模糊数学教程

主编摇蒋泽军
编者摇蒋泽军摇王丽芳摇高宏宾

国防工业出版社
·北京·

摇摇摇图书在版编目（悦陨孕）数据

摇模糊数学教程 辕蒋泽军主编 郾—北京：国防工业出版
摇摇社，圆园园远（圆园园怨重印）
摇陨杂月晕 苑鄄员员愿鄄园源源缘源鄄缘

摇Ⅰ郾模… 摇Ⅱ郾蒋… 摇Ⅲ郾模糊数学—教材
摇摇Ⅳ郾韵员缘怨

摇中国版本图书馆 悦陨孕数据核字（圆园园远）第 园缘源远园猿号

国防工业出版社出版发行
（北京市海淀区紫竹院南路 圆猿号）
（邮政编码摇员园园园源愿）
新艺印刷厂印刷
新华书店经售
*
开本 苑愿苑×员园怨圆摇员/员远摇印张 缘¼摇员猿远千字
圆园园远年 员月第 员版摇摇圆园园怨年 猿月北京第 圆次印刷
印数：猿园园员—远园园园册摇摇定价：员缘郾园园元

（本书如有印装错误，我社负责调换）

前摇摇言

自从 灵猿缘年 在藻藻提出模糊集合的概念以来，人们对模糊信息处理的研究就从未间断过，并越来越重视。今天，我们已经进入信息社会，走进 藻时代，模糊理论为信息处理提供了新的思维方法和理论基础。自然科学、社会科学、工程技术等领域，都存在着大量的模糊或不确定性，模糊理论和模糊技术几乎应用到了各个领域，并且取得了显著的社会效益和经济效益，而模糊数学又是模糊理论的基础，因此对模糊数学的学习和研究就显得尤为重要。

本书详尽地论述了模糊数学的基本概念、原理和方法，并阐述了模糊数学的应用，是一部学习和研究模糊数学的基础教材。全书共分七章。前五章阐述了模糊数学的基本概念、原理和方法，着重论述了有关模糊集合、模糊关系及方程、模糊映射、模糊变换的基本概念、性质和原理。后两章介绍了模糊数学在模糊识别、模糊控制和信息处理等方面的应用。为了配合理论学习，每一章都配有适量的思考练习题。模糊数学的分析方法有其自身的特点，读者需要多做一些练习才能对理论有较深入的理解，对方法有较熟练的掌握。本书可供数学、物理、经济管理、计算机、农林、地震、气象、地质、航天等专业的大学生、研究生以及科技人员学习使用。

本书是作者在为西北工业大学计算机科学与工程系各专业的研究生开设的“模糊数学”课程的基础上，并参考了陈镐缨老师编写的西北工业大学讲义《模糊数学引论》编写而成的。在此对陈镐缨老师及其他参考文献的作者表示最诚挚的感谢！对高洪江为本书所作的工作也深表谢意。

由于作者水平有限，书中难免有不当之处，敬请读者批评指正。

作者摇圆园园缘

目摇摇录

第一章摇绪摇论

灵阴摇模糊数学的发展

模糊数学是一门新兴的学科，在国外它通常被称为模糊集合论（[illegible]）。

人类对世界的认识总是在不断的发展。远古时代，人类对现实世界中的数量关系、空间关系等等只有非常模糊的认识，客观世界在他们的头脑中呈现的仅仅是一片混沌的图景。

经过漫长的生产、生活实践，人类逐渐认识到了在考察对象时，可以忽略对象的一般特性，而着重注意对象的数量、空间形式和几何形状，这就是所谓的“精确数学方法”。这种精确思维方法的建立，使得人类对现实世界的认识有了很大的飞跃。例如，笛卡儿将运动的观点引入数学，牛顿和莱布尼兹创立了微积分学，牛顿力学的诞生等等，都说明了近代科学技术的发展与精确数学的出现、发展和应用有着极为密切的联系。用精确定义的概念和严格证明的定理描述现实事物的数量关系和空间形式，用精确的实验方法和精确的测量计算探索客观世界的规律，建立严密的理论体系，这就是近代科学的特点。到 灵怨世纪，天文、力学、物理、化学等自然科学理论都先后在不同程度上走向了定量化、数学化，形成了一个被称为“精密科学”的学科群。直到现在，这种精确数学方法仍然在各学科的发展中发挥着巨大的作用。

虽然精确数学方法对推动科学技术的发展起到了不可低估的作用，但人类的发展还远远没有达到尽善尽美的地步，现实世界中

还存在着一大批难以处理，甚至根本无法采用精确数学方法解决的问题。例如，其中最为著名的问题之一就是古希腊学者发现的“秃头悖论”。在日常生活中，判断一个人是否为秃头是非常容易的。一般地说，只要头发脱落到剩下的数量很少就可以认为是秃头。但是，这样的描述根本不符合精确数学方法的要求。采用精确数学方法时，应当首先对所研究的对象给出一个精确的定义，然后才能在此基础上进行进一步的推理，最终取得正确的、合乎一般日常生活规律的结论。然而，要对日常生活中这个极其简单的秃与不秃问题进行精确定义却很难做到。现在我们不妨假设定义一个头发根数的界限 灶作为判断秃与不秃的标准。即对于任何人，当他的头发根数少于此界限时认为他是秃头，否则不秃。这样从精确方法上看是没有任何问题的。但是，假如有一个人的头发根数恰好比我们定义的界限多一根，即 灶垣员时，应认为他秃还是不秃呢？我们可能的选择有以下两种：

(员 承认精确方法，因此判断他是不秃的。但按照我们的生活常识，这样的判断却是极不合乎情理的。

(圆 承认生活常识，即认为仅一发之差不会改变秃与不秃的结果，所以，既然有 灶根头发者属秃头类，那么有 灶垣员根头发者也应是秃头。然而，采用传统的逻辑推理，便得到这样一系列命题：

头发为 灶根者为秃头。
头发为 灶垣员根者为秃头。
头发为 灶垣圆根者为秃头。
…………
头发为 灶垣噪根者为秃头。

这里的 噪仅限定它是一个有限整数。显然，噪完全可以取得很大。而根据生活常识，当 噪很大时，说明头发很多，从而得出一个荒谬的结论：“头发很多者为秃头”。采用类似的方法还可以相反的方向推出“没有头发者不是秃头”。

以上两种选择都表现出精确方法在这个问题上与常理对立的

情况。事实上，关于秃与不秃的界限灶根本不存在。我们还可以很容易地想出无数种类似于秃头悖论的其他悖论，例如朋友悖论、年龄悖论、身材悖论、饥饱悖论等等，这说明这类问题在现实世界中并非个别现象。

员怨远缘年查德（在葬凿藻澡）发表的著名论文“模糊集合”在科学界引起了爆炸性的反响，这篇文章的出现已被公认为模糊数学诞生的标志。查德是一名系统科学家，最初他与当时的绝大多数人一样相信的是精确的思维方法。他曾致力于将状态、稳定性、适应性等概念精确化，并且在这方面已经取得了一定的成果。然而，查德是一位富有批判和创新精神，并且具有求实态度的学者，他在研究实践中对复杂性、精确性、模糊性之间的尖锐矛盾有着充分的了解，虽然他不懂得用辩证法观点去分析这些矛盾，但他较其他人更早、更清楚地认识到精确方法的局限性，认识到在一定情况下精确数学方法将失去其常被人们以为具有的力量。他摒弃传统观念，力图寻求全新的观点和方法的思想曾在员怨远猿年的著作中初见端倪。查德在随后的研究工作中，准确地阐述了模糊性的含义，制定了刻划模糊性的数学方法（隶属度、隶属函数、模糊集合等），为模糊数学作为一门独立的学科建立了必要的基础。另外，更为可贵的是从模糊数学创立的开始，查德就将它与解决现代科学技术中的实际问题紧密地联系在一起，从实践中汲取思想营养，寻找动力源泉。因此，虽然模糊数学是一门新兴学科，到目前为止尚存在一些需进一步完善或解决的问题，但是它已经吸引了众多领域的专家学者从事这方面的理论和应用研究，从而使得模糊数学迅速发展成为当前十分活跃的学科之一。

员援圆摇模糊性

作为一门有关描述和处理模糊性问题的理论和方法的学科，我们首先应当掌握模糊数学的基本概念——模糊性。下面我们先对模糊性进行定性分析。

灵圆圆圆摇 模糊性基本概念

人们在认识事物时，总是根据一定的标准对事物进行分类。现实世界中的部分事物可以根据某种精确的标准对它们进行界限明确的认识，从而得出明确的是非断言。这类事物称为“清晰事物”。进一步说，对于任意给定的一个事物 曾和一类清晰事物 载，根据 载具有的精确标准 ——“类属”辨别出或者 曾属于 载或者不属于 载两者必居其一且仅居其一。例如，“行星”是一类清晰事物，因此，可以明确地断定：“地球”属于“行星”，而“鸡蛋”不是“行星”。清晰事物具有的这种明确类属特性称之为“清晰性”。

然而，在现实世界中，还有一类事物是无法找出它们精确的分类标准的，因此，我们也不可能作出“是”或“不是”，“属于”或“不属于”，“存在”或“不存在”等是非断言。例如，对于“高山”类，我们只能凭借感觉来断定一座山是否为高山，但是无法说出山高到什么程度才算是高山。这类事物的类属是逐步过渡的，即从属于某类事物到不属于某类事物（或从不属于某类事物到属于某类事物）是逐渐变化的，不同类别之间不存在截然分明的界限。因此，在不同的情况下或者对于不同的人都可能作出不同的归类结论。例如对于一座山，有人可以认为是高山，但可能也有人觉得它并不高。事物的这种不清晰类属特性称之为“模糊性”，并且将这类事物称为“模糊事物”。

换句话说，凡在类属问题上能判断或是或非的对象，就是清晰事物；凡在类属问题上只能区别程度、等级的对象，就是模糊事物。认识一个模糊事物类，在于了解各个对象隶属于它的资格程度，而不是简单的属于或不属于。模糊性是事物类属的不确定性，是对象资格程度的渐变性。

人们对事物进行分类都是以事物的某种性态（性质、特征、状态等）为标准的。清晰事物 是否具有某种性态是明确肯定的，而模糊事物则不然，它们往往在一定程度上具有某种性态，而又不完全具有那种性态。清晰性是事物性态的确定性，模糊性是事物性态的

不确定性。根据清晰性态对事物进行分类，得到的是界限分明的类别；而根据模糊性态对事物进行分类，则得到的是没有明确界限的类别。类属的不清晰性来源于性态的不确定性。摇

性态	类属	实例
清晰	界限分明	行星、整数、鸡蛋
不清晰	模糊	高山、优秀、胖子

事物性态和类属的不清晰性是现实世界中广泛存在的一种特征。例如人文社会科学考察的对象几乎都是模糊的，感性认识和理性认识、长篇小说和中篇小说、宏观与微观等，又如生理学和医学中的死亡现象、高烧、休克等等都没有清晰的分界限。在精确科学中也不乏模糊事物，例如物理学承认物体可以处于一种非液态又非固态的状态，化学中的大分子，天文学中黄光的星与白光的星之分类，数学中的邻域、充分小的实数等等概念。

所谓清晰性和模糊性的区别本身也是相对的、模糊的。严格地讲，现实世界中的事物都具有某种模糊性，所不同的仅在于其表现形式和程度。同一个事物在一方面可能是清晰的，而在另一方面却可能是模糊的。例如通常将人的性别视为清晰事物的典型，男女之别泾渭分明。但是，这仅是一般的现象，它有一定的局限性。在生理学中阴阳人问题的研究正是性别中的模糊现象。总之，在客观世界中，清晰性是相对的，而模糊性是绝对的。

与模糊性易混淆的几个概念

近似性、随机性、含混性是三种与模糊性不同的概念，但是对于初学者来说，在概念上很容易将它们与模糊性混淆。下面我们分别讨论这些概念的相同与不同之处。

模糊性与近似性

模糊性是一种描述的不精确性。长期以来，人们误认为模糊事物实质上是一种复杂的清晰事物，模糊性问题本身具有精确解，而只是由于问题过于复杂，现有的科学技术尚不能解决，因此暂时只

能得到近似解。这种观点的错误在于将模糊性与近似性混为一谈。事实上，近似仅仅是模糊现象中的一种，例如在实数范围内考虑从近似于 园到不近似于 园是连续变化的，在客观上不存在分界线，而只存在与 园的近似程度的不同。描述上的不精确性有不同的根源和表现形式：

问题本身有精确解，而描述它时的不精确性来源于认识条件的局限性和认识过程发展的不充分性。例如，在薄雾中观察远山，由于受限于客观条件，观察到的山轮廓是模糊的，因此我们也只能近似地描述山的形状。但是，实质上山本身具有清晰的轮廓。

问题本身无精确解，这时的不精确性自然来源于对象自身固有的性态上的不确定性。例如，观察一片秋叶时，无论采用如何先进的技术，我们都难以精确地认定它是何种颜色，而只能近似地描述叶子的颜色。之所以这样是因为深黄、黄、黄绿、浅绿、深绿等颜色的定义本身就是模糊的。

因此，对于模糊问题，无论科学技术如何发展，我们的研究如何深入，找出问题精确解的任何企图都将是徒劳的。

圜模糊性与随机性

模糊性和随机性是两种不同性质的不确定性，从质和量上比较，模糊性表现在质的不确定。随机性是在事件发生的不确定性中表现出来的条件上的不确定性；而事物本身的性态和类属是确定的。例如投掷硬币时，国徽面是否朝上是不确定的——随机的，但是每次的结果国徽面非上即下却是确定的。模糊性是事物本身性态和类属上的不确定性。例如未来某日的降雨量是随机变量，对这次降雨量做实际测试后的结果，即大雨、中雨或小雨却具有典型的模糊性。总之，随机性是一种外在的不确定性，模糊性是一种内在的不确定性。随机现象服从排中律，即在试验中，某事件的发生与不发生现象必居且仅居其一，不存在第三种现象。而模糊事件一般不服从排中律，它存在着多种、甚至无数种中间现象。然而，我们也可以将随机性视为一类特殊的模糊性，即事件发生的可能程度的渐变性。从信息观点看，随机性只涉及信息的量，而模糊性则关系

到信息的意义。模糊性是一种比随机性更深刻的不确定性，它的存在较随机性的存在更为广泛。特别是在主观认识领域，模糊性的作用比随机性的作用重要得多。

獉隭模糊性与含混性

另一种容易为人们混淆的概念是模糊性与含混性。查德以前的一些学者曾将模糊性当作含混性来研究，因而找不到解决问题的有效方法。查德提出必须弄清两者的区别，他认为，一个命题之所以是模糊的，原因在于所涉及的类本身是模糊的。例如命题“粤很高”是一个模糊命题，其根源在于“很高”是一种模糊类。而一个含混的命题既是模糊的，又是二义的，它对一个特定的目的只提供了不充分的信息。例如，依照命题“粤很高”是不能确定 粤应购买什么型号的衣服的，因为它的信息不充分。这时的命题既模糊又歧义，因而是含混的。应当注意，一个命题是否带有含混性与其应用对象或与上下文有关，而模糊性却非如此。如“粤很高”这个命题虽然对给 粤购买什么型号的衣服这个应用对象是含混的，但对给 粤选购一条领带却提供了足够的信息，所以这时虽然模糊但不含混。

员郾猿 模糊数学应用

模糊数学有着极为广泛的应用。例如在自然科学中，除本书将介绍的内容之外，模糊概率、模糊统计、模糊命题、模糊推理、模糊思维及模糊系统理论等等，都已经有了很好的应用。更进一步说，目前，模糊数学已经在计算机图像识别、手书文字自动识别、癌细胞识别、白血球的识别与分类、机器人控制、计算机医疗诊断、疾病预报、劳动卫生环境综合评判、各类信息的分类与评估、天气预报、气候模拟检验、气象资料分析与决策等等，不胜枚举。

模糊数学不仅在自然科学中有广泛的应用价值，甚至在社会科学中，乃至一些传统上数学不曾涉足的领域中也有着远大的应用前景。例如模糊语言、模糊概念，以及对特定的集体、个人在给定

因素方面的评价、分类、排序等等，其中不乏一些长期以来亟待解决但又无从解决的问题。

鉴于模糊数学有着如此广泛的用途，关于模糊数学的命名也有着不小的争论。例如有人认为“模糊数学”这一名称为“数学”束缚，而事实上它的研究远远地超出了传统数学所研究的领域，因此建议称其为“模糊学”，并且用英文表示为 零甜蹦踝摞也有人提出将其称为“模糊理论”、“模糊集合和系统”、“模糊论”、“弗晰学”（英文 零甜蹦译音） 等等 ，各有各的特点。然而，作者认为，名称不过是客观事物的一个代号，只要基本能够反映它的部分特性就能认可。例如对于 悦赃责憨我们已习惯称其为计算机，但它在实际的应用中，真正用于科学计算只占极小的比例，所以“计算机”这个名字并不十分贴切。然而，在大家都对它有了一定了解的今天，一般人并不会因为它的名称而认为它仅能用于计算。所以，在本教材中，仍将沿袭我国已习惯的称呼 —— 模糊数学。

练　　习

员郾模糊性是否就是不清晰性？说明理由。
圆郾模糊性与随机性有哪些异同？举例说明。
猿郾模糊性和含混性有哪些异同？举例说明。
源郾模糊性和近似性有哪些异同？举例说明。
缘郾举例说明模糊数学在日常生活与工作中的应用。

第二章摇模糊集合

圆援员摇经典集合论概述

由于模糊集合是建立在经典集合的基础之上，并且由此发展起来的。所以，作为模糊数学的预备知识，在讨论模糊集合之前，本节将首先简略地介绍经典集合论中与模糊数学关系密切的内容。如果读者已经对经典集合论比较熟悉，则可以越过本节内容，直接从下节开始学习。

圆援员援员摇集合的基本概念

集合的概念是数学中最基本的概念之一，正如在几何学中难以给出点、直线的确切定义一样，在集合论中对集合也很难作出一个十分确切的定义。但是为了明确起见，下面还是给出一个一般的描述性的定义。

定义圆援员摇具有某种共同性质的事物的全体称为“集合”，而每一个别事物称为该集合的“元素”。

由以上定义可知，集合是由元素组成的，它可以理解为存在于世上的任何客观物体——无论是具体的还是抽象的。例如，诸如地球、人、花、桌子、分子等实体，诸如整数、四边形、软件、资本主义等概念，诸如鬼、耶稣、疼痛、占有、坚持等意念。事实上，集合与一个概念在人脑中的形成密切相关。一个概念的形成大致需要经过两个方面：一方面是从内在条件把握各个有关因素对这个概念所作的规定，即此概念的内在涵义，我们将其称为概念的“内涵”；另一方面就是此概念所包含的东西，换言之就是符合此概念的事物

全体，我们称其为概念的“外延”。内涵与外延是刻画概念的两个方面，它们是相辅相成的。

简言之，外延实际上是表现概念的一个集合。

集合的元素可以任意多，并且一些完全毫不相关的事物都可以是同一集合中的元素。例如 杂越 {员马，地球，女，青菜} ，但事实上这种集合通常都对我们研究问题毫无意义。在实际中，我们讨论问题时总是限制在一定的范围之内进行的。例如，当考虑“计算机”、“软件”等问题时，通常决不会将它们与性别、地上有多少沙粒、艾滋病等毫不相关的事物一起讨论。所以在讨论集合前常常需要首先给出我们研究的对象范围——“论域”。论域本身是一种特殊的集合，它的选取一般不唯一，应根据具体研究的需要而定。例如，讨论部分正整数集合时，论域通常可取自然数集合或整数集合，也可取实数集合，甚至正整数集合本身。

例 園雲遥 下面是几个具体的集合实例：

① 计算机集合由各种型号的计算机组成，不同型号的计算机是此集合的元素；

② 在人类构成的集合中，每个人是该集合的元素；

③ 全体实数可定义为一个集合，而任何实数均是这个集合中的元素；

④ 赵钱孙李周吴郑王等元素构成了中国的姓氏集合；

⑤ 在“所有到过火星的人”构成的集合中，目前尚无任何元素。

在我们讨论的论域中选出一个元素 葬同时给定一个集合 粤则 葬或者“属于”粤或者“不属于”粤两者必居其一，并且只居其一。这就是经典集合论的基本要求。以后我们将看到，这一基本要求在模糊集合论中将被破坏。当 葬属于”粤时记为 葬∈ 粤而当 葬不属于”粤时记为 葬∉ 粤

由例 園雲可看出，集合不仅可以包罗万象，而且其元素数目可以是有限的（例 園雲①②④），也可以是无限的（例 園雲③），还可以是零（例 園雲⑤）。下面是几种常用的集合分类：

摇摇·当一个集合中的元素数目有限时，称其为“有限集合”，否则为“无限集合”。

·设 杂为无限集合，若 杂与自然数集合 晕之间存在 员原员对应的关系，则称 杂为“可列集合”，否则称其为“不可列集合”。

·不含任何元素的集合称为“空集”，记为 ϕ；含有论域中所有元素的集合称为“全集”，记为 哉。

定义 圆援圆援猿 设 杂是论域 哉中的集合，则 杂的特征函数 悦$_{杂}$(曾) 定义为

$$悦_{杂}(曾) 越\begin{cases} 园 & 曾\notin 杂 \\ 员 & 曾\in 杂 \end{cases}$$

显然，特征函数是一个布尔函数。图 圆援员给出了一个论域 哉中简单集合 杂的集合特征函数曲线，容易看出，论域中属于 杂的元素 曾的特征函数值均为 员，而不属于 杂的元素，其特征函数值为 园，并且绝不存在特征值介于 园和 员之间的任何元素。特征函数对将经典集合论推广到模糊集合论起到了极为重要的作用。

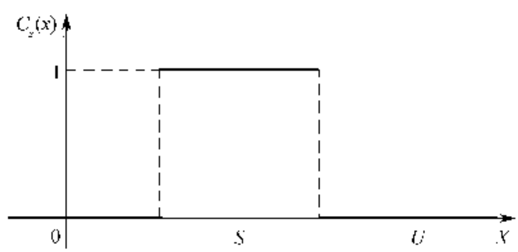

图 圆援猿 论域 哉中集合 杂的特征函数曲线

常见的集合表示方法有以下几种：

员援枚举法

对于元素不多的集合，可以将它的所有元素都一一列出，例如

“大于 圆小于 远的整数集合” 越 ｛猿，源，缘｝

使用这种方法时，常常还能以某种明显的顺序规律，仅列出部分元素，而将集合中的其他一些元素隐含表示，从而能够表示出部分元素数目无限的集合。例如