B'C'$的高 $A'D'$,在△$A'O'D'$中,由∠$A'O'x'$= 45 即可求得 .

答案　在△$A'B'C'$所在的平面上建立坐标系,
使 x 轴 y 轴成 45 角,使 x 轴 y 轴成 90 角 .
由△$A'B'C'$为正三角形可知:

△$A'B'C'$的高 $A'D'=\frac{3}{2}$,

∴ $O'A'= 2\quad A'D'=\frac{2}{2}a$.

∵在直观图中平行于 y 轴的线段为原线段的一半,
平行于 x 轴的线段与原线段等长,
∴ 在原图中: $OA = 2\ O'A'= 6a$, $BC= B'C'= a$,

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot OA=\frac{6}{2}a$.

> 探究:(1)本题应明确原图形与直观图的线段长度关系 .
> (2)合理地建立坐标系,找到△ABC 的高是解决本题的关键 .

达标训练

基础过关

一、选择题

1　点 P 在平面α内, 直线 a、b 相交于点 P, 下列表示法正确的是　(　　)

A　$a∩b= P$, a　b, b　a
B　$a∩b= P$, $P∈α$
C　$a∪b= P$, $P∈α$

D　$a\cap b=P$, P　α

答案　B

2　下列四个命题:

(1)两个相交平面有不在同一直线上的三个公共点

(2)经过空间任意三个点有且只有一个平面

(3)一个角一定是平面图形

(4)在空间两两相交的直线必共面

其中正确命题的个数是　(　　)

A　1　　B　2

C　3　　D　4

解析　命题(1)是错误的.因为由公理 2 知两平面相交必交于一直线且由公理 3 知两平面有不在同一直线上的三个公共点时,两平面必重合.命题(2)也是错误的.因为由公理 3 知只有经过空间不共线的三点才能仅有一个平面.若三点共线,则经过此三点的平面有无数个.命题(3)是正确的.若角是平角或周角,则此时角为直线或射线,为平面图形;若角不是平角或周角,角的两边必相交,确定一个平面,为平面图形.命题(4)是错误的.两两相交的三直线可能相交于一点,此时三直线未必共面.

答案　C

3　过一条直线和这条直线外不共线的三点,最多可确定　(　　)

A　三个平面　　B　四个平面

C　五三个平面　　D　六个平面

解析　直线和每一个点分别确定一个平面,三个点又确定一个平面.

答案　B

4　两个平面重合的条件是它们的公共部分中有　(　　)

A　三个点　　B　一个点和一条直线

C　无数个点　　D　两条相交直线

解析　A 和 C 中的点如果在一条直线上,则两个平面不一定重合;B 中的点也可以在直线上,不能保证重合.

答案　D

5　已知平面 α 与平面 β 和平面 γ 都相交,则这三个平面可能的交线有　(　　)

A　1 条或 2 条　　B　2 条或 3 条

C　1 条或 3 条　　D　1 条或 2 条或 3 条

解析　当 β 和 γ 相交,α 过交线时,三平面交于一条直线;当 β 和 γ 平行时,交线有 2 条;当 β 和 γ 相交,α 不过交线时,交线有 3 条.

答案　D

6　在空间中,可以确定一个平面的条件是　(　　)

A　两两相交的三条直线

B　三条直线,其中的一条与另外两条直线分别相交

C　三个点

D　三条直线,它们两两相交,但不交于同一点

E　两条直线

解析　A 中两两相交的三条直线,可能交于同一点,此时三条直线不一定在同一平面内;B 中另两条直线不在同一平面内,或三条直线交于同一点,都不能确定一个平面;C 中三个点如果在一条直线上,则可以有无数个平面;E 中两条直线可能不共面,所以只有 D 符合要求.

答案　D

7　下列命题:

①公理 1 可用集合符号叙述为:若 $A\in l$, $B\in l$,且 $A\in\alpha$, $B\in\alpha$,则必有 $l\in\alpha$

②四边形的对角线必交于一点

③用平行四边形表示的平面,以平行四边形的四条边作为平面的边界

④梯形是平面图形

其中正确命题的个数为　(　　)

A　1　　B　2

C　3　　D　4

解析　对于①,注意到直线是点集,平面也是点集,当直线在平面上时,直线是平面的真子集,应表示为 l　α;

对于②,当四边形是平面图形时,命题正确,但当四边形的四个顶点不共面时,两条对角线是不能相交的;

对于③,平面是无限延展的,没有边界;

对于④,梯形的两底是两条平行线,可确定一平面,由于腰的两端点均在此平面上,故腰也在平面上,所以梯形是平面图形.

答案　A

8　一个水平放置的平面图形的斜二测直观图是一个底角为 45°,腰和上底均为 1 的等腰梯形,则这个平面图形的面积等于　(　　)

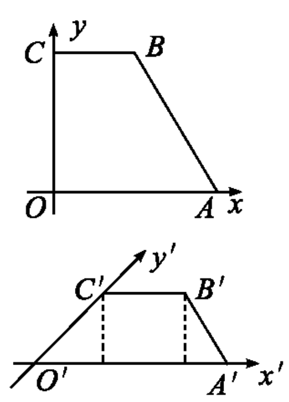


图 9 - 1 - 3

A　$\frac{1}{2}+\frac{2}{2}$

B　$1+\frac{2}{2}$

C　1 +　2

D　2 +　2

解析　在直观图中建坐标系如图 9 - 1 - 3,则在原图中有 $OA\perp OC$,

∴原图形是直角梯形,

高 $OC=2O'C'=2$, $CB=C'B'$,

$OA=O'A'=C'B'+2\cdot\frac{2}{2}\cdot O'C'=1+\ 2$,

由面积公式易求得结果.

答案　D

二、填空题

9　用符号语言表示下列语句:

(1)点 A 在平面 α 内,但在平面 β 外,可表示为________;

(2)直线 a 经过平面 α 外一点 M,可表示为________;

(3)直线 a 在平面 α 内,又在平面 β 内,即平面 α 和平面 β 相交于直线 a,可表示为________.

答案　(1) $A\in\alpha$, $A|$　β

(2) $M\in\alpha$, $M|$　α

(3) a　α,且 a　β,即 $\alpha\cap\beta=a$

10　相等的线段在直观图中________.

解析　如一条线段平行于 x 轴,另一条平行于 y 轴,则在直观

图中它们是两倍关系.

答案　不一定相等

11 空间不共线的四点可确定________个平面?

解析　若空间四个点恰在同一平面上,则只确定1个平面;若空间四个点不共面,则其中任意三个点必不共线(否则这四个点必共面),经过四个点中任意三个点均可确定惟一的一个平面,所以共可确定4个平面.

答案　1或4

12 空间四点A、B、C、D共面但不共线,有下列四个判断:

①必有三点共线;

②必有三点不共线;

③至少有三点不共线;

④不可能有三点共线.

其中正确的判断是序号是________.

解析　若任三点都共线,则四点一定共线,与已知矛盾.

答案　②

13 如图9-1-4,A、B、C、D为不共面的四点,E、F、G、H分别在AB、BC、CD、DA上,

(1)如果$EH\cap FG=P$,那么点P在________上;

(2)如果$EF\cap GH=Q$,那么点Q在________上.

解析　(1)由AB、AD确定平面α,

$\because E$、H在AB、DA上,

$\therefore E\in\alpha$,$H\in\alpha$,

$\therefore$直线EH　α,又$\because EH\cap FG=P$,

$\therefore P\in EH$,　$P\in\alpha$.

设CB、CD确定平面β,

同理可证:$P\in\beta$.

$\therefore P$是平面α、β的公共点,

$\because\alpha\cap\beta=BD$,

$\therefore$点P在直线BD上.

同理可得(2)的结论.

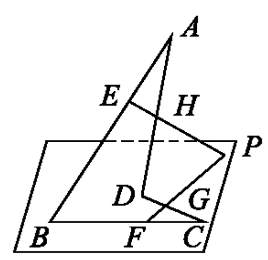


图9-1-4

答案　(1)BD所在的直线;

(2)AC所在的直线.

14 有下面几个命题:

①如果一条线段的中点在一个平面内,那么它的两个端点也在这个平面内;

②两组对边分别相等的四边形是平行四边形;

③两组对边分别平行的四边形是平行四边形;

④四边形有三条边在同一个平面内,则第四条边也在这个平面内;

⑤点A在平面α外,则点A和平面α内的任意一条直线都不共面.

其中正确命题的序号是________.(把你认为正确的命题的序号都填上)

解析　①中,当一条线段与平面相交且中点在平面内,但两个端点可以不在平面内;②中,空间四边形可以两组对边分别相等,但平行四边形一定是平面图形;⑤中,又公理3的推论1可知,点A和任意直线都共面.

答案　③④

三、解答题:

15 将下面用符号语言表示的关系改用文字语言予以叙述,并用图形语言予以表示:

$\alpha\cap\beta=l$, $A\in l$, AB　α, AC　β.

解析　文字语言叙述为:

点A在平面α与平面β的交线l上,AB、AC分别在α、β内.

图形语言表示为:

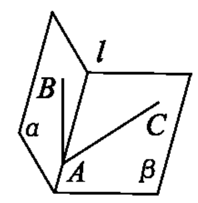


图9-1-5

16 已知:A、B、C、D、E五点,其中A、B、C、D共面,B、C、D、E共面,则A、B、C、D、E一定共面吗?

错解:$\because A$、B、C、D共面,

$\therefore$点A在B、C、D确定的平面内.

$\because B$、C、D、E共面,

$\therefore$点E在B、C、D确定的平面内.

$\therefore$点A、E都在B、C、D确定的平面内,

即点A、B、C、D、E一定共面.

错误分析:上述解法中,由于没有注意到B、C、D三点不一定确定平面,即默认了B、C、D三点一定不共线,因而出错.也即由题设条件B、C、D三点不一定确定平面,因此就使得五点的共面失去了基础.

答案　正解:A、B、C、D、E五点不一定共面.

(1)当B、C、D三点不共线时,

由公理3可知,B、C、D三点确定一个平面α,

由题设知$A\in\alpha$,$E\in\alpha$,

故A、B、C、D、E五点共面于α.

(2)当B、C、D三点共线时,设共线于l,

若$A\in l$,$E\in l$,则A、B、C、D、E五点共面;

若A、E有且只有一个点在l上,

则A、B、C、D、E五点共面;

若A、E都不在l上,

则A、B、C、D、E五点可能不共面.

即当A、E所在的直线与l相交或平行时,

A、B、C、D、E五点共面;否则,五点不共面.

17 已知:空间四点A、B、C、D不在同一平面内,

求证:AB和CD既不平行也不相交.

答案　证明:假设AB和CD平行或相交,

则AB、CD可确定一个平面α,

于是AB　α,CD　α,

可得A、B、C、$D\in\alpha$,

这与已知A、B、C、D不共面矛盾.

因此AB和CD既不平行也不相交.

18 作出下列多边形水平放置的直观图(不写画法).

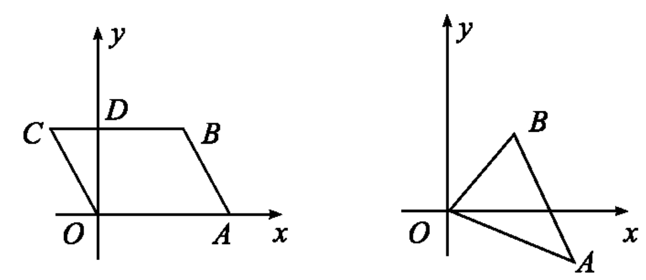


图9-1-6

答案

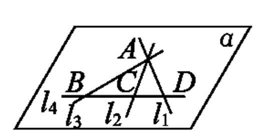


图9-1-8

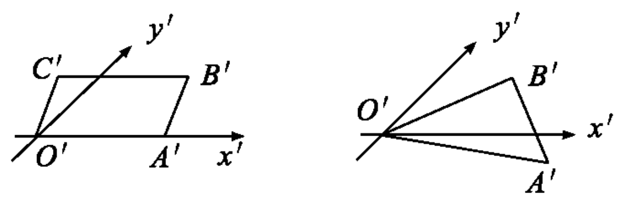


图 9-1-7

19 已知:l_1、l_2、l_3、l_4是两两相交且不共点的四条直线,

求证:l_1、l_2、l_3、l_4共面

答案 证明:情形(1)如图 9-1-8,

设直线 l_1、l_2、l_3交于点 A,l_1、l_2、l_3分别与直线 l_4交于点 D、C、B.

证法 1(归一法):

$\because l_i(i=1,2,3,4)$不交于一点,$A \not\in l_4$,

$\therefore$过 A、l_4确定平面 α,则 B、C、$D\in\alpha$,

由 A、$B\in\alpha$得 l_3 α,同理 l_1、l_2 α,

$\therefore l_1$、l_2、l_3、l_4共面

证法 2(重合法):

$\because l_1\cap l_2=A$,$\therefore$过 l_1、l_2确定平面 α,

又$\because l_3\cap l_4=B$,过 l_3、l_4确定平面 β,

$\because D\in l_1$,$\therefore D\in\alpha$,

又$\because C\in l_2$,$C\in\alpha$,

又 C、$D\in l_4$,

$\therefore l_4\in\alpha$,$\therefore B\in\alpha$.

由 $A\in l_3$可知,α、β为 l_3、l_4确定平面,

$\therefore\alpha$、β重合.

$\therefore l_1$、l_2、l_3、l_4共面

情形(2)如图 9-1-9,

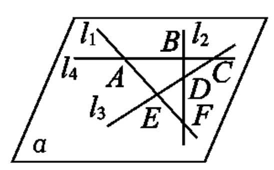


图 9-1-9

设 $l_1\cap l_2=F$,$l_1\cap l_3=E$,

$l_1\cap l_4=A$,$l_2\cap l_3=D$,

$l_2\cap l_4=B$,$l_3\cap l_4=C$.

证法 1:设 l_1、l_2确定平面 α,

则 A、E、$F\in\alpha$,B、$D\in\alpha$,

得 l_4 α,$\therefore C\in\alpha$.

由 C、$D\in\alpha$,$\therefore l_3$ α.

$\therefore l_1$、l_2、l_3、l_4共面

证法 2:设 l_1、l_2确定平面 α,

则 A、B、D、E、$F\in\alpha$,

过 l_2、l_3确定平面 β,

则 B、C、D、E、$F\in\alpha$,

可知 α、β为 B、E、F确定的平面,α、β重合于 α,

由 A、$B\in\alpha$,$\therefore l_4$ α.

$\therefore l_1$、l_2、l_3、l_4共面

知能拓展

20 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,点 E、F分别是棱 AA_1、CC_1的中点,

求证:点 D_1、E、F、B共面

答案 证明:$\because D_1$、E、F三点不共线,

$\therefore D_1$、E、F三点确定一个平面 α.

又由题意可知 D_1E与 DA共面且不平行,

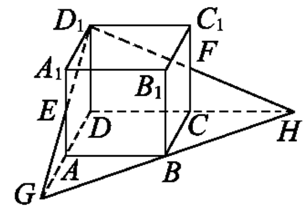


图 9-1-10

故分别延长 D_1E、DA相交于 G,

则 $G\in$直线 D_1E 平面 α.

$\therefore G\in\alpha$.

同理设直线 D_1F与 DC的延长线交于点 H,

则 $H\in$平面 α.

又$\because$点 G、B、H均属于平面 AC,

又 E为 AA_1中点,且 $AE/\!/DD_1$,

$\therefore AG=AD=AB$,$\therefore\angle ABG=45°$.

同理$\angle CBH=45°$,

又$\because\angle ABC=90°$,

$\therefore$点 G、B、H共线于 GH 平面 α,从而点 $B\in\alpha$.

$\therefore$点 D_1、E、F、B四点共面.

21 如图 9-1-11,已知四边形 $ABCD$中,$AB/\!/DC$,AB、BC、CD、DA所在直线分别与平面 α交于 E、G、F、H.

求证:E、H、F、G四点共线.

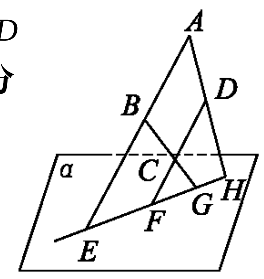


图 9-1-11

答案 证明:$\because AB/\!/DC$,

$\therefore$四边形 $ABCD$是平面图形.

设 $ABCD$确定平面 β.

$\because$点 E、F、G、H分别在直线 AB、CD、BC、AD上,

$\therefore E$、F、G、H都在 β内.

又$\because$点 E、F、G、H都在 α内,

$\therefore E$、F、G、H是 α和 β的公共点,在 α和 β的交线上,

由公理 2,两个平面有且只有一条交线,

$\therefore E$、H、F、G四点共线.

22 已知:如图 9-1-12,$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$对应边平行,且不是全等三角形,

求证:延长 AA_1、BB_1、CC_1后必交于一点.

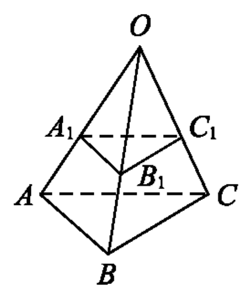


图 9-1-12

答案 证明:由$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$对应边平行,得 $AB/\!/A_1B_1$,

设 AB与 A_1B_1确定平面 α.

$\because$两三角形不全等,$\therefore AB\neq A_1B_1$,

则 AA_1与 BB_1延长交于一点,设为 O.

同理,设 BC与 B_1C_1确定平面 β,

AC与 A_1C_1确定平面 γ,

可知 O在 β与 γ的交线 CC_1上,

$\therefore AA_1$、BB_1、CC_1的延长线交于一点.

综合创新

23 如图 9-1-13,已知直线 a与 b不共面,直线 $c\cap a=M$,直线 $b\cap c=N$,又 $a\cap$平面 $\alpha=A$,$b\cap$平面 $\alpha=B$,$c\cap$平面 $\alpha=C$,

求证:A、B、C三点不共线.

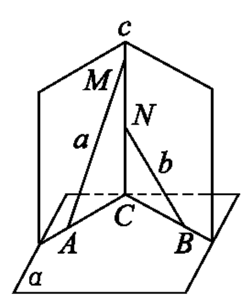


图 9-1-13

答案 证明:假设 A、B、C三点共线,

即都在直线 l上,

$\because A$、B、$C\in\alpha$,$\therefore l$ α.

$\because c\cap$平面 $\alpha=C$,即 $c\cap l=C$,

$\therefore c$与 l确定平面 β.

$\because c \cap a = M, \therefore M \in \beta$, 又 $A \in \beta$,

$\therefore a \quad \beta$.

同理可证 $b \quad \beta$.

∴直线 a、b 共面,

这与已知 a 与 b 不共面矛盾 .

因此, A、B、C 三点不共线 .

24 如图 9 - 1 - 14, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E、F 分别是棱 AB、AA_1 的中点,

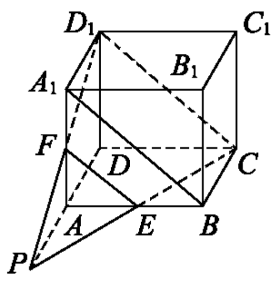


图 9 - 1 - 14

求证: (1) E、C、D_1、F 四点共面;

(2) CE、D_1F、DA 三线共点 .

答案　证明: (1) 分别连结 EF、A_1B、D_1C.

$\because E$、F 分别是棱 AB、AA_1 的中点,

$\therefore EF /\!/ A_1B$ 且 $EF = \frac{1}{2}A_1B$.

又 $\because A_1D_1 /\!/ B_1C_1 /\!/ BC$,

$A_1D_1 = B_1C_1 = BC$,

四边形 A_1D_1CB 是平行四边形,

$\therefore A_1B /\!/ CD_1$,

$\therefore EF /\!/ CD_1$.

∴由推论 3, EF 和 CD_1 确定一个平面,

$\therefore E$、C、D_1、F 四点共面 .

(2) $\because EF /\!/ CD_1$ 且 $EF = \frac{1}{2}CD_1$,

∴直线 D_1F 和 CE 必相交,

设 $D_1F \cap CE = P$.

$\because D_1F \quad$ 平面 AA_1D_1D, $P \in D_1F$,

$\therefore P \in$ 平面 AA_1D_1D.

又 $CE \quad$ 平面 $ABCD$, $P \in EC$,

$\because P \in$ 平面 $ABCD$.

即 P 是平面 $ABCD$ 与平面 AA_1D_1D 的公共点,

而平面 $ABCD \cap$ 平面 $AA_1D_1D = AD$,

$\therefore P \in AD$(公理 2),

$\therefore CE$、D_1F、DA 三线共点 .

(2)的第二种证法如下:

∵在正方体中, F 是棱 AA_1 的中点,

∴直线 D_1F 和 DA 必相交,

设 $D_1F \cap DA = P$.

$\because AF = \frac{1}{2}AA_1 = \frac{1}{2}DD_1$, $AF /\!/ DD_1$,

$\therefore AP = AD$.

同理可证: 直线 CE 和 DA 也相交,

设 $CE \cap DA = P'$, $AP' = AD$.

$AP = AP'$, $\therefore P$ 与 P' 重合,

∴直线 D_1F、DA、CE 交于点 P.

立体几何的公理法知识:

选取少数不加定义的原始概念(基本概念)和无条件承认的规定(公理)作为出发点,再加以严格的逻辑推理,将某一数学分支建成演绎系统的方法,叫数学系统的公理化方法,简称“公理法”.

两千多年来,欧几里得的《几何原本》在传播几何知识方面做出了巨大的贡献,并一直被人们作为标准的教科书使用 .《几何原本》的特点是建立了一个比较严密的几何体系,提出了几何学的“根据”和它的逻辑结构问题 .但是,随着时间的推移,人们逐渐发现《几何原本》的体系还存在不少破绽和漏洞,例如使用一些未知的定义来解释另一个未知的定义,这样的定义既不能逻辑地确定几何名词和术语,也不能在逻辑推理中起作用;《几何原本》也使用了一些未曾定义的概念,如“连续”的概念就未定义而被使用 .正是由于对《几何原本》在逻辑结构方面存在的破绽和漏洞的发现,推动了几何学的不断发展 .

1899 年,德国数学家希尔伯特在他的《几何基础》一书中,首次用公理化的方法提出了一个比较完善的几何学的公理系统,即希尔伯特公理体系,克服了《几何原本》中的一些缺点 .

希尔伯特公理体系的主要思想包含:

(1)把几何中的点、直线、平面等概念,作为不加定义的“原始”概念,叫基本对象 .

(2)给出几何元素的一些基本关系:结合关系、顺序关系、合同关系 .

(3)规定了五组公理,用它阐述基本对象的性质 .希尔伯特还提出建立一个公理化体系的原则,即在一个公理体系中,取哪些为公理,应包含多少公理,必须考虑以下三点:

第一,相容性,即各公理必须是互相不矛盾的,同存于一个体系中 .

第二,独立性,即每条公理都是各自独立的,不能由其他公理推出 .

第三,完备性,即体系中所包含的公理应足以推出本学科的任何命题 .

欧几里得的几何体系实际上是公理化体系的雏形,常称之为古典公理体系 .

公理化方法给几何学的研究带来了一个新的观点 .

在公理体系中,由于基本对象不加以定义,因此就不必考虑研究对象的直观形象,只要研究抽象的对象之间的关系、性质 .凡符合公理体系的元素都可以作为这个几何体系的直观解释,或称几何学的模型 .因此,几何学的研究对象更广泛,其含义也更抽象 .

20 世纪以来,由于公理化方法在研究几何基础方面所取得的成就,促使公理化方法渗透到数学的其他分支,诸如代数、泛函、拓朴等比较抽象的数学分支的研究 .公理化方法对近代数学的发展所产生的巨大影响,已成为举世公认的事实,公理化方法早已超过数学理论范围,进入其他自然科学的领域 .如本世纪 40 年代波兰数学家巴拿赫完成了理论力学的公理化,物理学家还将相对论表述为公理体系等等 .当然,公理化方法若不与实验方法相结合,不与科学方法相结合,也不会更好地解决和发现问题 .

补充: 公理 3 的两个推论的证明 .

推论 2:经过两条相交直线有且只有一个平面 .

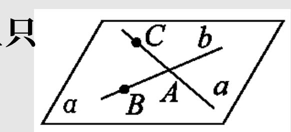


图 9 - 1 - 15

已知:直线 $a\cap b=A$,

求证:经过直线 a、b 有且只有一个平面 α.

证明:①如图 9 - 1 - 15,在直线 a、b 上分别取不同于 A 点的点 C、B,得到不在一直线上的三点 A、B、C,过这三个点有且只有一个平面 α(公理 3)

∵ $B\in b$, $A\in b$, $B\in$ α, $A\in$ α,

∴ b α,

又∵ $C\in a$, $A\in a$, $C\in$ α, $A\in$ α,

∴ a α(公理 1),

∴平面 α是经过相交直线 a、b 的平面 .

②如果过直线 a、b 还有另一个平面 β,

那么 A、B、C 三点也一定都在平面 β内,

这样过不在一条直线上的三点 A、B、C 就有两个平面 α β了,这与公理 3 矛盾 .

∴过直线 a、b 的平面只有一个 .

综上知, 过直线 a、b 有且只有一个平面 .

推论 3: 经过两条平行直线有且只有一个平面 .

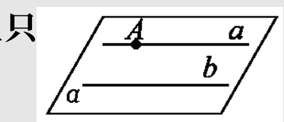


图 9 - 1 - 16

已知: 直线 $a\parallel b$,

求证:经过直线 a、b 有且只有一个平面 α.

证明:①如图 9 - 1 - 16, 由平面几何的知识:当两条直线在同一平面内且不相交时, 叫作平行直线 .

∴两条平行直线 a、b 必在某个平面内,

就是说,过两条平行直线有一个平面 .

②如果过直线 a、b 还有另一个平面 β,

那么,在 a 上任取一点 A,它一定在平面 β内,

这样过点 A 和直线 b 就有两个平面 α和 β,

这和推论 1 矛盾 .

∴过两平行直线 a、b 的平面只有一个 .

综上知, 过直线 a、b 有且只有一个平面 .

9.2　空间的平行直线与异面直线

教学建议

重点是公理4和异面直线的概念,难点是空间异面直线的定义及其所成的角.

1.在引入异面直线这一概念时应充分联系生活中的实例,为了让学生更好地理解"不同在任何一个平面内的两条直线",可以通过画图举例来说明.

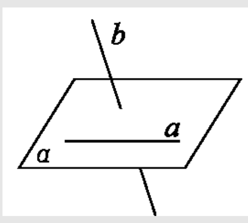


图9-2-1

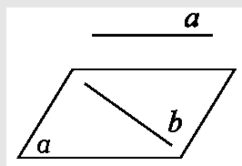


图9-2-2

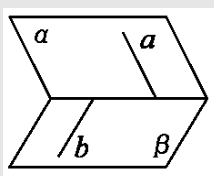


图9-2-3

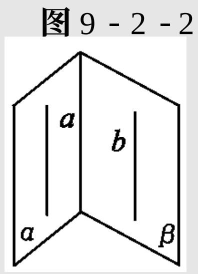


图9-2-4

2. 两条直线异面等价于这两条直线既不平行也不相交,因此异面直线的定义又可理解为"经过这两条直线无法作出一个平面".

3.在讲平行公理和等角定理时,可以用类比的方法与平面几何中的结论加以对照.

4.关于两条异面直线所成的角,讲解时要突出以下几点:

①将角的概念从"交角"拓广为"空间两直线的方向(或倾斜度)之间的差异".它的大小反映二异面直线方向上的差异,与点O的位置无关;

②计算异面直线a、b所成角的大小时,常将点O取在a或b上,往往只需平移一条直线即可.

③到后面可以用向量的知识更有效地解决角的问题,因此在这里不用作过多的繁难训练.

预习导引

问题:在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的面A_1C_1上有一点P(如图9-2-5所示,其中P点不在对角线B_1D_1上),

(1)过点P在空间作一直线l,使$l∥$直线BD,应如何作图?并说明理由.

(2)过点P在平面A_1C_1内作一直线l',使l'与直线BD成α角,这样的直线有几条?应如何作图?

点拨

(1)连结B_1D_1,

在平面A_1C_1内过点P作直线l,

使$l∥B_1D_1$,则l即为所求的直线.

$\because B_1D_1∥BD$, $l∥B_1D_1$,

$\therefore l∥BD$.

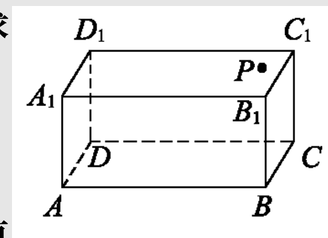


图9-2-5

(2)在平面A_1C_1内,作直线l',

使l'与B_1D_1相交成α角,

$\because B_1D_1∥BD$,

$\therefore l'$与BD也成α角,l'即为所求的直线.

若l'与BD是异面直线,则l'与B_1D_1相交成α角,$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2}]$,

当$\alpha=\frac{\pi}{2}$时,这样的直线有且只有一条,

当$\alpha\neq\frac{\pi}{2}$时,这样的直线有两条;

若l'与BD是共面,则l'与BD平行,即$\alpha=0$,这样的直线只有一条.

知能互动

1.空间直线的位置关系有________.

2.平行于同一条直线的两条直线________,这种性质叫做空间平行线的________.

3.等角定理的内容是:如果一个角的两边和另一个角的两边分别____并且________,那么这两个角________.

4.如果空间图形F的所有点都沿同一方向移动相同的距离到F'的位置,则就说空间图形F在空间作了一次____.

5.________的两条直线叫做异面直线,这两条直线既不________也不________.

6.连结________与________的直线,和这个平面内________的直线是异面直线.

7.两条异面直线所成的角的范围是________,如果他们所成的角等于90°,我们就说两条直线________.

答案

1. 相交、平行、异面　2. 平行　传递性　3. 平行　方向相同　相等　4. 平移　5. 不同在任何一个平面内　平行　相交　6. 平面内一点　平面外一点　不经过此点　7. $(0,\frac{\pi}{2}]$　互相垂直

疑难解析

1.公理4"平行于同一条直线的两条直线互相平行",说明把平行线的传递性推广到空间也能成立.这个公理是判断两直线平行的重要方法之一,其关键在于寻找联系所证两条平行直线的第三条直线.

2.常把定理"如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同,那么这两个角相等"叫做等角定理,等角定理主要解决了角在空间中的平移问题,这为后面建立异面直线所成角打下基础,并为解决异面直线角的问题提供了解题方法.

在学习等角定理时要注意:①如果一个角的两边与另一角的两边分别平行,但方向相反,那么这两角相等;②如果一个角的两边与另一个角的两边分别平行,有一组对边方向相同,有一组对边方向相反,那么这两个角互补.

3.异面直线定义中"不同在任何一个平面内"是指这两条直线"不能确定一个平面",其中的"任何"是异面直线不可缺少的前提条件.

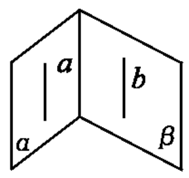


图 9-2-6

(1)不能把"不同在任何一个平面内"误解为"不同在某一个平面内",例如图 9-2-6,直线 a α, b β, $a∥b$,不能由 a、b 不同在平面 α 上就误认为 a 与 b 异面,实际上,由 $a∥b$ 可知 a 与 b 共面,它们不是异面直线;

(2)也不能误解为"分别在某两个平面内的两条直线",前者是说不可能找到一个同时包含这两条直线的平面,而后者的直线只是画在某两个平面内,并不能确定这两条直线异面,它们可以是平行直线,如图 9-2-6,也可以是相交直线,如图9-2-7.

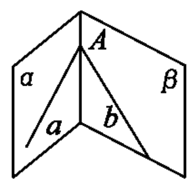


图 9-2-7

4.两条异面直线既然不相交,但它们之间又有一个角,这对于初学立体几何者来说,是较难理解的.实际上这个角是指这两条直线经过平移后处于相交位置时所成的锐角或直角,因此异面直线所成的角的范围是 $(0,\frac{\pi}{2}]$,要注意其中不含 0 弧度.

5.两条异面直线所成角的大小只由异面直线的位置来决定,而与 O 点的位置无关.所以为了便于计算出异面直线所成角的大小,常根据题目的需要把 O 点选在具有特殊的点上或特殊的直线上.

探究学习

例 1

已知棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M、N 分别是棱 CD、AD 的中点.

求证:四边形 MNA_1C_1 是梯形.

> 命题意图:考查平行公理的应用,熟悉正方体的性质,加强平面几何与立体几何的联系.

分析　要证明 MNA_1C_1 是梯形,须找对边平行,由图知 A_1N 与 C_1M 不可能平行,须证 $MN∥A_1C_1$,由中点联想到三角形的中位线,即可得证.

答案　如图 9-2-8,连结 AC.

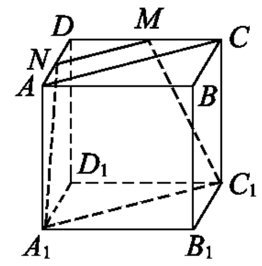
在△ACD 中,

∵ M、N 是 CD、AD 的中点,

∴ MN 是三角形的中位线,

∴ $MN∥AC$, $MN=\frac{1}{2}AC$.

由正方体的性质得:



$AC∥A_1C_1$, $AC=A_1C_1$,

∴ $MN∥A_1C_1$,且 $MN=\frac{1}{2}A_1C_1$,

即 $MN≠A_1C_1$,

∴ 四边形 MNA_1C_1 是梯形.

> 探究:要证明四边形是梯形,必须证明有两边平行且不相等,有中点时常构造三角形的中位线来证明平行.本题利用公理 4 时,发挥了 AC 的桥梁作用.

例 2

如图 9-2-9,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E、F、G 分别是棱 CC_1、BB_1 及 DD_1 的中点,

求证: $∠BGC=∠FD_1E$

> 命题意图:考查等角定理的应用,熟悉证明角相等的常用方法.

分析　要证明两角相等,由等角定理,首先考虑角的对应边是否平行,也可以像证明等角定理那样,通过证明三角形全等或相似来证明.

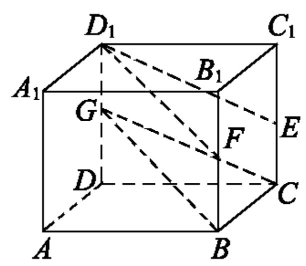


图 9-2-9

答案　∵ E、F、G 分别是棱 CC_1、BB_1 及 DD_1 的中点,

∴ $CE∥GD_1$, $CE=GD_1$,

$BF∥GD_1$, $BF=GD_1$,

∴四边形 CED_1G 与四边形 BFD_1G 均为平行四边形.

∴ $GC∥D_1E$, $GB∥D_1F$.

又∵ $∠BGC$ 与 $∠FD_1E$ 的对应两边的方向相同,

∴ $∠BGC=∠FD_1E$.

> 探究:(1)本题证明过程中容易忽视角的对应两边方向相同的论述.(2)本题也可以通过证明 $△BGC≌△FD_1E$,得到 $∠BGC=∠FD_1E$.

例 3

如图 9-2-10,空间四边形 $ABCD$ 中, $AB≠AC$, AE 是△ABC 的边 BC 上的高, DF 是△BCD 的边 BC 上的中线.

求证: AE 和 DF 是异面直线.

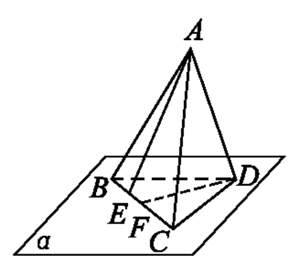


图 9-2-10

> 命题意图:熟悉异面直线的判定定理及反证法的应用,掌握异面直线的证明方法.

分析　要证明两直线异面,可借助平面 BCD,证明不在平面内,在平面内且不在上,由判定定理即可得证.或用反证法也可证明.

答案　证法 1:由题设条件可知 E、F 不重合,

设△BCD 所在平面为 α.

∵ DF α, A| α, $E∈α$, E| DF,

∴ AE 和 DF 异面直线 .

证法 2: 假设 AE 和 DF 不是异面直线,

则 AE 和 DF 共面,

设过 AE、DF 的平面为 β .

(1) 若 E、F 重合,则 E 是 BC 的中点,

这与题设 $AB \neq AC$ 矛盾 .

(2)若 E、F 不重合,

∵ $B \in EF$, $C \in EF$, EF　β, ∴ BC　β,

又∵ $A \in \beta$, $D \in \beta$, ∴ A、B、C、D 四点共面,

这与题设 $ABCD$ 是空间四边形矛盾 .

综上, AE 和 DF 不是异面直线不成立,

故 AE 和 DF 是异面直线 .

探究:(1)证明两条直线异面通常用反证法, 它是一种间接证法,一定要严格按照步骤分层次进行;

第一步:作出和结论相反的假设;

第二步:从假设出发,推导出一个与已知条件或某一公理、定理,或某一已获证的命题相矛盾的结论,从而得到一对逻辑矛盾;

第三步:推翻假设,肯定题中的结论 .

在假设时常有两种方法:一是假设两直线共面;二是假设两直线平行或相交 后一种假设需要分别否定平行和相交两种情况,不如前一种假设优越 .

(2)定理法也是判断两直线异面的一种重要方法,在证明时要积极寻找定理成立的条件 .

例 4

如图 9 - 2 - 11, 等腰直角三角形 ABC 中, $\angle A = 90°$, $BC = 2$, $DA \perp AC$, $DA \perp AB$, 若 $DA = 1$, 且 E 为 DA 的中点 .

求异面直线 BE 与 CD 所成的角的余弦值 .

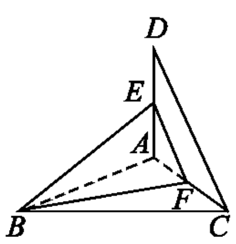


图 9 - 2 - 11

命题意图:熟悉异面直线所成的角的概念,掌握求异面直线所成的角的常用方法 .

分析　根据异面直线所成角的定义,我们可以选择适当的点,分别引 BE 与 CD 的平行线,即平移 BE (或 CD) .设想平移 CD,沿着 DA 的方向,使 D 移向 E,则 C 移向 AC 的中点 F,这样 BE 与 CD 所成的角即为 $\angle BEF$ 或其补角, 解 $\triangle EFB$ 即可获解 .

答案　取 AC 的中点 F,连结 EF .

在 $\triangle ACD$ 中, E、F 分别是 AD、AC 的中点,

∴ $EF \parallel CD$,

∴ $\angle BEF$ 即为所求的异面直线 BE 与 CD 所成的角或其补角 .

在 Rt$\triangle EAB$ 中, $AB = 1$, $AE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}$, ∴ $BE = \frac{5}{2}$.

在 Rt$\triangle AEF$ 中, $AF = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}$, $AE = \frac{1}{2}$, ∴ $EF = \frac{2}{2}$.

在 Rt$\triangle ABF$ 中, $AB = 1$, $AF = \frac{1}{2}$, ∴ $BF = \frac{5}{2}$.

∴ 在等腰三角形 EBF 中,

$$\cos \angle BEF = \frac{\frac{1}{2}EF}{BE} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{10}{10} .$$

∴ 异面直线 BE 与 CD 所成角的余弦值是 $\frac{10}{10}$.

探究: (1)由于平移的方法很多, 为此, 该题的解法也较多,如图 9 - 2 - 12, 平移 BE, 让 E 沿 AD 方向移至 D, 此时 B 点将沿着 AB 的延长线移至点 M, 此时 $BM = AB$, DC 与 DM 所成的角即为异面直线 DC 与 BE 所成的角;也可以将 BE 的端点 B 沿着 BC 方向移动,这时点 E 怎样移动?或者 DC 的端点 C 沿着 CB 方向移动,这时 D 点又怎样移动?

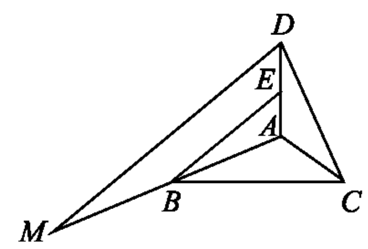


图 9 - 2 - 12

(2)综观以上平移直线寻找两异面直线所成的角的过程,线的平移是在某个面中进行的,该面的特点有两个:①该平面包含其中一条异面直线;②该平面与另一条异面直线相交 这样,我们可以通过该点在该面内平移一线而找出两异面直线所成的角 .

(3)求角或求角的三角函数的一般步骤是:①找(或作出)角,适合题意;②求角或求角的三角函数值,往往化归成一个三角形的内角,通过解三角形求得 .

高考链接

1. (2004・天津)如图 9 - 2 - 13, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, O 是底面 $ABCD$ 的中心, E、F 分别是 CC_1、AD 的中点,那么异面直线 OE 和 FD_1 所成的角的余弦值等于　　(　　)

A $\frac{10}{5}$　　B $\frac{15}{5}$　　C $\frac{4}{5}$　　D $\frac{2}{3}$

解析　取 D_1C_1 的中点 M, 连结 OM,

则易知 $OM \parallel D_1F$,

∴ $\angle MOE$ 就是直线 OE 和 FD_1 所成的角 .

连结 ME, 在 $\triangle MC_1E$ 中, 可求得 $ME = 2$,

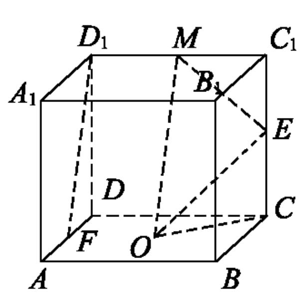


图 9 - 2 - 13

在 $\triangle D_1DF$ 中, 可求得 $D_1F = 5$.

连结 CO, 在 $\triangle COE$ 中, 可求得 $OE = 3$.

∴ 在 $\triangle MOE$ 中, 由余弦定理可得结果 .

答案　B

2. (2003・北京春)如图 9 - 2 - 14, 在正三角形 ABC 中, D、E、F 分别为各边的中点, G、H、I、J 分别为 AF、AD、BE、DE 的中点 .将 $\triangle ABC$ 沿 DE、EF、DF 折成三棱锥以后, GH 与 IJ 所成的角的度数为　　(　　)

A　90°　　B　60°　　C　45°　　D　0°

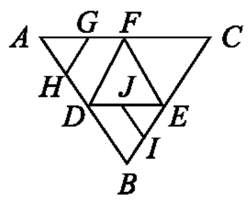


图 9 - 2 - 14

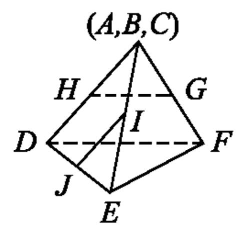


图 9 - 2 - 15

解析　将三角形折成三棱锥如图 9 - 2 - 15．HG 与 IJ 为一对异面直线．过点 D 分别作 HG 与 IJ 的平行线，即 DF 与 AD．所以∠ADF 即为所求．因此，HG 与 IJ 所成的角为 60°．

答案　B

3. (2001·北京春)图 9 - 2 - 16 是正方体的平面展开图．在这个正方体中，

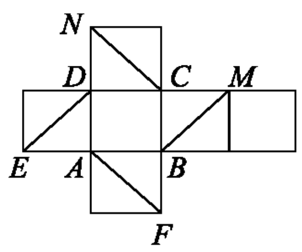


图 9 - 2 - 16

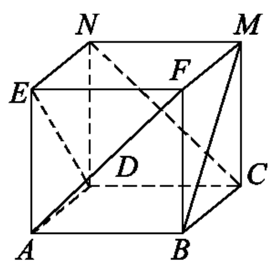


图 9 - 2 - 17

①BM 与 ED 平行　　②CN 与 BE 是异面直线

③CN 与 BM 成 60°角　　④DM 与 BN 垂直

以上四个命题中，正确命题的序号是　　(　　)

A　①②③　　B　②④　　C　③④　　D　②③④

解析　展开图可以折成如图 9 - 2 - 17 的正方体，由图可知①②不正确，∴③④正确．

答案　C

4. (2003·上海)在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，若侧面与底面所成二面角的大小为 60°，则异面直线 PA 与 BC 所成角的大小等于________．(结果用反三角函数表示)

解析　如图 9 - 2 - 18，∠PAD 即为异面直线 PA 与 BC 所成的角．

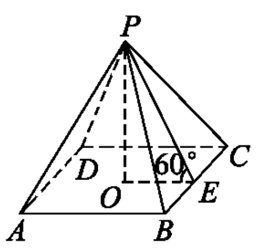


图 9 - 2 - 18

∵△PAD≌△PBC，

∴∠PBE=∠PAD．

设 $OE=a$，则 $PE=2a$，

$BE=a$，∴$\tan∠PBE=2$．

答案　arctan 2

5. (2002·上海春)图 9 - 2 - 19 表示一个正方体表面的一种展开图，图中的四条线段和在原正方体中相互异面的有________对．

解析　如图 9 - 2 - 20 所示，相互异面的线段有 AB 与 CD，EF 与 GH，AB 与 GH 三对．

答案　3

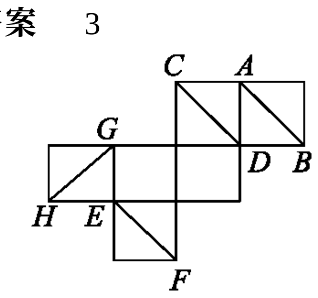


图 9 - 2 - 19

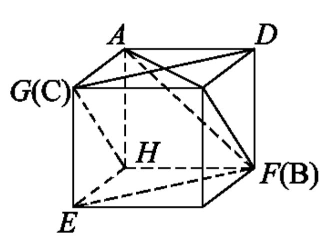


图 9 - 2 - 20

6. (2002·北京春)在三棱锥 $S-ABC$ 中，∠SAB=∠SAC=∠ACB=90°，$AC=2$，$BC=\ 13$，$SB=\ 29$．

求异面直线 SC 与 AB 所成角的大小(用反三角函数表示)．

解析　过点 C 作 CD∥BA，过点 A 作 BC 的平行线交 CD 于 D，连结 SD，则∠SCD 是异面直线 SC 与 AB 所成的角．如图9 - 2 - 22．

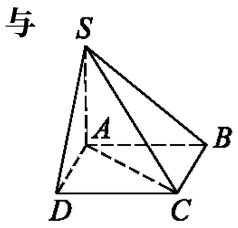


图 9 - 2 - 22

又四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$DC=AB=\ AC^2+BC^2=\ 17$，

$SA=\ SB^2-AB^2=2\ 3$，

$SD=\ SA^2+AD^2=\ SA^2+BC^2=5$，

在△SCD 中，

$$\cos∠SCD=\frac{SC^2+DC^2-SD^2}{2·SC·DC}$$

$$=\frac{4^2+(\ 17)^2-5^2}{2×4×\ 17}=\frac{\ 17}{17},$$

∴ SC 与 AB 所成的角的大小为 $\arccos\frac{\ 17}{17}$．

达标训练

基础过关

一、选择题

1　异面直线指的是　　(　　)

A　不同在一个平面内的两条直线

B　分别在某两个平面内的两条直线

C　既不平行又不相交的两条直线

D　平面内的一条直线和平面外的一条直线

解析　选项 A 只说明两直线不同在一个平面内，没有说明平面的任意性．选项 B 把两直线放到特定的两个平面内，也不具有任意性．选项 D 中的平面也不具有任意性．选项 C 从反面肯定了两直线的异面．

答案　C

2　分别和两条异面直线相交的两条直线的位置关系是　　(　　)

A　相交　　B　异面

C　平行　　D　相交或异面

解析　两条直线与两条异面直线的交点的个数可以是三个或四个．在一条直线上的两个交点重合时，就是三个，此时与两条异面直线相交的两直线相交；若交点的个数为四个，则两直线异面．

答案　D

3　如果直线 a、b 分别与直线 c 所成的角相等，则　　(　　)

A　a∥b　　B　a 与 b 相交

C　a、b 为异面直线　　D　不能确定

解析　A、B、C 中三种情况都有可能，只能选 D

答案　D

4　空间四边形 $ABCD$ 中，$AC=BD$，E、F、G、H 分别

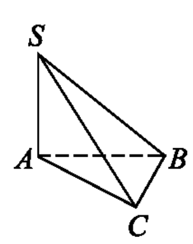


图 9 - 2 - 21

是 AB、BC、CD、DA 的中点，则四边形 $EFGH$ 是　　(　　)

A　菱形　　　　B　矩形

C　梯形　　　　D　正方形

解析　邻边相等的平行四边形是菱形．

答案　A

5　直线 a、b 是异面直线，a　α，b　β，且平面 $\alpha\cap\beta=c$，则　　(　　)

A　c 与 a、b 都不相交

B　c 与 a、b 都相交

C　c 至少与 a、b 的一条相交

D　c 至多与 a、b 的一条相交

解析　从反面考虑，若 c 与 a、b 都不相交，从而 $a\parallel c$，$b\parallel c$，则 $a\parallel b$ 矛盾．

答案　C

6　空间四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，且异面直线 AB 和 CD 成 30°的角，E、F 分别是边 BC 和 AD 的中点，则异面直线 EF 和 AB 所成角等于　　(　　)

A　15°　　　　B　75°

C　30°　　　　D　15°或 75°

解析　取 BD 的中点 M，连结 MF，ME，由 E、F 分别是边 BC 和 AD 的中点得 $MF\parallel AB$，$ME\parallel CD$，∴$\angle EFM$ 或其补角就是 EF 和 AB 所成角，且为等腰三角形的底角，顶角为 AB 和 CD 所成的角或其补角，为 30°或 150°，所以底角为 15°或 75°

答案　D

二、填空题

7　若 a、b、c 是空间三条直线，$a\parallel b$，a 与 c 相交，则 b 与 c 的位置关系是________．

解析　由公理 4 可证得 b 与 c 不平行．

答案　异面或相交

8　设 a、b、c 表示直线，给出四个论断：

①　$a\perp b$;　②　$b\perp c$;　③　$a\perp c$;　④　$a\parallel c$．

以其中任意两个为条件，另外的某一个为结论，写出你认为正确的一个命题是________．

解析　由两异面直线所成的角的定义知，两平行直线和同一直线所成的角相等．

答案　①④　②；或②④　①．

9　正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，与对角线 AC_1 异面的棱有________条？

解析　从定义出发，同时考虑到正方体的一条对角线与 6 条棱有公共点 A 和 C_1，而正方体有 12 条棱，故异面的有 6 条．

答案　6

10　给出下列四个命题：

①既不平行又不相交的两条直线是异面直线；

②一条直线与两平行直线中的一条直线异面，那么它与另一条直线也异面；

③一条直线与两异面直线中的一条直线相交，那么它和另一条直线可能相交或平行或异面；

④两条异面直线的距离，是分别在两直线上的两点间的最短距离．

其中，正确命题的序号是________．

解析　②中一条直线和另一条直线除了异面外还可以相交．

答案　①③④

11　四面体 $S-ABC$ 的所有棱长均为 a，E、F 分别是 SC 和 AB 的中点．则异面直线 EF 和 SA 所成的角为________．

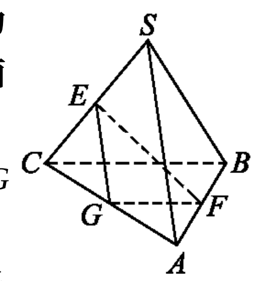


图 9-2-23

解析　取 AC 的中点 G，连结 EG，则 $EG\parallel SA$．

∴EF 和 GE 所成的锐角或补角就是异面直线 EF 和 SA 所成的角．

连结 FG,

由题干可易得出 $EA=EB$

从而得出 $EF\perp AB$

∵$AE^2=EG^2+AG^2-2EG\cdot AG\cdot\cos\angle EGA$

∴$AE=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

∴在 Rt△AEF 中，$EF=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

又∵$EG=\frac{1}{2}a$，$GF=\frac{1}{2}a$

∴$\cos\angle GEF=\frac{EG^2+EF^2-GF^2}{2\times EG\times EF}$

∴$\angle GEF=45°$．

故异面直线 EF 和 SA 所成的角为 45°．

答案　45°

三、解答题

12　求证：过直线外一点有且只有一条直线和这条直线平行．

解析　已知：点 $P|$　a 直线．

求证：过点 P 和直线 a 平行的直线 b 有且只有一条．

证明：∵$P|$　a，∴点 P 和直线 a 确定一个平面 α，

在平面 α 内过点 P 作直线 b 与直线 a 平行(由平面几何知识知这样的直线存在)．

假设过点 P 还有一条直线 c 与直线 a 平行．

∵$a\parallel b$，$a\parallel c$，∴$b\parallel c$，

这与 b、c 共点矛盾．故假设不成立，因此直线惟一．

所以过直线外一点有且只有一条直线和这条直线平行．

13　如图 9-2-24，已知 $\alpha\cap\beta=a$，b　β，$a\cap b=A$，c　α 且 $c\parallel a$，

求证：b、c 为异面直线．

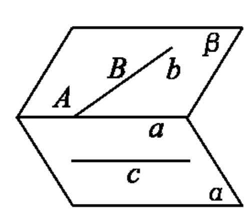


图 9-2-24

解析　证法 1：∵c　α，$a\cap b=A$，

$\alpha\cap\beta=a$，∴$A\in a$　α，

而 $a\parallel c$，∴$A|$　c，

在直线 b 上任取一点 B(不同于 A)，

∵b　β，∴$B|$　α，

∴AB 与 c 是异面直线，即 b、c 为异面直线．

证法 2：假设 b、c 不是异面直线，

即假设 b、c 在同一平面 γ 内，则 b　γ，c　γ，

在直线 b 上任取不同于 A 的一点 B，则 $B|$　α，

从而 $B\in\gamma, c\ \ \gamma$.

又 $A\in a$, $a/\!/ c$, $\therefore A|\ c$.

于是过 c 与 c 外一点 A 的平面就是平面 α,

而这样的平面只能有一个(公理 3 的推论 1).

从而 b、c 都在 α 内,但 $B\in b\ \ \alpha$,

这与 $B|\ \alpha$ 矛盾,

因此 b、c 为异面直线.

14 已知:如图 9-2-25, S 是$\triangle ABC$ 所在平面外一点, D、E 分别是$\triangle SAB$ 和$\triangle SBC$ 的重心.

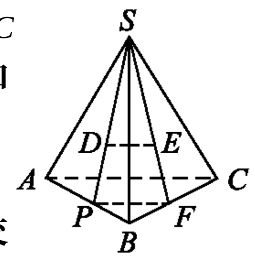


图 9-2-25

求证: $DE/\!/ AC$

解析　证明:分别连结 SD、SE 并延长交 AB 于点 P,交 BC 于点 F,连结 PF.

$\because$ D、E 分别是$\triangle SAB$ 和$\triangle SBC$ 的重心,

$\therefore$ P、F 分别是 AB、BC 的中点.

$\therefore$ PF 是$\triangle ABC$ 的中位线.$\therefore$ $PF/\!/ AC$.

$\because$ $\dfrac{SD}{SP}=\dfrac{SE}{SF}=\dfrac{2}{3}$, $\therefore$ $DE/\!/ PF$,

$\therefore$ $DE/\!/ AC$.

15 已知 a、b 是两条异面直线,直线 a 上的两点 A、B 的距离为 6,直线 b 上的两点 C、D 的距离为 8, AC、BD 的中点分别为 M、N 且 $MN=5$,

求异面直线 a、b 所成的角.

解析　如图 9-2-26,连结 BC,

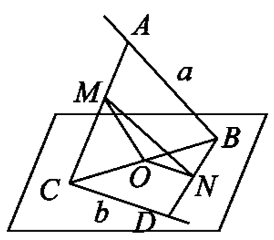


图 9-2-26

并取 BC 的中点 O,连结 OM、ON,

$\because$ OM、ON 分别是$\triangle ABC$ 和$\triangle BCD$ 的中位线,

$\therefore OM/\!/ AB$, $ON/\!/ CD$,

即 $OM/\!/ a$, $ON/\!/ b$.

$\therefore$ OM、ON 所成的锐角或补角是异面直线 a、b 所成的角.

又$\because AB=6$, $CD=8$,

$\therefore OM=3$, $ON=4$.

在$\triangle OMN$ 中,

$\because MN=5$, $\therefore OM^2+ON^2=MN^2$

$\therefore \angle MON=90°$.

故异面直线 a、b 所成的角是 $90°$.

知能拓展

16 如图 9-2-27, a、b 是异面直线, A、$B\in a$, C、$D\in b$, E、F 分别是直线段 AC 和 BD 的中点,判断 EF 和 a, EF 和 b 的位置关系,并证明你的结论.

解析　假设 EF 和 a 共面,

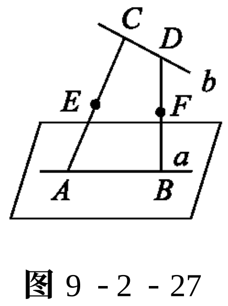


图 9-2-27

设这个平面为 α,

则 $EF\ \ \alpha$, $AB\ \ \alpha$.

$\therefore$ A、B、E、$F\in\alpha$,

$\therefore$ $FB\ \ \alpha$, $EA\ \ \alpha$,

又$\because C\in EA$, $D\in FB$,

$\therefore$ C、$D\in\alpha$.

于是直线 $b\ \ \alpha$.

从而 a、b 共面于 α,

这与题设条件 a、b 是异面直线矛盾.

$\therefore$ EF 和 a 共面的假设不成立.

$\therefore$ EF 和 a 是异面直线,同理可得 EF 和 b 也是异面直线.

17 如图 9-2-28,设 E、F、G、H 分别是空间四边形 $ABCD$ 的边 AB、BC、CD、DA 的中点, P、Q 分别是两条对角线 BD、AC 的中点.

求证: EG、FH、PQ 三线共点.

解析　$\because$ E、H 分别是 AB、AD 的中点,

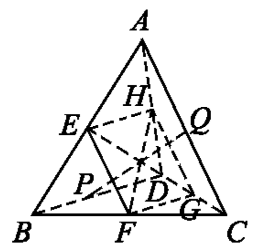


图 9-2-28

$\therefore$ $EH/\!/ BD$, $EH=\dfrac{1}{2}BD$.

同理可得: $FG/\!/ BD$, $FG=\dfrac{1}{2}BD$.

$\therefore$ $EH/\!/ FG$, $EH=FG$.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

$\therefore$ 对角线 EG、FH 相互平分于点 O.

同理可证四边形 $PFQH$ 也是平行四边形,

$\therefore$ PQ、FH 互相平分,

即 PQ 经过 FH 的中点 O.

$\therefore$ EG、FH、PQ 三线共点.

18 空间四边形 $ABCD$ 中, $AB=BC=CD=DA=BD=AC=a$, M、N 分别是 BC 和 AD 的中点.

求 AM 与 CN 所成角的余弦值.

解析　设 O 为 MD 的中点,连结 ON、OC.

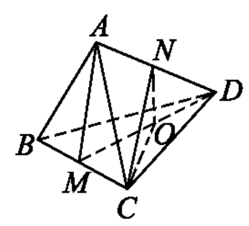


图 9-2-29

$\because$ N 是 AD 的中点,

$\therefore$ ON 是$\triangle AMD$ 的中位线,

$\therefore$ $ON/\!/ AM$, $ON=\dfrac{1}{2}AM$,

$\therefore \angle ONC$ 或其补角为异面直线 AM 与 CN 所成的角.

$\because$ $AB=BC=CD=DA=BD=AC=a$,

$\therefore$ $ON=\dfrac{1}{2}AM=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$, $CN=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$,

$OC=\sqrt{MC^2+MO^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}a^2+\dfrac{3}{16}a^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}a$,

在$\triangle ONC$ 中,由余弦定理可得,

$$\cos\angle ONC=\frac{\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{16}a^2-\frac{7}{16}a^2}{2\times\frac{\sqrt{3}}{4}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{2}{3}.$$

综合创新

19 如图 9-2-30 所示,在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为 AB 的中点, N 为 BB_1 的中点, O 为面 BCC_1B_1 的中心.试过 O 作一直线与 AN 交于 P,与 CM 交于 Q.(只写作法,不必证明)

解析　$\because ON/\!/ AD$,

$\therefore AD$ 与 ON 确定一个平面 α;

又 O、C、M 三点确定一个平面 β.

∵三个平面 α、β 和 $ABCD$ 两两相交，有三条交线 OP、CM、DA，其中交线 DA 与 CM 交线不平行但共面．

∴ DA 与 CM 必相交，记交点为 Q.

∴ OQ 是 α 与 β 的交线．

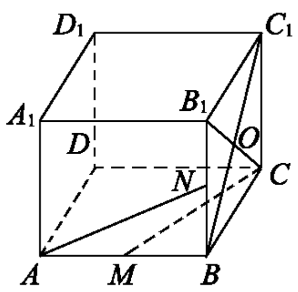


图 9-2-30

连结 OQ 与 AN 交于 P，与 CM 交于 Q，

故 OPQ 即为所求做的直线．

问题：已知异面直线 a，b 所成的角为 $60°$，在过空间一定点 P 的直线中，与 a，b 所成的角均为 $60°$ 有多少条？

过 P 与 a，b 所成的角均为 $50°$，$70°$ 的直线又各有多少条？

答案：①3 条；　②2 条；　③4 条．

拓展：已知异面直线 a，b 所成的角为 θ_0，且 $\theta_0 < 90°$，在过空间一点 P 的直线中，与 a，b 所成的角均为 θ 的有多少条？

答案：如图 9-2-31，过点 P 分别作异面直线 a、b 的平行线 a'、b'. 设 l_1、l_2 是 a'、b' 确定平面 α 内，由 a'、b' 所成角的角平分线．

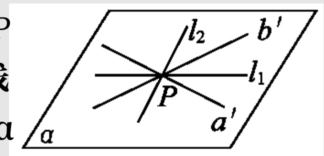


图 9-2-31

于是，

当 $\theta < \frac{\theta_0}{2}$ 时，满足条件的直线不存在；

当 $\theta = \frac{\theta_0}{2}$ 时，满足条件的直线仅有一条，就是 l_1；

当 $\frac{\theta_0}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}$ 时，满足条件的直线有 2 条；

当 $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}$ 时，满足条件的直线有 3 条；

当 $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} < \theta < \frac{\theta_0}{2}$ 时，满足条件的直线有 4 条；

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，满足条件的直线仅有 1 条．