

名卷汇编

数学

李济振 主编

中国致公出版社

图书在版编目(CIP)数据

名卷汇编 ①数学 赧-北京 :中国致公出版社, ②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑲⑳㉑㉒㉓㉔㉕㉖㉗㉘㉙㉚㉛㉜㉝㉞㉟㊱㊲㊳㊴㊵㊶㊷㊸㊹㊺㊻㊼㊽㊾㊿

①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑲⑳㉑㉒㉓㉔㉕㉖㉗㉘㉙㉚㉛㉜㉝㉞㉟㊱㊲㊳㊴㊵㊶㊷㊸㊹㊺㊻㊼㊽㊾㊿

I ①名 ②李 ③④数学课—高中—试题—升学参考资料 IV ①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑲⑳㉑㉒㉓㉔㉕㉖㉗㉘㉙㉚㉛㉜㉝㉞㉟㊱㊲㊳㊴㊵㊶㊷㊸㊹㊺㊻㊼㊽㊾㊿

中国版本图书馆 CIP 数据核字 ①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑲⑳㉑㉒㉓㉔㉕㉖㉗㉘㉙㉚㉛㉜㉝㉞㉟㊱㊲㊳㊴㊵㊶㊷㊸㊹㊺㊻㊼㊽㊾㊿ 号

《名卷汇编》(数学)

主 编 :李济振

责任编辑 :刘 秦

封面设计 :彭 群

出版发行 :中国致公出版社出版发行

(北京市西城区太平桥大街 源号 电话 ①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑲⑳㉑㉒㉓㉔㉕㉖㉗㉘㉙㉚㉛㉜㉝㉞㉟㊱㊲㊳㊴㊵㊶㊷㊸㊹㊺㊻㊼㊽㊾㊿ 邮编 ①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑲⑳㉑㉒㉓㉔㉕㉖㉗㉘㉙㉚㉛㉜㉝㉞㉟㊱㊲㊳㊴㊵㊶㊷㊸㊹㊺㊻㊼㊽㊾㊿)

经 销 :全国新华书店

印 刷 :三河市长城印刷有限公司

印 数 :①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑲⑳㉑㉒㉓㉔㉕㉖㉗㉘㉙㉚㉛㉜㉝㉞㉟㊱㊲㊳㊴㊵㊶㊷㊸㊹㊺㊻㊼㊽㊾㊿

开 本 :①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑲⑳㉑㉒㉓㉔㉕㉖㉗㉘㉙㉚㉛㉜㉝㉞㉟㊱㊲㊳㊴㊵㊶㊷㊸㊹㊺㊻㊼㊽㊾㊿

印 张 :①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑲⑳㉑㉒㉓㉔㉕㉖㉗㉘㉙㉚㉛㉜㉝㉞㉟㊱㊲㊳㊴㊵㊶㊷㊸㊹㊺㊻㊼㊽㊾㊿

字 数 :①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑲⑳㉑㉒㉓㉔㉕㉖㉗㉘㉙㉚㉛㉜㉝㉞㉟㊱㊲㊳㊴㊵㊶㊷㊸㊹㊺㊻㊼㊽㊾㊿ 千字

版 次 :①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑲⑳㉑㉒㉓㉔㉕㉖㉗㉘㉙㉚㉛㉜㉝㉞㉟㊱㊲㊳㊴㊵㊶㊷㊸㊹㊺㊻㊼㊽㊾㊿ 年 ①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑲⑳㉑㉒㉓㉔㉕㉖㉗㉘㉙㉚㉛㉜㉝㉞㉟㊱㊲㊳㊴㊵㊶㊷㊸㊹㊺㊻㊼㊽㊾㊿ 月 第 ①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑲⑳㉑㉒㉓㉔㉕㉖㉗㉘㉙㉚㉛㉜㉝㉞㉟㊱㊲㊳㊴㊵㊶㊷㊸㊹㊺㊻㊼㊽㊾㊿ 版 ①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑲⑳㉑㉒㉓㉔㉕㉖㉗㉘㉙㉚㉛㉜㉝㉞㉟㊱㊲㊳㊴㊵㊶㊷㊸㊹㊺㊻㊼㊽㊾㊿ 年 ①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑲⑳㉑㉒㉓㉔㉕㉖㉗㉘㉙㉚㉛㉜㉝㉞㉟㊱㊲㊳㊴㊵㊶㊷㊸㊹㊺㊻㊼㊽㊾㊿ 月 第 ①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑲⑳㉑㉒㉓㉔㉕㉖㉗㉘㉙㉚㉛㉜㉝㉞㉟㊱㊲㊳㊴㊵㊶㊷㊸㊹㊺㊻㊼㊽㊾㊿ 次 印刷

①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑲⑳㉑㉒㉓㉔㉕㉖㉗㉘㉙㉚㉛㉜㉝㉞㉟㊱㊲㊳㊴㊵㊶㊷㊸㊹㊺㊻㊼㊽㊾㊿

定 价 :①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑲⑳㉑㉒㉓㉔㉕㉖㉗㉘㉙㉚㉛㉜㉝㉞㉟㊱㊲㊳㊴㊵㊶㊷㊸㊹㊺㊻㊼㊽㊾㊿ 元

北京市海淀区 2001 年 5 月份模拟试题

数 学

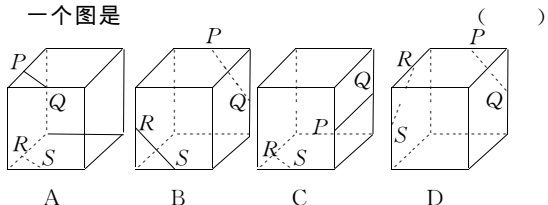
第 1 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。

在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 已知集合 $M = \{x | x - a = 0\}$, $N = \{x | |ax - 1| = 0\}$. 若 $M \cap N = M$, 则实数 a 等于 ()
 A. 1
 B. -1
 C. 1 或 -1
 D. 1 或 -1 或 0
- 二项式 $\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 展开式中的常数项是 ()
 A. 20
 B. -20
 C. 160
 D. -160
- 已知命题甲:“ $x > 2$ ”、命题乙:“ $x \geq 2$ ”, 那么命题甲是命题乙成立的 ()
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 非充分非必要条件
- 极坐标平面内曲线 $\rho = 2\cos\theta$ 上的动点 P 与定点 $Q\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ 的最近距离等于 ()
 A. $\sqrt{2} - 1$
 B. $\sqrt{5} - 1$
 C. 1
 D. $\sqrt{2}$
- 函数 $y = \sqrt{\arccos(2x - 1)}$ 的值域是 ()
 A. $[0, \pi]$
 B. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
 C. $[0, \sqrt{\pi}]$
 D. $\left[0, \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right]$
- 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_3 + a_{17} = 10$, 则 S_{15} 的值 ()
 A. 是 55
 B. 是 95
 C. 是 100
 D. 不能确定
- 如图, 点 P, Q, R, S 分别在正方体的四条棱上, 并且

是所在棱的中点, 则直线 PQ 与 RS 是异面直线的
一个图是



- 过定点 $P(0, 2)$ 作直线 l , 使 l 与曲线 $y^2 = 4(x - 1)$ 有且仅有 1 个公共点, 这样的直线 l 共有 ()
 A. 1 条
 B. 2 条
 C. 3 条
 D. 4 条
- 已知点 $P(x, y)$ 在经过 $A(3, 0), B(1, 1)$ 两点的直线上, 那么 $2^x + 4^y$ 的最小值是 ()
 A. 是 $2\sqrt{2}$
 B. 是 $4\sqrt{2}$
 C. 是 16
 D. 不存在
- 函数 $y = \log_2 x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{2}}(4x)$ 的图象 ()
 A. 关于直线 $x = 1$ 对称
 B. 关于直线 $y = x$ 对称
 C. 关于直线 $y = -1$ 对称
 D. 关于直线 $y = 1$ 对称
- 若 l 是过椭圆一个焦点且与长轴不重合的一条直线, 则此椭圆与 l 垂直且被 l 平分的弦 ()
 A. 有且只有 1 条
 B. 有且只有 2 条
 C. 有 3 条
 D. 不存在
- 某商场开展促销抽奖活动, 摇奖器摇出的一组中奖号码是 8、2、5、3、7、1, 参加抽奖的每位顾客从 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 这十个号码中任意抽出六个组成一组, 如果顾客抽出的六个号码中至少有 5 个与摇奖器摇出的号码相同(不计顺序)就可以得奖. 一位顾客可能抽出的不同号码组成有 m 组, 其中可以中奖的号码组共有 n 组. 则 $\frac{n}{m}$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{7}$ B. $\frac{1}{30}$
 C. $\frac{4}{35}$ D. $\frac{5}{42}$

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题:本大题满分 16 分,每小题 4 分,各题只要
 求直接写出结果.

13. 已知 $\tan\alpha=2, \tan(\alpha-\beta)=-\frac{2}{5}$, 那么 $\tan\beta=$ _____
 _____.

14. 不等式 $3^{x^2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$ 的解集为 _____.

15. 函数 $y=f(x)$ 的图象与 $y=2^x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 则函数 $y=f(4x-x^2)$ 的递增区间是 _____.

16. 一个三棱锥的三个侧面中有两个是等腰直角三角形, 另一个是边长为 1 的正三角形, 这样的三棱锥
 体积为 _____ (写出一个可能值).

三、解答题:本大题满分 74 分.

17. (本小题满分 12 分)

已知复数 z 满足 $|z|=\sqrt{2}$, z^2 的虚部为 2.

(I) 求 $\arg z$, 并写出 z 的三角式;

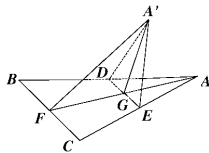
(II) 设 $z, z^2, z-z^2$ 在复平面上的对应点分别为 A, B, C , 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (本小题满分 12 分)

已知边长为 a 的正三角形 ABC 的中线 AF 与中
 位线 DE 相交于 G (如图), 将此三角形沿 DE 折成
 二面角 $A'-DE-B$.

(I) 求证: 平面 $A'GF \perp$ 平面 $BCED$;

(II) 当二面角 $A'-DE-B$ 为多大时, 异面直线
 $A'E$ 与 BD 互相垂直? 证明你的结论.



19. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, 前 n 项和为 S_n , 对于任意

$n \geq 2$, $3S_n - 4, a_n, 2 - \frac{3S_{n-1}}{2}$ 总成等差数列.

(I) 求 a_2, a_3, a_4 的值;

(II) 求通项 a_n ;

(III) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

20. (本小题满分 12 分)

某港口水的深度 y (米) 是时间 t ($0 \leq t \leq 24$, 单位: 时) 的函数, 记作 $y=f(t)$, 下面是某日水深的数

t (时)	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y (米)	10.0	13.0	9.9	7.0	10.0	13.0	10.1	7.0	10.0

经长期观察, $y=f(t)$ 的曲线可以近似地看成函数 $y=A \sin \omega t + b$ 的图象.

(I) 试根据以上数据, 求出函数 $y=f(t)$ 的近似表达式;

(II) 一般情况下, 船舶航行时, 船底离海底的距离为 5 米或 5 米以上时认为是安全的 (船舶停靠时, 船底只需不碰海底即可). 某船吃水深度 (船底离水面的距离) 为 6.5 米. 如果该船希望在同一天内安全进出港, 请问, 它至多能在港内停留多长时间 (忽略进出港所需的时间)?

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的周期函数, 周期 $T=5$, 函数 $y=f(x), (-1 \leq x \leq 1)$ 是奇函数. 又知 $y=f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是一次函数, 在 $[1, 4]$ 上是二次函数, 且在 $x=2$ 时函数取得最小值, 最小值为 -5 .

(I) 证明: $f(1)+f(4)=0$;

(II) 试求 $y=f(x), x \in [1, 4]$ 的解析式;

(III) 试求 $y=f(x)$ 在 $[4, 9]$ 上的解析式.

22. (本小题满分 14 分)

已知圆 $C: (x+4)^2 + y^2 = 4$, 圆 D 的圆心 D 在 y 轴上且与圆 C 外切, 圆 D 与 y 轴交于 A, B 两点, 点 P 为 $(-3, 0)$.

(I) 若点 D 坐标为 $(0, 3)$, 求 $\angle APB$ 的正切值;

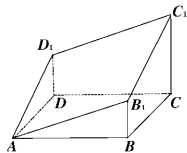
(II) 当点 D 在 y 轴上运动时, 求 $\angle APB$ 的最大值;

(III) 在 x 轴上是否存在定点 Q , 当圆 D 在 y 轴上运动时, $\angle AQB$ 是定值? 如果存在, 求出点 Q 坐标; 如果不存在, 说明理由.

11. 图中多面体是过正四棱柱的底面正方形 $ABCD$ 的点 A 作截面 $AB_1C_1D_1$ 而截得的, 且 $B_1B = D_1D$.

已知截面 $AB_1C_1D_1$ 与底面 $ABCD$ 成 30° 的二面角, $AB=1$, 则这个多面体的体积为 ()

- A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$
 B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$
 C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$
 D. $\frac{\sqrt{6}}{6}$



12. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率 $e \in$

$[\sqrt{2}, 2]$, 令双曲线两条渐近线构成的角中, 以实轴为角平分线的角为 θ , 则 θ 的取值范围是

- ()
 A. $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ B. $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$
 C. $[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$ D. $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

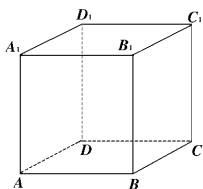
二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线上.

13. 若 $(\sqrt{x} + \frac{2}{x})^n$ 展开式中的第 5 项为常数, 则 $n =$ _____.

14. 抛物线 $x = 2(y-1)^2 - 5$ 的准线方程是 _____.

15. 已知 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$, $\tan(\beta - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3}$, 则 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{3})$ 的值是 _____.

16. 已知如图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, 过点 A 作截面, 使正方体的 12 条棱所在直线与截面所成的角皆相等, 试写出满足这样条件的一个截面 _____.



_____. (注: 只需任意写出一个)

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知 $a > 0, a \neq 1, f(x) = \log_a(x+1), g(x) = \log_a x^2$,

求使 $f(x) - g(x) > \log_a 2$ 成立的自变量 x 的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

已知: 复数 $z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha, z_2 = \cos\beta + i\sin\beta$,

$$z_1 + z_2 = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i,$$

求: $\tan(\alpha + \beta)$ 的值.

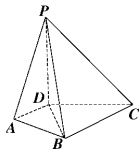
19. (本小题满分 12 分)

已知, 如图, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp DC$, $AD \parallel BC$, $PD : DC : BC = 1 : 1 : \sqrt{2}$.

(I) 求 PB 与平面 PDC 所成角的大小;

(II) 求二面角 $D-PB-C$ 的正切值;

(III) 若 $AD = \frac{1}{2}BC$, 求证平面 $PAB \perp$ 平面 PBC .



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆的两个焦点分别为 $F_1(0, -2\sqrt{2})$, $F_2(0, 2\sqrt{2})$, 离心率 $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(I) 求椭圆方程;

(II) 一条不与坐标轴平行的直线 l 与椭圆交于不同的两点 M, N , 且线段 MN 中点的横坐标为 $-\frac{1}{2}$, 求直线 l 倾斜角的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

用洗衣机洗衣时,洗涤并甩干后进入漂洗阶段.漂洗阶段由多次漂洗和甩干组成.每次漂洗后可使残留物均匀分布,每次甩干后(包括洗涤后的甩干)衣物中的残留水份(含有残留物)的重量相同.设计时,将漂洗的总用水量定为 a 千克,漂洗并甩干的次数定为 3 次.为使漂洗后衣物中的残留物最少,怎样确定每次漂洗的用水量?并写出你的数学依据.

【注:为了便于解决问题,可参考以下各量的字母表示.设每次甩干后衣物中的残留水分(含有残留物)的重量为 m ,洗涤并甩干后衣物中的残留物(不含水份)为 n_0 ,三次漂洗并甩干后衣物中的残留物(不含水份)分别为 n_1, n_2, n_3 ,三次用水量分别为 a_1, a_2, a_3 .(以上各量单位皆为千克)】.

22. (本小题满分 14 分)

数列 $\{a_n\}$ 中,前 n 项和 $S_n = an^2 + bn$,其中 a, b 是常数,且 $a > 0, a + b > 1, (n \in \mathbb{N})$;

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n , 并证明 $a_{n+1} > a_n > 1 (n \in \mathbb{N})$;

(II) 令 $c_n = \log_{a_n} a_{n+1}$, 试判断数列 $\{c_n\}$ 中任意相邻两项的大小.

北京市西城区 2001 年 5 月份模拟试题

数 学

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

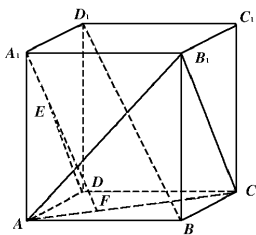
1. 已知集合 $P = \{(x, y) \mid |x| + |y| = 1\}$, $Q = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则 ()

- A. $P \subset Q$ B. $P = Q$
C. $P \supset Q$ D. $P \cap Q = Q$

2. 设 α, β 均为第二象限角, 且 $\sin \alpha > \sin \beta$, 则下列不等式成立的是 ()

- A. $\tan \alpha > \tan \beta$ B. $\cot \alpha < \cot \beta$
C. $\cos \alpha > \cos \beta$ D. $\sec \alpha > \sec \beta$

3. 如右图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, EF 是异面直线 AC 和 A_1D 的公垂线, 则 EF 和 BD_1 的关系是 ()



- A. 相交不垂直 B. 相交垂直
C. 异面直线 D. 互相平行

4. 设 $a = \frac{1}{2} \cos 6^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 6^\circ$, $b = \frac{2 \tan 13^\circ}{1 + \tan^2 13^\circ}$, $c = \sqrt{\frac{1 - \cos 50^\circ}{2}}$, 则有 ()

- A. $a > b > c$ B. $a < b < c$
C. $a < c < b$ D. $b < c < a$

5. 已知圆的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\rho(\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta) = 5$, 则此圆在直线 $\theta = 0$ 上截得的弦长为 ()

- A. $\sqrt{6}$ B. $2\sqrt{6}$

- C. $2\sqrt{3}$ D. 3

6. 甲、乙、丙三个单位分别需要招聘工作人员 2 名、1 名、1 名, 现从 10 名应聘人员中招聘 4 人到甲、乙、丙三个单位, 那么不同的招聘方法共有 ()

- A. 1260 种 B. 2025 种
C. 2520 种 D. 5040 种

7. 设 $f(x) = (1+x) + (1+x)^2 + \dots + (1+x)^n$, 在 $f(x)$ 中 x^2 的系数为 T_n , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n^3 + 2n}$ 等于 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{6}$
C. 1 D. 2

8. 直线 $x + \sqrt{3}y = 0$ 绕原点按顺时针方向旋转 30° 所得直线与圆 $(x-2)^2 + y^2 = 3$ 的位置关系是 ()

- A. 直线与圆相切
B. 直线与圆相交但不过圆心
C. 直线与圆相离
D. 直线过圆心

9. 若 $x \in (1, 2)$ 时, 不等式 $(x-1)^2 < \log_a x$ 恒成立, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$
C. $(1, 2]$ D. $[1, 2]$

10. 某产品的总成本 y (万元) 与产量 x (台) 之间的函数关系式是 $y = 3000 + 20x - 0.1x^2$ ($0 < x < 240, x \in N$), 若每台产品的售价为 25 万元, 则生产者不亏本时 (销售收入不小于总成本) 的最低产量是 ()

- A. 100 台 B. 120 台
C. 150 台 D. 18 台

11. 已知方程 $\frac{x^2}{|m|-1} + \frac{y^2}{2-m} = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆, 则 m 的取值范围是 ()

- A. $m < 2$
 B. $1 < m < 2$
 C. $m < -1$ 或 $1 < m < 2$
 D. $m < -1$ 或 $1 < m < \frac{3}{2}$

12. 对于已知直线 a , 如果直线 b 同时满足下列三个条件:

- (1) 与 a 是异面直线;
 (2) 与 a 所成的角为定值 θ ;
 (3) 与 a 的距离为定值 d .

那么, 这样的直线 b 有 ()

- A. 1 条 B. 2 条
 C. 3 条 D. 无数条

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分, 把答案填在题中横线上.

13. 已知 $a = \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$, 则 $\sin \frac{\alpha}{2}$ 的值是_____.

14. 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, 且倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$ 的直线交抛物线于 P, Q 两点, O 是坐标原点, 则 $\triangle OPQ$ 的面积等于_____.

15. 将一个圆形纸片沿其两个半径剪开, 得到两个扇形, 它们的圆心角之比为 $1:2$, 再将它们当作圆锥侧面卷成两个圆锥, 则这两个圆锥的体积之比是_____.

16. 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足: $f(x+1) = -f(x)$, 且在 $[-1, 0]$ 上是增函数, 下面是关于 $f(x)$ 的判断:

- ① $f(x)$ 是周期函数;
 ② $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称;
 ③ $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是增函数;
 ④ $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上是减函数;
 ⑤ $f(2) = f(0)$.

其中正确的判断是_____ (把你认为正确的判断都填上).

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知由正数组成的等比数列 $\{a_n\}$, 若前 $2n$ 项之和

等于它前 $2n$ 项中的偶数项之和的 11 倍, 第 3 项与第 4 项之和为第 2 项与第 4 项之积的 11 倍, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

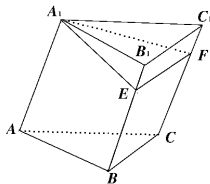
18. (本小题满分 12 分)

已知复数 $z_1 = x + ai, z_2 = x + bi (b > a > 0, x > 0)$ 的辐角主值分别为 α, β , 求 $\tan(\beta - \alpha)$ 的最大值及对应的 x 的值.

19. (本小题满分 13 分)

如图, 已知三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 的底面是边长为 2 的正三角形, 侧棱 A_1A 与 AB, AC 均成 45° 角, 且 $A_1E \perp B_1B$ 于 $E, A_1F \perp CC_1$ 于 F .

- (I) 求证: 平面 $A_1EF \perp$ 平面 B_1BCC_1 ;
 (II) 求点 A_1 到平面 B_1BCC_1 的距离;
 (III) 当 AA_1 多长时, 点 A_1 到平面 ABC 与平面 B_1BCC_1 的距离相等?



20. (本小题满分 12 分)

某乡为提高当地群众的生活水平, 由政府投资兴建了甲、乙两个企业, 1997 年该乡从甲企业获得利润 320 万元, 从乙企业获得利润 720 万元, 以后每年上交的利润是: 甲企业以 1.5 倍的速度递增, 而乙企业则为上一年利润的 $\frac{2}{3}$. 根据测算, 该乡从两个企业获得的利润达到 2000 万元可以解决温饱问题, 达到 8100 万元可以达到小康水平.

- (1) 若以 1997 年为第一年, 则该乡从上述两个企业获得利润最少的一年是哪一年, 该年还需要筹集多少万元才能解决温饱问题?
 (2) 试估算 2005 年底该乡能否达到小康水平? 为什么?

21. (本小题满分 12 分)

椭圆中心是坐标原点 O , 焦点在 x 轴上, 过椭圆左焦点 F 的直线交椭圆于 P, Q 两点, 且 $OP \perp OQ$. 求椭圆离心率 e 的取值范围.

22. (本小题满分 14 分)

设 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数, $g(x)$ 的图象与 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 而当 $x \in [2, 3]$ 时, $g(x) = -x^2 + 4x + c$ (c 为常数)

(1) 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 对于任意 $x_1, x_2 \in [0, 1]$ 且 $x_1 \neq x_2$, 求证: $|f(x_2) - f(x_1)| < 2|x_2 - x_1|$;

(3) 对于任意 $x_1, x_2 \in [0, 1]$ 且 $x_1 \neq x_2$, 求证: $|f(x_2) - f(x_1)| \leq 1$.

$=m, \gamma \cap \beta = l$, 那么在① $\beta \perp \gamma$; ② $l \perp \alpha$; ③ $m \perp \beta$ 中, 可以由上述已知条件推出的只有 ()

- A. ①和② B. ②和③
C. ①和③ D. ②

11. (理科作) 在极坐标系中, 方程 $\rho = 3\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} - 1$ 表示的曲线是 ()

- A. 平行于极轴的直线
B. 垂直于极轴的直线
C. 圆心在极点的圆
D. 经过极点的圆

(文科作) 设 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的度数成等差数列, 则 $\tan(A+C)$ 的值为

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
C. $\sqrt{3}$ D. $-\sqrt{3}$

12. 北京某中学要把 9 台型号相同的电脑送给西部地区的三所希望小学, 每所小学至少得到两台, 不同送法的种数共有 ()

- A. 10 种 B. 9 种
C. 8 种 D. 6 种

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题: 本大题满分 16 分, 每小题 4 分, 各题只要求直接写出结果.

13. 复数 $z_1 = 2 + \sqrt{5}i, z_2 = 1 - \sqrt{3}i$, 复数 $z = \frac{4z_1^4}{3z_2^3}$, 则 $|z| =$ _____.

14. 圆锥的底面和顶点都在同一个球面上, 球心到该圆锥底面的距离是球半径的一半, 则该圆锥的体积和此球体积的比值为 (答案写成分数形式) _____.

15. 过点 $M(0, 4)$ 、被圆 $(x-1)^2 + y^2 = 4$ 截得的线段长为 $2\sqrt{3}$ 的直线方程为 _____.

16. 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是等差数列, $a_1 = 0, b_1 = -4$, 用 S_k, S'_k 分别表示数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 k 项和 (k 是正整数), 若 $S_k + S'_k = 0$, 则 $a_k + b_k$ 的值为 _____.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

设 $a > 0, a \neq 1$. 解关于 x 的不等式

$$\frac{2+x}{2} \sqrt{\log_a(3+x) - \log_a(1-x)} < 0.$$

18. (本小题满分 12 分)

(理科作) 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别表示三个内角 A, B, C 的对边, 如果 $(a^2 + b^2) \cdot \sin(A-B) = (a^2 - b^2) \cdot \sin(A+B)$, 且 $A \neq B$.

求证: $\triangle ABC$ 是直角三角形.

(文科作) 已知 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边.

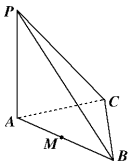
(I) 若 $\triangle ABC$ 面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}, c = 2, A = 60^\circ$, 求 b, a 的值;

(II) 若 $a \cos A = b \cos B$, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状, 证明你的结论.

19. (本小题满分 12 分)

在如图的三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $PA=AC=1, PC=BC, PB$ 和平面 ABC 所成的角为 30° .

- (I) 求证: 平面 $PBC \perp$ 平面 PAC ;
 (II) 比较三个侧面的面积的算术平均数与底面积数值的大小, 并说明理由;
 (III) 求 AB 的中点 M 到直线 PC 的距离.



20. (本小题满分 12 分)

某种细菌每隔两小时分裂一次(每一个细菌分裂成两个, 分裂瞬间的时间忽略不计), 研究开始时时有两个细菌, 在研究过程中不断进行分裂, 细菌总数 y 是研究进行时间 t 的函数, 记作 $y=f(t)$.

- (I) 写出函数 $y=f(t)$ 的定义域和值域;
 (II) 在给出的坐标系中画出 $y=f(t)$ ($0 \leq t \leq 6$) 的图象;
 (III) 写出研究进行到第 n 小时 ($n \geq 0, n \in \mathbb{Z}$) 时细菌的总数有多少个(用关于 n 的式子表示).

