

目 录

Contents

第四章 三角函数	员
第四章前学习指导	员
一 任意角的三角函数	源
任意角的概念的推广	源
弧度制	苑
任意角的三角函数	猿
同角三角函数的基本关系式	缘
正弦、余弦的诱导公式	通
二 两角和与差的三角函数	苑
两角和与差的正弦、余弦、正切	苑
二倍角的正弦、余弦、正切	怨
三 三角函数的图象和性质	猿
正弦函数、余弦函数的图象和性质	猿
函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象	猿
正切函数的图象和性质	缘
已知三角函数值求角	猿
本章总结	苑
第五章 平面向量	圆
第五章前学习指导	圆
一 向量及其运算	圆
向量	圆



目 录

Contents

摇摇缘摇摇向量的加法与减法	圆园远
缘缘缘实数与向量的积	圆园愿
缘缘缘平面向量的坐标运算	圆园怨
缘缘缘线段的定比分点	圆园远
缘缘缘平面向量的数量积及运算律	圆园愿
缘缘缘平面向量数量积的坐标表示	猿猿缘
缘缘缘平移	猿猿怨
二摇摇解斜三角形	猿猿苑
缘怨缘正弦定理、余弦定理	猿猿苑
缘怨缘解斜三角形应用举例	猿猿源
实习作业摇摇解三角形在测量中的应用	猿猿源
研究性学习课题 :向量在物理中的应用	猿猿源
本章总结	猿猿源





第四章 三角函数

章前学习指导

学习目标



掌握三角函数的概念,同角三角函数的关系式,诱导公式

掌握两角和与差,二倍角公式

掌握三角函数的图像与性质

理解函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像与性质

掌握三角函数的最值

掌握三角函数的应用

学习指导



在已知一个角的三角函数值,求这个角的其他三角函数值时,要注意题设中角的范围,并就不同的象限分别求出相应的值

注意公式的变形使用,弦切互化、三角代换、消元是三角变换的重要方法,要尽量减少开方运算,慎重确定符号

注意“一”的灵活代换,如 $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$, $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$, $\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$, $\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha$, $\sec(\alpha + \pi) = -\sec \alpha$, $\csc(\alpha + \pi) = -\csc \alpha$

应用诱导公式,重点是“函数名称”与“正负号”的正确判断,一般常用“奇变偶不变,符号看象限”的口诀

不仅要能熟练推证公式(建议自己推证一遍所有公式)、熟悉公式的正用逆用,还要熟练掌握公式的变形应用

注意拆角、拼角技巧,如 $\alpha = \beta + \gamma$, $\alpha = \beta - \gamma$, $\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2}$ 等

注意倍角的相对性,如 α 是 $\frac{\alpha}{2}$ 的倍角

要时时注意角的范围的讨论

化简要求:①能求出值的应求出值②使三角函数种数尽量少③使项数尽量少④尽量使分母不含三角函数⑤尽量使被开方数不含三角函数

(远常用方法:

①直接应用公式援

②切割化弦,异名化同名,异角化同角援

③形如 $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$ 的函数式,只须将分子分母分别乘以 $\frac{1}{\cos \alpha + \cos \beta}$,应用二倍角正弦公式即可援

(苑证明三角恒等式的基本思路,是根据等式两端的特征,通过三角恒等变换,应用化繁为简、左右归一、变更命题等方法,使等式两端的“异”化为“同”援

(愿条件等式的证明,通过认真观察,发现已知条件和待证等式之间的关系,选择适当的途径把条件用上援常用方法有代入法、消去法、综合法(即从已知条件出发,以待证式为目标进行代数或三角恒等变形,逐步推出待证式)、分析法等援

(怨三角函数的应用主要是借用三角函数的值域求最值,这首先应将原函数通过降幂、辅助角公式等化成 $\frac{1}{2}(\sin(\omega x + \varphi) + \cos(\omega x + \varphi))$ 的形式,或者通过换元转化成二次函数,然后再求之援

猿数形结合是数学中重要的思想方法,在中学阶段,对各类函数的研究都离不开图像援很多函数的性质都是通过观察图像而得到的援

(圆作函数的图像时,首先要确定函数的定义域援

(猿对于具有周期性的函数,应先求出周期,作图像时只要作出一个周期的图像,就可根据周期性作出整个函数的图像援

(源求定义域时,若需先把式子化简,一定要注意变形时 x 的取值范围不能发生变化援

(缘三角函数是函数的一个分支,它除了符合函数的所有关系和共性外,还有它自身的属性援

(远求三角函数式的最小正周期时,要尽可能地化为只含一个三角数,且三角函数的次数为 1 的形式,否则很容易出现错误援

愿函数的单调性是在定义域或定义域的某个子区间上考虑的,要比较两三角函数值的大小一般先将它们化归为同一单调区间的同名函数,再由该函数的单调性来比较大小援

(圆当函数的定义域为关于原点对称的区间时,判断函数的奇偶性一般运用奇偶性的定义,有时亦可应用与定义等价的命题,如 $\frac{f(x)}{f(-x)} = 1$ 则 $f(x)$ 为偶函数,若 $\frac{f(x)}{f(-x)} = -1$ 则 $f(x)$ 为奇函数,或由 $\frac{f(x)}{f(-x)} > 0$ 来判断奇偶性援

(猿判断 $\frac{1}{2}(\sin(\omega x + \varphi) + \cos(\omega x + \varphi))$ 的单调区间,只需求 $\frac{1}{2}(\sin(\omega x + \varphi) + \cos(\omega x + \varphi))$ 的相反区间即可,一般常用数形结合援而求 $\frac{1}{2}(\sin(\omega x + \varphi) + \cos(\omega x + \varphi))$ 单调区间时,则需要先将 x 的系数变为正的,再设法求之援

第四章 三角函数.....

研究高次或多个三角函数组合在一起的函数的周期最值等问题时,一般都要将原函数化成 $A\sin(\omega x + \varphi)$ 的形式后再研究

对于三角函数的变换问题,要注意 $A\sin(\omega x + \varphi)$ 与 $A\sin \omega x + \varphi$ 的区别,不同名的要先化成同名函数

由图像求解析式 $A\sin(\omega x + \varphi)$ 时,一般先确定平衡位置,再确定 A 的大小,确定 φ 时要选一个点代入(最好是选图中较靠前的最高点)

求三角形函数最值的常用方法有:①配方法(主要利用二次函数理论及三角函数的有界性);②化为一个角的三角函数(主要利用和差角公式及三角函数的有界性);③数形结合法(常用到直线的斜率关系);④换元法(如万能公式,将三角函数转化为代数函数);⑤基本不等式法等

三角函数的最值都是在给定区间上取得的,因而特别要注意题设中所给出的区间

①求三角函数最值时,一般要进行一些代数变换和三角变换,要注意函数有意义的条件及弦函数的有界性;

②含参数函数的最值问题,要注意参数的作用和影响

注意题中的隐含条件

三角函数是中学教材中的一种重要函数,它的定义和性质有许多独特的表现,是高考中对基础知识和基本技能考查的重要内容之一,同时,由于三角函数和代数、几何知识联系密切,它又是研究其他各类知识的重要工具,因此应重视对知识理解的准确性,加强对三角知识工具性的认识

一摇任意角的三角函数

异质角的概念的推广

自主学习导图



易混淆点提示	摇摇正确区分“锐角、小于 π 的角、圆到 π 的角、圆段、圆段第一象限角”等特殊角援例 员
易忽视点提示	摇摇在讨论角时,请不要忽视轴线角的存在援知识点 猿例 缘
解题技巧和规律	摇摇判断某一角属于第几象限的方法 将这个角表示为 $\alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) 的形式,再判断 α 所在象限即可援例 圆 圆赋值法解选择题援例 源 圆当角 β 的终边落在直线 l 上时,角 β 的集合可表示为 $\{\beta \beta = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,其中 α 为直线 l 与 x 轴正方向上的夹角援例 苑
数学思想和方法	摇摇分类讨论的思想援例 猿例 缘 摇摇数形结合的思想援例 远例 员 摇摇对称的思想方法援例 源 摇摇合并的思想方法援例 猿
注意的问题	摇摇从现在起,角的概念已经推广到了任意角援

教材超级讲解



摇摇新知识点导学

知识点 1 角的概念推广的必要性

过去我们学习了 $[0, 2\pi)$ 范围内的角,但在生活、生产和科学实验中还会遇到其他角,如体操、跳水比赛中,常听到“转体三周”“转体三周半”这样的解说,还如钟表的指针、汽车的方向盘,它们按照不同的方向旋转所成的角都不仅是 $[0, 2\pi)$ 范围内的角,……为了研究它们的运动规律,我们有必要将角的概念进行推广援

知识点 2 任意角的概念

角 角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的

图形

如图 4-1-1 中,一条射线的端点是 O ,它从起始位置 OA 按逆时针方向旋转到终止位置 OB ,形成了一个角 α ,点 O 是角的顶点,射线 OA 是角 α 的始边,射线 OB 是角 α 的终边.

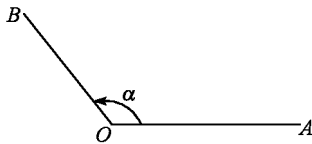


图 4-1-1

在初中已有角的概念的基础上,从“方向”和“数量”两个方面将角进行了推广,即出现了正角、负角和零角.

我们规定:

按逆时针方向旋转形成的角叫正角;

按顺时针方向旋转形成的角叫负角;

一条射线没有作任何旋转形成的角叫零角.

提醒

(1) 判断一个角是正角、负角或零角,关键是看这条射线是按逆时针方向旋转、顺时针方向旋转,还是没有作任何旋转.

(2) 我们现在所指的角有正、负、零角之分,而且角的绝对值也可以无穷大.

(3) 角的定义体现了运动的观点.

知识点 3 象限角和轴线角

为了便于讨论角,我们常常将角放到直角坐标系中,并且使角的顶点与原点重合,角的始边与 x 轴的非负半轴重合,这样就出现了象限角和轴线角.

(1) 象限角:当角的顶点与坐标原点重合,角的始边与 x 轴的非负半轴重合,那么角的终边(除端点外)在第几象限,就说这个角是第几象限角.

提醒

(1) 如果角的顶点不与坐标原点重合,或角的始边不与 x 轴的非负半轴重合,则不能判断角在哪个象限,也就是它不能称作象限角.

(2) 顶点在原点,始边与 x 轴非负半轴重合的角不仅仅是象限角,还有可能是轴线角.

【例 1】下列各命题正确的是

(摇摇)

① 终边相同的角一定相等

② 锐角都是第一象限的角

③ 小于 90° 的角都是锐角

【分析】本题可用各种角的定义,利用排除法予以解答,也可利用角的定义,直接

魔法数学(人教版)摇超级讲解·高一(下).....

判断援

第四章三角函数.....

摇摇【解】摇解法一:对于粤,原角和角是终边相同的角,它们并不相等,则应排除粤;

对于月,角是第一象限的角,但它不是锐角,则应排除月;

对于阅,原角是小于角的角,但它不是锐角,则应排除阅;

综上,应选悦

解法二 因为锐角的集合是 $\{\alpha | 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\}$ ①

第一象限角的集合是

$\{\alpha | 2k\pi < \alpha < (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ②

对于②,当 $k=0$ 时,②与①相同

所以锐角是第一象限的角

故选悦

方法技巧

要想否定一个命题,只需举出一个反例即可,解法一就是恰当地举出一个反例,将粤月阅三个选项予以排除,从而确定选项悦;要想肯定一个命题,则需严格推证

易错点提示

易错点:小于角的角就是锐角事实上,小于角的角不都是锐角,它还含有零角、负角,只有小于角的正角才是锐角因此角的概念推广之后,考虑问题要全面

【同类变式1】设 $A = \{\alpha | \alpha \text{ 是小于角的角}\}$, $B = \{\alpha | \alpha \text{ 是第一象限的角}\}$,则 $A \cap B$ 等于 (摇摇)

粤{锐角} 月{小于角的角}

悦{第一象限的角}

阅 以上都不对

摇摇(圆轴线角:当角的顶点与坐标原点重合,角的始边与x轴的非负半轴重合,那么角的终边落在坐标轴上,称作轴线角)

例如 $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ 等都是轴线角

易忽视点提示

在讨论角时,极易忽视轴线角的存在轴线角不属于任何象限,它和象限角共同组成了平面直角坐标系内顶点在原点始边与x轴非负半轴重合的角

摇摇知识点4 终边相同的角

所有与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,可构成一个集合 $S = \{\alpha + k \cdot 2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$,即任一与角 α 终边相同的角,都可以表示成角 α 与整数个周角的和

提醒

- (员)一定要注意角 α 的任意性援
- (圆)噪 猿 与 α 之间是“垣”噪 猿 可理解为 噪 猿 (原 α) 援
- (猿)相等的角 终边一定相同 终边相同的角不一定相等 终边相同的角有无数个 它们相差 猿 的整数倍援
- (源)在书写终边相同的角的集合时 噪 在这一条件可不能少援

【例 2】与 原 终边相同角的集合是 (摇摇)

- 粤 { α 渣 噪 猿 在 } 月 { α 渣 噪 猿 在 }
- 悦 { α 渣 噪 猿 在 } 阅 { α 渣 噪 猿 在 }

【分析】本例考查终边相同的角的表示方法,可用特殊值法去研究,也可用定义去分析解决,还可用排除法加以排除援

【解】解法一 疫当 噪 越 原 时,有 原 亦应选 悦

解法二 疫 原 与 原 终边相同,

又 原 与 圆 终边相同,

亦圆 应与 噪 猿 终边相同,故应选 悦

解法三 由于 原 与 原 终边相同,易知应排除 粤 月 阅 故选 悦

【同类变式 2】若 α 越 猿

(员)把 α 改写成 噪 猿 (噪 在 圆 β 约 猿)的形式为 _____ 援

(圆)使 θ 与 α 的终边相同,且 原 约 猿 则 θ 越 _____, θ 所属象限为 _____ 援

知识点 5 各象限角的集合与轴线角的集合

(员)象限角的集合:

第一象限角集合为 { 曾 噪 猿 在 } 援

第二象限角集合为 { 曾 噪 猿 在 } 援

第三象限角集合为 { 曾 噪 猿 在 } 援

第四象限角集合为 { 曾 噪 猿 在 } 援

(圆)轴线角的集合:

终边落在 曾 轴的非负半轴上,角的集合为 { 曾 噪 猿 在 } 援

终边落在 曾 轴的非正半轴上,角的集合为 { 曾 噪 猿 在 } 援

终边落在 曾 轴上,角的集合为 { 曾 噪 猿 在 } 援

终边落在 赠 轴上的非负半轴上,角的集合为 { 曾 噪 猿 在 } 援

终边落在 赠 轴上的非正半轴上,角的集合为 { 曾 噪 猿 在 } 援

第四章三角函数.....

终边落在 x 轴上, 角的集合为 $\{\theta \mid \theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

终边落在坐标轴上, 角的集合为 $\{\theta \mid \theta = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

提醒

象限角与轴线角的集合的表示形式并不惟一, 也还有其他的表示形式如:
终边落在 x 轴的非正半轴上, 角的集合为 $\{\theta \mid \theta = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

【例 3】终边与坐标轴重合的角的集合是

(摇摇)

摇摇 $\{\theta \mid \theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

月 $\{\theta \mid \theta = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

悦 $\{\theta \mid \theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

阅 $\{\theta \mid \theta = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

【分析】终边与 x 轴重合的角 θ 的集合是 $\{\theta \mid \theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, 终边与 y 轴重合的角 θ 的集合是 $\{\theta \mid \theta = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, 从而终边与坐标轴重合的角 θ 的集合是 $\{\theta \mid \theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\theta \mid \theta = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\} = \{\theta \mid \theta = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

【解】选 悦

摇摇【例 4】若 α 是第四象限角, 则 $\pi - \alpha$ 是(摇摇)

粤 第一象限角 摇摇 月 第二象限角

悦 第三象限角

阅 第四象限角

【分析】思路一: 先根据象限角的表示方法写出 α 的范围, 再求出 $\pi - \alpha$ 的范围, 从而可知 $\pi - \alpha$ 所在象限

思路二: 利用对称的方法求解

【解】解法一: 设 α 为第四象限,

亦 $\alpha \in (2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$

亦 $\pi - \alpha \in (2k\pi - \pi, 2k\pi - \frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}$,

亦 $\pi - \alpha \in (2k\pi - \pi, 2k\pi - \frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}$, 在,

亦 $\pi - \alpha$ 是第三象限角,

亦 应选 悦

解法二: 设角 α 与角 $\pi - \alpha$ 的终边关于 y 轴对称,

又设角 α 的终边在第四象限,

亦角 $\pi - \alpha$ 终边在第一象限, 又角 $\pi - \alpha$ 与 $\pi - \alpha$ 的终

方法技巧

紧紧抓住角的集合表示以及 $k \in \mathbb{Z}$, 即 k 为任意整数, 在这一点作为突破口体现了合并的思想方法

特别提示

(员) 对称问题, 对称的思想和方法是高中数学的重要内容, 历届高考试题多次出现, 是高考的热点问题, 在学习过程中不仅要掌握好对称的有关规律, 同时还要注意运用对称的思想和方法解决问题

(圆) 你还能找到更简单的方法吗? (赋值法)

边关于原点对称,

亦角 α 的终边在第三象限

亦应选悦

【同类变式3】若角 α, β 的终边关于轴对称, 则 α, β 的关系一定是(其中在) (摇摇)

粤 α 越 π

月 α 越 $\frac{\pi}{2}$

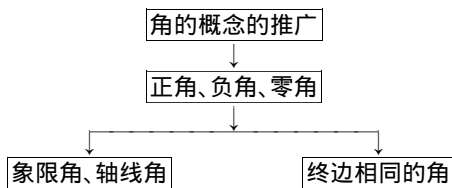
悦 α 越 $(2k+1)\pi$

阅 α 越 $(2k+1)\pi$

摇摇新知识点内在联系

在初中角的概念的基础上,把角从方向和数量上进行了推广,从而定义出正角、负角、零角.把角放到平面坐标系中,目的是方便对角的讨论,这样就出现了象限角、轴线角.终边相同的角是我们讨论的主要方面

本节知识结构图为:



疑难解析

难点:已知 α 角的象限,如何确定角 α 的半角、倍角的象限呢?

已知 α 角的象限,确定 $\alpha, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{3}$ 等角的范围是学习和、差、倍、半三角公式的基础.解决这类问题往往是根据终边相同的角的集合表示,再通过分类讨论的方法进行的,从而得出 $\alpha, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{3}$ 等分别是第几象限的角.

【例5】如果 α 是第三象限角,那么 $\alpha, \frac{\alpha}{2}$ 的终边落在何处?

【分析】本题给出一种角的范围,确定与其有关的角的范围,应从象限角的概念入手.

【解】设 α 是第三象限角,亦 $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$. 约 $\alpha \in (2k\pi + \pi, 2k\pi + \frac{3\pi}{2})$, 在①,则原 $\alpha \in (2k\pi + \pi, 2k\pi + \frac{3\pi}{2})$ 约原 $\alpha \in (2k\pi + \pi, 2k\pi + \frac{3\pi}{2})$ 即原 α 为第二象限角.

由①得 $\alpha \in (2k\pi + \pi, 2k\pi + \frac{3\pi}{2})$ 约 $\alpha \in (2k\pi + \pi, 2k\pi + \frac{3\pi}{2})$ 在,所以

为偶数时, $\frac{\alpha}{2}$ 是第二象限角,为奇数时, $\frac{\alpha}{2}$ 是第四象限角.

由①得 $\alpha \in (2k\pi + \pi, 2k\pi + \frac{3\pi}{2})$ 约 $\alpha \in (2k\pi + \pi, 2k\pi + \frac{3\pi}{2})$ 即 $(2k\pi + \pi) \cdot \frac{1}{2} \in (k\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{3\pi}{4})$.



角 α 的终边落在第一、二象限或 x 轴的正半轴上

特别提示

运用角的集合的图形表示即八卦图法更为直观且便于理解和记忆

【同类变式 4】如果角 α 的终边在 x 轴上方, 且和坐标轴不重合那么 α 的范围是 (摇摇)

粤 第一象限角的集合

月 第一或第二象限角的集合

悦 第一或第三象限角的集合

阅 第一或第四象限角的集合

拓展探究

摇摇一、综合拓展

常用角的集合表示法:

(员) 终边相同的角

终边相同的角是指具有同一终边角的集合, 其写法是在这条终边中找出一个角, 然后加上 $2k\pi$ 的整数倍

(圆) 终边共线且反向的角

其写法有二: 一是分别写出每条终边所代表的角的集合, 再取并集; 二是在其中一条终边上找出一个角, 然后再加上 $k\pi$ 的整数倍

如终边落在 x 轴上的角可表示为 $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ (在), 或者在 x 轴负半轴取角 π , 然后写为 $\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ (在)

(猿) 区间角

介于两个角之间的角集叫区间角, 例如 $\{\alpha | \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \alpha \in \mathbb{R}\}$

(源) 区域角

介于某两条终边间的角集叫做区域角, 显然区域角是无数个区间角的集合, 区域角的写法是: 首先依逆时针方向由小到大找到一个区间角, 再在两端加上 $2k\pi$ (在), 如 $\{\alpha | \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \alpha \in \mathbb{R}\}$

(缘) 象限角

象限角是由终边落在第几象限而得名, 它是特殊的区域角

如果用 $\alpha_{\text{第1象限}}, \alpha_{\text{第2象限}}, \alpha_{\text{第3象限}}, \alpha_{\text{第4象限}}$ 表示第一、二、三、四象限角, 则 $\alpha_{\text{第1象限}}, \alpha_{\text{第2象限}}, \alpha_{\text{第3象限}}, \alpha_{\text{第4象限}}$ 分布如图 4-1-1 所示, 即第一象限角的半角是第一或第三象限角 (其余略), 熟记图 4-1-1 就方便多了

图 4-1-1 就方便多了

【例 6】写出顶点在原点, 始边重合于 x 轴的非负半轴, 终边落在阴影部分的角的

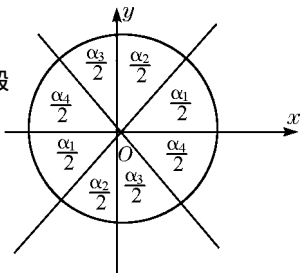


图 4-1-1

集合(如图源所示,不包括边界)援

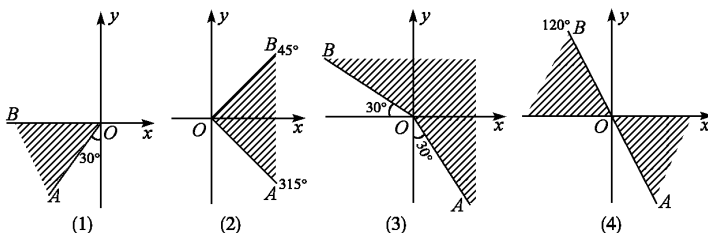


图 1.4-1

【分析】对于阴影部分形成的 $\angle$ 先选定 α ,并写出其终边对应的一个角,再依照逆时针原则写出一周内终边 α 对应的角,最后用终边相同的角的写法表示符合条件的角的范围援

【解】(员)选定 α 在 $[0^\circ, 360^\circ)$ 内,把图中以 α 为终边的角看成 α 则以 α 为终边的角看成 α 则有

$$\{\alpha | \alpha \in [30^\circ, 315^\circ), x \in \mathbb{R}\} \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上}$$

(圆)选定 α 在 $[0^\circ, 360^\circ)$ 内(若取 α 在 $[0^\circ, 360^\circ)$ 则无法表示出以 α 为终边的角),把图中以 α 为终边的角看成 α 则以 α 为终边的角看成 α 则有

$$\{\alpha | \alpha \in [30^\circ, 315^\circ), x \in \mathbb{R}\} \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上}$$

或选定 α 在 $[0^\circ, 360^\circ)$ 内,把图中以 α 为终边的角看成 α 则以 α 为终边的角看成 α 则有

$$\{\alpha | \alpha \in [30^\circ, 315^\circ), x \in \mathbb{R}\} \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上}$$

(猿)选定 α 在 $[0^\circ, 360^\circ)$ 内,把图中以 α 为终边的角看成 α 则以 α 为终边的角看成 α 则有

$$\{\alpha | \alpha \in [30^\circ, 315^\circ), x \in \mathbb{R}\} \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上}$$

(源)把图中 α 轴下方的阴影部分看成是由 α 轴上方的阴影部分旋转 α 得到的,则有

$$\{\alpha | \alpha \in [30^\circ, 315^\circ), x \in \mathbb{R}\} \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上}$$

易错点提示

例 远圆 易错为 $\{\alpha \mid \alpha \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], \alpha \in \text{第二象限}\}$ 的原因是角的终边表述错误, 故以 $\frac{\pi}{2}$ 为终边的角写成 $\frac{\pi}{2}$, 以 $\frac{3\pi}{2}$ 为终边的角写成 $\frac{3\pi}{2}$, 则有 $\{\alpha \mid \alpha \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], \alpha \in \text{第二象限}\}$ 或以 $\frac{\pi}{2}$ 为终边的角写成 $\frac{\pi}{2}$, 以 $\frac{3\pi}{2}$ 为终边的角写成 $\frac{3\pi}{2}$ 即有 $\{\alpha \mid \alpha \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], \alpha \in \text{第二象限}\}$ 在焉

【例 7】求终边在直线 $y=x$ 上的角的集合

【分析】终边落在第二象限的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \alpha \in \text{第二象限}\}$, 终边落在第四象限的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi), \alpha \in \text{第四象限}\}$, 然后求这两个集合的并集

【解】在 $[0, 2\pi)$ 范围内满足条件的角为 $\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{5\pi}{4}$.

亦 终边为直线 $y=x$ 的角的集合是 $\{\alpha \mid \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \alpha \in \text{第二象限}\} \cup \{\alpha \mid \alpha \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi), \alpha \in \text{第四象限}\} \cup \{\alpha \mid \alpha \in (\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}), \alpha \in \text{第四象限}\} \cup \{\alpha \mid \alpha \in (\frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}), \alpha \in \text{第四象限}\}$

解题规律

当角 β 的终边落在直线 $y=x$ 上时, 角 β 的集合可表示为 $\{\beta \mid \beta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}), \beta \in \text{第二象限}\}$, 其中 α 为直线 $y=x$ 与 x 轴正方向的夹角. 注意是 $\frac{\pi}{4}$ 而不是 $\frac{5\pi}{4}$.

二、应用拓展

【例 8】(员) 时钟的分针所转的角是正的还是负的? 分针走 圆小时 缘分钟所转的角是多少度?

(圆) 若将时钟拨慢 缘分钟, 则时针转了多少度? 分针转了多少度?

【分析】注意时钟的分针顺时针方向旋转且每旋转一周时间经历 远分钟. 拨慢是逆时针方向旋转.

【解】(员) 时钟的分针所转的角是负的, 每经过 员分钟所转过的角是 $-\frac{\pi}{30}$.

分针走 圆小时 缘分钟所转的角是 $-\frac{\pi}{30} \times 120 = -2\pi$.

特别提示

表盘上有十二个大格, 每格 $\frac{\pi}{6}$, 又有六十个小格, 每小格 $\frac{\pi}{60}$. 秒针每秒走 员小格即 $\frac{\pi}{60}$.

原速 $\frac{1}{2}$ 转

(圆)拨慢钟表,即将表针逆时针旋转,得正角 $\frac{1}{2}\pi$ 分钟
为一圆周,对应周角为 2π 分钟即对应 $\frac{1}{2}\pi$ 分钟所以
分针转了 $\frac{1}{2}\pi$ 转

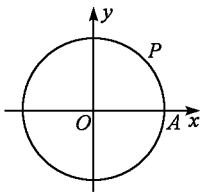
分钟对应 $\frac{1}{2}\pi$ 小时,时针转 $\frac{1}{2}\pi$ 为 $\frac{1}{2}$ 小时援

亦时针转了 $\frac{1}{2}\pi$ 伊 $\frac{1}{2}\pi$ 转 $\frac{1}{2}\pi$ 转

针每分钟走 $\frac{1}{2}\pi$ 小格
即 $\frac{1}{2}\pi$ 所以分钟走
 $\frac{1}{2}\pi$
时针每小时走 $\frac{1}{2}\pi$
大格即 $\frac{1}{2}\pi$ 转

【例 9】如图, 半径为 1 的圆的圆心位于坐标原点, 点 P 从点 $A(1,0)$ 出发, 依逆时针方向等速沿单位圆周旋转. 已知 P 在圆内转过的角度为 θ (弧度), 经过圆到达第三象限, 经过圆后又恰好回到出发点 A , 求 θ .

【分析】点 P 重回点 A 的数学语言即 θ 的终边与 x 轴的非负半轴重合, 利用 θ 的范围限制, 可以找到角 θ .



【解】设 θ 的终边与 x 轴的非负半轴重合, 则 $\theta = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). 由题意知, θ 的终边与 x 轴的非负半轴重合, 且 θ 的终边与 x 轴的非负半轴重合, 故 $\theta = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). 又 θ 的终边与 x 轴的非负半轴重合, 故 $\theta = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). 亦即 $\theta = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

从而 $\theta = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). 亦即 $\theta = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). 故 $\theta = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

方法技巧

将文字语言翻译成数学符号语言 (即 $\theta = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)) 是解决此题的关键所在. 这种转换成符号语言的能力是数学解题所必须具备的.

考试技巧

【例 10】(员) (哈尔滨模拟试题) 已知 α 的终边与 x 轴的正半轴重合, 且 α 与 β 的终边相同, 则 α 越_____援

摇摇(圆) (天津模拟试题) 在 0 到 2π 之间与 α 终边相同的角是_____援

【分析】所有与角 α 终边相同的角, 连同角 α 在内, 可以构成一个集合 $\{\theta | \theta = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

【解】(员) 设 α 与 β 终边相同, 故有 $\alpha = \beta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). 又 α 的终边与 x 轴的正半轴重合, 故 $\alpha = 2m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$). 即 $\beta = 2m\pi - 2k\pi = 2(m-k)\pi$. 当 $m-k=0$ 时, $\alpha = \beta$. 亦即 $\alpha = \beta$.

摇摇(圆) 与 α 终边相同的所有的角可表示为

方法技巧

欲求在某一范围内与 α 终边相同的角, 则首先写出与角 α 终边相同的角的集合, 解不等式, 然后根据限定范围对整数 k 取值, 进而该范围内的角也就确下来了.