图书在版编目(CIP)数据

名师辅导奥赛教程/初中数学/单墫总主编:—长春:长春出版社,2003.6
ISBN 7-80664-534-9

Ⅰ.名... Ⅱ.单... Ⅲ.数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 042010 号

责任编辑:杨爱萍　封面设计:尹小光

长春出版社出版
(长春市建设街 1377 号)
(邮编 130061　电话 8569938)
长春博文印刷厂照排室制版
长春市新世纪印刷厂印刷
新华书店经销
880 毫米×1230 毫米　32 开本　13 印张　500 千字
2003 年 7 月第 1 版　2003 年 7 月第 1 次印刷
印数:1—10 000 册　定价:18.80 元

第1章 实　　数

第一单元　整数的基本知识

知识·规律·方法

1. 数的十进制表示

在社会劳动实践中，人类根据需要创造了多种进位制的计数方法，如二进制、十进制、十六进制等．在计算机中的二进制只有两个数码 0、1，日常生活中的十进制有 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 十个数码，按照满十进一的原则，表示一切整数．例如十进制数 $N=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0}=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0$ 或表示为 $N=10\times\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1}+a_0$.

2. 数的整除性

对于两个整数 a、b（$b\neq0$），若存在一个整数 n，使 $a=bn$ 则称 b 整除 a 或 a 被 b 整除，记作 $b\mid a$；若 b 不整除 a，记作 $b\nmid a$.

3. 规律与方法

（1）若 $a\mid b$，$b\mid c$，则 $a\mid c$；

（2）若 $c\mid a$，$c\mid b$ 则 $c\mid ma+nb$，特别地，$c\mid a-b$，$c\mid a+b$；

（3）若 $a+b=c+d$，$e\mid a$，$e\mid b$，$e\mid c$，则 $e\mid d$；

（4）若 $b\mid a$，$c\mid a$，则 $[b,c]\mid a$；

（5）若 $b\mid a$，$c\mid a$，且 $(b,c)=1$，则 $bc\mid a$；

（6）若 $c\mid ba$，$(a,c)=1$，则 $c\mid b$；

（7）若 $a\neq b$，n 为自然数，则 $a-b\mid a^n-b^n$；

（8）若 $a\neq-b$，n 为正偶数，则 $a+b\mid a^n-b^n$；若 $a\neq-b$，n 为正奇数，则 $a+b\mid a^n+b^n$.

4. 整数整除性的特征

（1）被 2 整除的特征：个位数字是偶数；

（2）被 5 整除的特征：个位数字是 0 或 5；

（3）被 4 整除的特征：末两位数能被 4 整除；被 25 整除的特征：末两位数能被 25 整除；

解析　$A\times100+\overline{ab}$，所以 $\overline{ab}$ 能被 4，25 整除即可.

（4）被 8 整除的特征：末三位数能被 8 整除；被 125 整除的特征：末三位数能被

125 整除；

解析 $A\times1000+\overline{abc}$，所以$\overline{abc}$能被 8，125 整除即可.

（5）被 3 整除的特征：各位数字的和被 3 整除；被 9 整除的特征：各位数字的和能被 9 整除.

解析 $\overline{abcd}=a\times1000+b\times100+c\times10+d=9(111a+11b+c)+a+b+c+d$

$9\mid\overline{abcd}\Leftrightarrow9\mid a+b+c+d$.

（6）能被 11 整除的特征：奇位数字的和与偶位数字的和之差能被 11 整除；

解析 $\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d$

$=1001a+99b+11c-a+b-c+d$

$\therefore11\mid\overline{abcd}\Leftrightarrow11\mid a-b+c-d$.

（7）能同时被 7、11、13 整除的特征：奇位千进位的总和与偶位千进位的总和之差能被 7 或 11 或 13 整除.

范例·解析·拓展

例 1 若一个首位数字为 1 的六位数$\overline{1abcde}$乘以 3 所得的是一个末位为 1 的六位数$\overline{abcde1}$，求原来的六位数.

解析 方法一 观察算式

$$\begin{array}{r}\overline{1abcde}\\ \times3\\ \hline \overline{abcde1}\end{array},$$

因为 3 只有乘以 7，其积的末位数字为 1，所以 $e=7$，且进于十位，这说明 3 乘以 d 得到一个末位数字为 5 的整数，所以 $d=5$，且进于百位，用这种方法依次推算下去，可得六位数为 142857.

这种方法需要有较强的观察、分析、推理能力.

方法二 设$\overline{abcde}=x$，$\overline{1abcde}=1\times10^5+\overline{abcde}=10^5+x$，$\overline{abcde1}=10x+1$，所以 $3(10^5+x)=10x+1$，解得 $x=42857$，所以原来的六位数为 142857.

这种方法用整数的十进制表示方法，运用方程的思想解决问题，思路清晰.

拓展一 一个数的末位数字为 7，若将 7 移到头一位去，其它数字的顺序不变，则所得的新数是原数的 7 倍，求该数中的最小者.

答案提示 设原数为$\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_17}$，$x=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1}$，则原数为 $10x+7$，新数为 $10^n\cdot7+x$，得 $10^n\cdot7+x=7(10x+7)$，于是数 $700\cdots0$ 被 69 除，遇到的第一个余数为 49 的数，计算得到 $x=10144927536231884057 9$，所求的最小数是 1014492753623188405797.

拓展二 试确定最小的正整数 n，其末位数字为 6，若将末位数的 6 移作首位数字，则为原数的 4 倍.

答案提示 设 n 是 k 位数，

$n=\overline{a_ka_{k-1}\cdots a_26}$，

$\therefore 120 \mid n(n^2-1)(n^2-5n+26)$.

例 4 **九位数** $32*35717*$ **能被 72 整除，其中每一个** $*$ **代表一个数码，求这个九位数.**

解析 设九位数 $x=\overline{32a35717b}$，若 x 能被 72 整除，则一定能被 8 和 9 整除. 若被 9 整除，则 $3+2+a+3+5+7+1+7+b$ 能被 9 整除，所以 $a+b=8$ 或 17；若被 8 整除，则$\overline{17b}$能被 8 整除，则 $b=6$，因此 $a=2$，$x=322357176$.

拓展一 **能被 33 整除的六位数$\overline{19xy87}$的个数是多少？**

答案提示 能被 33 整除的数一定能被 3 整除，也能被 11 整除.

即满足 $\begin{cases}1+9+x+y+8+7=3k\\1-9+x-y+8-7=11m\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=3k-25\\x-y=11m+7\end{cases}$

因为 $0\leqslant x\leqslant 9$，$0\leqslant y\leqslant 9$，$\therefore 0\leqslant x+y\leqslant 18$，$-9\leqslant x-y\leqslant 9$，于是 $x+y$ 可取 2，5，8，11，14，17，$x-y$ 可取-4，7，检查组成的十二个二元一次方程组，满足条件的解有 $\begin{cases}x=2\\y=6\end{cases}$，$\begin{cases}x=5\\y=9\end{cases}$，$\begin{cases}x=9\\y=2\end{cases}$，故本题答案是 3.

拓展二 **证明由数字 0、1、2、3、4、5 组成的不重复六位数不可能被 11 整除.**

答案提示 设组成的六位数是$\overline{a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$，若能被 11 整除，则 $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5=11n$，（$n$ 为整数）

$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=11n+2(a_1+a_3+a_5)$

由 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=15$，$\therefore 2(a_1+a_3+a_5)=15-11n$

$\therefore n=-1$，$a_1+a_3+a_5=13$，不符题意（最大 $3+4+5=12$）

$n=0$，$2(a_1+a_3+a_5)=15$，不符题意（左偶右奇）

$n=1$，$a_1+a_3+a_5=2$，不符题意（最小 $0+1+2=3$）

n 为其他整数也不可能，故结论成立.

或 $(0+1+2)-(3+4+5)\leqslant 11n\leqslant(3+4+5)-(0+1+2)$，
$-9\leqslant 11n\leqslant 9$，$\therefore n=0$.

拓展三 **用 0，1，2，3，…9 这十个不同的数字组成能被 11 整除的十位数，求出这类数中的最大者和最小者.**

答案提示 先求能被 11 整除的最大十位数.

设十位数的五位奇数位的数字和为 x，五位偶数位的数字和为 y，所以 $x+y=45$.

又由能被 11 整除的数的特征，$x-y$ 能被 11 整除，$|x-y|=0$，11，22，又因为 $x+y$ 是奇数，所以 $x-y$ 也是奇数，所以 $|x-y|=11$，由此得出 $x=28$，$y=17$，或 $x=17$，$y=28$.

为了排出最大的十位数，在前几位数字尽量取 9，8，7，6.

若前四位数为 9876，则 $9+7=16$，$8+6=14$，可知 $x\neq 17$，只有 $x=28$，$y=17$.

所以除 9，7 外，另三位奇数位的数字和是 $28-16=12$；除 8，6 外，另三位偶数位

的数字和为 $17-14=3$，所以偶数位的数字只能取 2，1，0，从而奇数位的数字取 5，4，3. 由此得到的能被 11 整除的最大的十位数是 9876524130.

同样的方法得到最小的十位数是 1024375869.

例 5 证明整数 A 能被 13 整除的条件是：划去个位数后所得的数加个位数的 4 倍能被 13 整除.

解析 设 A 的个位数为 b，划去个位数后所得的数是 k，则 $A=10k+b$，划去个位数后所得的数加个位数的 4 倍所得的数是 $A'=k+4b$，就要证明若 $A'=k+4b$ 是 13 的倍数，则 A 也是 13 的倍数. $\because A-10A'=10k+b-10k-40b=-39b$，

即 $A=10A'-39b$，所以若 $13 \mid A'$，则 $13 \mid A$.

拓展一 若 a，b，c，d 是互不相等的整数且整数 x 满足等式

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)-9=0$$

证明：$4 \mid a+b+c+d$.

答案提示

$\because (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=9$

$9=1\times3\times(-3)\times(-1)$

$(x-a)$，$(x-b)$，$(x-c)$，$(x-d)$

是互不相同的整数，

$\therefore x-a$，$x-b$，$x-c$，$x-d$ 的值是 1，-1，-3，3，

$\therefore (x-a)+(x-b)+(x-c)+(x-d)=0$，

$\therefore a+b+c+d=4x$，

$\therefore 4 \mid a+b+c+d$.

拓展二 在体育彩票销售活动中，若买到的奖券的六位数号码前三位与后三位数字完全相同，则可以得到大奖，试证明得奖的奖券的号码能被 13 整除.

答案提示 设中奖的奖券的号码为 $A=1000a+a$，所以 $A=1001a$，$1001=11\times13\times7$，故 A 是 13 的倍数.

拓展三 173__是个四位数，在这个空格处先后填入 3 个数字，所得的 3 个四位数，依次被 9、11、6 整除，求先后填入的 3 个数字的和是多少？

答案提示 解此题的关键是，怎样的自然数能被 9，11，6 整除？其中能被 6 整除的数是能被 3 整除的偶数.

因为能被 9 整除的数的各位数字的和能被 9 整除，$1+7+3=11$，所以应填入 7.

能被 11 整除的数的奇数位的和与偶数位的和的差是 11 的倍数，设填入 x，则 $7+x-1-3=3+x$ 是 11 的倍数，所以 $x=8$.

能被 3 整除的数的各位数字的和能被 3 整除，因为 $1+7+3+x=11+x$，故 $x=4$（x 只能为偶数）. $x=8$ 不合条件，舍去.

例 6 三个连续奇数的平方和加 1，能被 12 整除，但不能被 24 整除.

解析 设三个连续的奇数是

$2n-1$，$2n+1$，$2n+3$，则 $(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2+1=12(n^2+n+1)$

$\because n^2+n+1=n(n+1)+1$ 是奇数，所以 $12(n^2+n+1)$ 能被 12 整除，不能被 24 整除.

拓展 证明对一切整数 n，$n^2+2n+12$ 不是 121 的倍数.

答案提示 因为 $n^2+2n+12=(n+1)^2+11$，若 $121 \mid (n+1)^2+11$，则一定有 $11 \mid (n+1)^2+11$，$\therefore 11 \mid (n+1)^2$，$\because 11$ 是质数，$11^2 \mid (n+1)^2$，所以 $121 \mid 11$，这是不可能的，故结论成立.

检测·反馈·应用

一、选择题

1. 一个六位数，如果它的前三位数码与后三位数码完全相同，顺序也相同，则此六位数可以被(　　)整除

A. 111　　B. 1000　　C. 1001　　D. 1111

2. 在十进制表示的数中，若个位数字和百位数字互换时，该数不变，这些数中存在一个最大的偶三位数，这个偶三位数的数字之和为(　　)

A. 23　　B. 24　　C. 25　　D. 26

3. 从 1 到 1000 的整数中，能被 5 整除或能被 7 整除的数有(　　)个

A. 316　　B. 314　　C. 342　　D. 344

4. 下列各数中能被 9 整除的数是(　　)

A. 60847　　B. 3514　　C. 31196　　D. 71235

5. 已知五位数 $\overline{4x97x}$ 能被 3 整除，它的最末两个数字组成的两位数能被 6 整除，则 x 所代表的数字是(　　)

A. 2 或 6　　B. 2 或 8　　C. 4 或 6　　D. 4 或 8

6. 设 p 是任意三个相邻的正奇数的积，则能整除所有这样的 p 的最大整数是(　　)

A. 15　　B. 6　　C. 5　　D. 3

7. 已知 m 是被 3 除余 1，被 7 除余 5，被 11 除余 4 的最小自然数，则 m 被 4 除余(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

8. 设六位数 $N=\overline{x1527y}$ 是 4 的倍数，且 N 被 11 除余 5，那么 $x+y$ 的值为(　　)

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 11

二、填空题

9. 五位数 $\overline{abcde}$ 是 9 的倍数，其中 $\overline{abcd}$ 是 4 的倍数，那么 $\overline{abcde}$ 的最小值是________.

10. 若自然数 n 的各位数字之和为 527，则 n 的最小值是________.

11. 一个两位数被 7 除余 1，如果交换它的十位与个位数字的位置，所得的两位数被 7 除余 1，那么这样的两位数有________个，它们是________.

上的只能是 8，所求的$\overline{abcde}$的最小数是 10008.

10. 如果是两位数，数字之和最多是 18；如果是三位数，数字之和最多是 27；……如果是 58 位数，数字之和最多是 522，因此这个数一定是 59 位数. 要使 n 最小，$n=5\underbrace{99\cdots9}_{58个9}$.

11. 设十位数字为 x，个位数字为 y，并设 $10x+y=7m+1$，$10y+x=7n+1$，则有 $9(x-y)=7(m-n)$，可知 $x=y$ 或 $x-y=\pm7$. 当 $x=y$ 时，$x=y=2$ 或 $x=y=9$；当 $x-y=7$ 时，$x=9$，$y=2$；当 $x-y=-7$ 时，$x=2$，$y=9$. 共有 4 个，这样的两位数为 22、99、92、29.

12. 因为 $111111=15873\times7$，$2000=333\times6+2$，所以$\underbrace{111\cdots1}_{2000个}$被 7 除的余数与 11 被 7 除的余数相同，而 11 被 7 除余数为 4，所以从今天算起，到第$\underbrace{111\cdots1}_{2000个}$天是星期三.

13. $99=9\times11$，所以$\overline{62xy427}$能被 9 和 11 整除. $9\mid 6+2+x+y+4+2+7$ 即 $9\mid x+y+21$，$11\mid 6+x+4+7-(2+y+2)$ 即 $11\mid 13+x-y$.

设$\begin{cases}21+x+y=9h,\\13+x-y=11k.\end{cases}$得到$\begin{cases}x+y=9h-21,\\x-y=11k-13.\end{cases}$因为 $0<x+y\leqslant18$，$-9<x-y\leqslant9$，

所以$\begin{cases}0<9h-21\leqslant18, & \dfrac{7}{3}<h\leqslant\dfrac{13}{3},\\-9<11k-13\leqslant9, & \dfrac{4}{11}<k\leqslant2\end{cases}$所以 $h=3$，4. $k=1$，2.

由方程组解出$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(9h+11k-34)\\y=\dfrac{1}{2}(9h-11k-8)\end{cases}$可以知道 h，k 同奇同偶.

所以$\begin{cases}h=3,\\k=1,\end{cases}$或$\begin{cases}h=4,\\k=2.\end{cases}$代入求出$\begin{cases}x=2,\\y=4,\end{cases}$或$\begin{cases}x=12,\\y=3.\end{cases}$（舍去），所以$\overline{xy}=24$.

14. 8 个. 因为能被 11 整除的数的奇数位数字和与偶数位数字的和之差能被 11 整除，而 $6+9=7+8$，差为 0，能被 11 整除. 组成的四位数为 6798，6897，9768，9867，8976，8679，7986，7689.

15. $\overline{abcd}=25c^2+10c+1$，即

$a\times10^3+b\times10^2+10c+d=25c^2+10c+1$，$a\times10^3+b\times10^2-25c^2=1-d$.

所以 25 能整除 $1-d$，将 $d=1$ 代入上式得到 $c^2=4(b+10a)$，所以 c 是偶数，设 $c=2k$（k 是整数），则 $k^2=b+10a$，所以只有 $b=6$，$a=1$，$d=1$，$c=8$，$k=4$. 所求的四位数是 1681.

16. 因为 $24=3\times8$，且 3 与 8 是互质的，下面只要证明 $3\mid p^2-1$ 和 $8\mid p^2-1$.

先证明 $3\mid p^2-1$.

设 $p=3k+1$，或 $p=3k+2$.

当 $p=3k+1$ 时，$p^2-1=3(3k^2+2k)$，$3\mid p^2-1$；

当 $p=3k+2$ 时，$p^2-1=3(3k^2+4k+1)$，$3\mid p^2-1$.

再证明 $8\mid p^2-1$. 因为 p 是大于 3 的质数，所以 p 是奇数，设 $p=2k+1$，$p^2-1=$

$4k(k+1)$，因为 $2\mid k(k+1)$，所以 $8\mid p^2-1$.

17. $\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{15}x=\frac{3x^5+5x^3+7x}{15}$. 其中 $3x^5+5x^3+7x$

$=3(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)+5(x-1)x(x+1)+15x+15x(x-1)(x+1)$，容易得到是 15 的倍数.

18. $\overline{xyz}=100x+10y+z=100(7-y-z)+10y+z=700-90y-99z$.

当 $y=z$ 时，$\overline{xyz}=700-189y$，结论成立；

当 $7\mid\overline{xyz}=7\mid 700-91y-98z+(y-z)$，所以 $7\mid y-z$. 再由 $x+y+z=7$ 知 $0\leqslant y<7$，$0\leqslant z<7$，$-7<y-z<7$，所以 $y-z=0$.

第二单元　奇数与偶数

知识·规律·方法

1. 奇数和偶数的概念

在整数中，能被 2 整除的数叫做偶数，不能被 2 整除的数叫做奇数. 偶数一般用 $2n$ 表示，奇数用 $2n-1$，$2n+1$ 表示（n 为整数）.

2. 奇数和偶数的性质

（1）奇数与偶数不可能相等；奇数±奇数＝偶数；

（2）奇数±偶数＝奇数；偶数±偶数＝偶数；

（3）奇数个奇数的和是奇数；偶数个奇数的和是偶数；

（4）若 a，b 为整数，则 $a+b$ 与 $a-b$ 有相同的奇偶性；

（5）两个连续的整数中，必有一个奇数，一个偶数；三个连续的整数中，至少有一个奇数，一个偶数；

（6）奇数×奇数＝奇数，奇数×偶数＝偶数，偶数×偶数＝偶数（4 的倍数）；

（7）若干个整数的积为奇数，则每一个数为奇数；若干个整数的积为偶数，则至少有一个偶数.

（8）奇数的平方为 $4k+1$ 型的数；偶数的平方为 $4k$ 型的数；

（9）n 个偶数的积必为 2^n 的倍数；

（10）若 n^2 为偶数，则 n 为偶数；若 n^2 为奇数，则 n 为奇数.

3. 奇偶数的特殊表示法

奇数与偶数是以被 2 除的余数为 1 和 0 进行分类的，这种分类只有两类，即用整数的两种状态研究整数. 在解题时可以用另外的两种状态来表示奇数与偶数. 如用红色代表奇数，黄色代表偶数，即用染色的方法研究奇数与偶数；用 0 代表偶数，1 代表奇数；或 $+1$ 代表偶数，-1 代表奇数即赋值进行奇偶分析.

求证：$(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\cdots(1-a_n)$ 必为偶数.

解析 ∵a_1，a_2，a_3，…，a_n 为 1，2，3，…，n 的任一种排列，则 $(1-a_1)$，$(1-a_2)$，$(1-a_3)$，…，$(1-a_n)$ 中至少有 1 个偶数.

所以 $(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\cdots(1-a_n)$ 必为偶数.

拓展 设有 n 个实数 x_1，x_2，x_3，$\cdots x_n$，其中每一个不是 $+1$ 就是 -1，且 $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}=0$. 求证：$n$ 是 4 的倍数.

答案提示 由于 x_1，x_2，$x_3\cdots x_n$ 不是 $+1$ 就是 -1，设有 a 个 $+1$，b 个 -1，则 $a+b=n$，$a-b=0$，所以 $a=b=\frac{n}{2}$. 又因为 $\frac{x_1}{x_2}\frac{x_2}{x_3}\cdots\frac{x_{n-1}}{x_n}\frac{x_n}{x_1}=1$，所以 $(-1)^b\cdot 1^a=1$，即 b 是偶数，设 $b=2k$，所以 $n=4k$.

例 5 设 a，b，c 是三个互不相等的正整数，求证：在 a^3b-ab^3，b^3c-bc^3，c^3a-ca^3 三个数中，至少有一个数能被 10 整除.

解析 因为 $a^3b-ab^3=ab(a^2-b^2)$，$b^3c-bc^3=bc(b^2-c^2)$，

$c^3a-ca^3=ac(c^2-a^2)$.

易知上面三个数都是偶数；

(1) 当 a，b，c 中有一个是 5 的倍数时结论成立.

(2) 当 a，b，c 中没有一个是 5 的倍数时，则 a^2，b^2，c^2 的个位数字是 1，4，6，9，所以 a^2-b^2，b^2-c^2，c^2-a^2 的个位数字是从 1，4，6，9 中任取两个相减必有 0 或 5，所以三个数一定能被 2 和 5 整除，而 2 和 5 互质，所以结论成立.

说明：注意分类讨论.

拓展 设 a，b 是两个相邻的整数，$c=ab$，$M^2=a^2+b^2+c^2$. 求证：M^2 是奇数.

答案提示 设 $a=n$，$b=n+1$（n 为整数），则 $c=n(n+1)$. 于是 $M^2=n^2+(n+1)^2+n^2(n+1)^2$，因为 $n^2(n+1)^2$ 是偶数，$n^2+(n+1)^2$ 是奇数，所以 M^2 是奇数.

例 6 能否把 1，1，2，2，3，3，…，1986，1986 这些数排成一行，使得两个 1 之间夹着一个数，两个 2 之间夹着两个数，…两个 1986 之间夹着 1986 个数？试证明你的结论.

解析 把已知的 3972 个数排成一行，并且每一个数对应一个位置，在这些位置上编上 1，2，3，4，…，3972 号码.

(1) 先考察两个偶数 m 之间夹 m 个数. 若一个 m 在奇数号位置上，则另一个 m 在偶数号位上. 由于共有 993 对偶数，所以所有的偶数恰好占住 993 个偶数号码位置，993 个奇数号码位置上；

(2) 再考察两个相同的奇数 n. 两个奇数 n 之间夹着奇数个数，则只要有一个占住奇数位置，则另一个一定占住奇数位置. 所以设所有的奇数占住 $2k$ 个奇数位置，$1986-2k$ 个偶数位置. 则 $1986=993+2k$，矛盾！所以这是不可能的.

说明：用反证的方法，能够很好地解决问题.

拓展一 在黑板上写上 1，2，3，4，…，2002，只要在黑板上还有两个或两个以上的数就擦取其中的任意两个数 a，b，并写上 $|a-b|$，问黑板上剩下的数是奇数还是偶数？

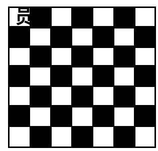
答案提示 由于只讨论数的奇偶性，而不是求它们的具体数值．在不改变奇偶性的前提下，可将产生这些数的过程改变，使问题容易解决．因为 $a+b$ 与 $|a-b|$ 有相同的奇偶性，所以每次写上 $a+b$ 而不是 $|a-b|$，那么最后剩下的数与我们所求的数的奇偶性相同．因为 $1+2+3+\cdots+2002=\dfrac{2003\times2002}{2}$ 是奇数，所以最后剩下的数是奇数．

拓展二 是否存在整数 a，b，c，d，使得对所有的整数 x，等式 $x^4+2x^2+1992x+30=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ 成立？

答案提示 等式右边 $=x^4+(a+c)x^3+(b+d+ac)x^2+(ad+cb)x+bd$，根据题意得到 $\begin{cases}a+c=0, & ①\\ b+d+ac=2, & ②\\ ad+cb=1992, & ③\\ db=30. & ④\end{cases}$ 由④知道 b，d 一个是奇数，一个是偶数，不妨设 b 是奇数，d 是偶数，所以 ad 是偶数，由③知道 bc 是偶数，所以 c 是偶数，即 ac 是偶数．

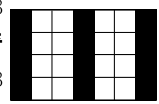
由②知道 ac 是奇数，与上面的结论矛盾！所以题中所要的 a，b，c，d 不存在．

例 7 某展览会有如图 $7\times7=49$ 间展厅，相邻展厅有门可通，参观者从图中的 1 号展厅开始参观，希望依次不重复，也不遗漏的参观每一个展厅，并且回到 1 号展厅，试问参观者的愿望能否实现？



解析 将 1 号厅涂上白色，相邻的涂上黑色，如图，用黑白相间的方法涂色，显然只能从白厅进入黑厅，从黑厅进入白厅，从 1 号厅出来，再回到 1 号厅，必须经过 49 次回到 1 号厅，经过观察发现第奇数次进入黑厅，第偶数次进入白厅．这显然是不可能的．

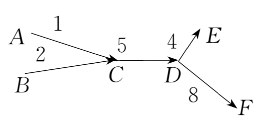
拓展 证明：只用 2×2，3×3 的两种瓷砖不能恰好铺盖 23×23 的正方形地面．



答案提示 将 23×23 的正方形的第 1，4，7，10，13，16，19，23 列涂上黑色，其余的涂上白色，于是白色方格的个数有 15×23 个，是奇数．因为每个 2×2 的方格盖住二黑二白，或四个白色格子，每个 3×3 盖住三黑六白，无论如何总盖住偶数个白色格子，所以结论成立．

说明：染色是一种分类的方法，形象而易懂．

例 8 在一个国家里，国王要建 n 个城市，并在它们之间建 $n-1$ 条道路，使得从每一个城市可到任一个城市（每条道路连接两个城市，道路不相交也不经过其他城市），国王要求每两个城市间的最小路程分别等于 1 千米，2 千米，3 千米，$\cdots\dfrac{1}{2}n(n-1)$ 千米，这样的要求能否做到？(1) $n=6$　(2) $n=2002$



解析 (1) 当 $n=6$ 时如图具体如下：$A-C$ (1)，$B-C$ (2)，$A-C-B$ (3)，$D-E$ (4)，$C-D$ (5)，$A-C-D$ (6)，$B-C-D$ (7)，$D-F$ (8)，$C-D-E$ (9)，$A-C-D-E$ (10)，$B-C-D-E$ (11)，$E-D-F$ (12)，$C-D-F$ (13)，$A-C-D-F$ (14)，$B-C-D-F$ (15)．

（2）当 $n=2002$ 时，在 n 个城市之间建 $(n-1)$ 条道路，从任一城市到另一城市的道路只有一条道路．考虑任一城市 A，将城市 A 染成红色．若城市 B 与 A 之间的路程为偶数是 4，则 B 也染上红色，否则染上黄色，这样将所有的城市都染上红色与黄色，则同色的城市之间的路程为偶数，异色的城市之间的路程为奇数．

设 x 个城市染上红色，y 个城市染上黄色，则 x 个红色与 y 个黄色可配 xy 对，在所有的城市之间的路程数为 xy 个奇数．

①若 $\frac{n(n-1)}{2}$ 为偶数时，则 1，2，3，…，$\frac{n(n-1)}{2}$ 中有一半为奇数，一半为偶数．

所以 $\frac{n(n-1)}{4}=xy$，又 $x+y=n$，所以 $n=n^2-4xy=(x-y)^2$．

②若 $\frac{n(n-1)}{2}$ 为奇数时，$\frac{n(n-1)}{4}+\frac{1}{2}=xy$，得到 $n-2=(x-y)^2$，所以 n，$n-2$ 是完全平方数，而 $n=2002$ 是不可能的．

拓展　某县初中生参加数学竞赛，竞赛题共 30 道．评分标准是：基础分 15 分，答对一道加 5 分，不答记 1 分，答错一道倒扣 1 分，请说明该县 185 名同学参赛，那么所有同学的得分总和一定是奇数．

答案提示　每个学生答对所有的题的得分是 $15+5\times30=165$，若答错一题扣去 6 分，不答扣去 4 分，扣去的数总是偶数，所以每个学生的得分总是奇数，185 名学生参赛，总分是奇数．

检测·反馈·应用

一、选择题

1. 如果 m 是正整数，则 $\frac{1}{8}[1-(-1)^m](m^2-1)$（　　）

A. 一定是奇数

B. 一定是偶数

C. 当 m 是奇数时，该式是偶数；当 m 是偶数时，该式是奇数

D. 当 m 是奇数时，该式是奇数；当 m 是偶数时，该式是偶数

2. 设 n 是一个整数，若 $3n^2+4n+2003$ 是一个偶数，则 n 一定是（　　）

A. 奇数　　B. 偶数

C. 任意整数　　D. 有时为奇数，有时为偶数

3. 3 个连续奇数的和能被 m 整除，则 m 的值一定是（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

4. 设 a，b 是整数，给出四个命题：

（1）若 $a+5b$ 是偶数，则 $a-3b$ 也是偶数

（2）若 $a+5b$ 是奇数，则 $a-3b$ 也是奇数

（3）若 $a+b$ 能被 3 整除，则 a，b 能被 3 整除

个．但 $b_1b_2b_3\cdots b_n=a_1a_2a_3\cdots a_n$，所以 $(a_1a_2\cdots a_n)^2=1$，从而 -1 的个数为偶数，与题设矛盾！结论成立．

第三单元　素数与合数

知识·规律·方法

1．全体正整数可以分成三类

（1）素数：一个大于 1 的正整数，如果它的因数只有 1 和它本身，则称为素数．

（2）合数：一个大于 1 的整数，如果它的因数超过 2 个，即有不同于 1 和它本身的因数，则称为合数．

（3）素因数：如果一个正整数的一个因数是素数，则叫素因数．

（4）单位数：数 1 既不是素数，也不是合数．

2．素数与合数的性质

（1）素数与合数有无穷多个，最小的素数是 2，但不存在最大的素数．

（2）除 2 以外的全体素数都是正奇数（单数），除 2 以外的正偶数都是合数（双数）．

（3）若素数 $p\mid ab$，则 $p\mid a$ 或 $p\mid b$．

（4）若正整数 a，b 的积为素数 p，则一定 $p=a$ 或 $p=b$．

（5）任何整数 n（$n>1$）可以惟一地分解为 $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$，其中 $p_1<p_2\cdots<p_k$，且 p_1，p_2，…，p_k 是素数，a_1，a_2，…，a_k 是正整数．

范例·解析·拓展

例 1　已知 p 是素数，p^4+3 是素数，求 p^5+3 的值．

解析　因为 p 是素数，所以 $p^4+3>3$．又 p^4+3 是素数，所以 p^4+3 是奇数．所以 p^4 是偶数，即 p 是偶数，而 p 是素数，所以 $p=2$．所以 $p^5+3=35$．

拓展　有四个数，一个是最小的奇素数，一个是偶素数，一个是小于 30 的最大素数，另一个是大于 70 的最小素数．求它们的和．

答案提示　最小的奇素数是 3，惟一的偶素数是 2，小于 30 的最大素数是 29，大于 70 的最小素数是 71，它们的和为 105．

说明：本题主要是对素数的分类，了解常见的素数．

例 2　求素数 p，使 $p+10$，$p+14$ 均为素数．

解析　由于素数的分布没有规律，因此可以用具体的素数进行试验，找到要求的素数，再加以说明．

因为 $2+10=12$，$2+14=16$，所以 2 不符合题意；