

名家导学系列

孙维刚高中数学

孙维刚编著

北京大学出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本书是著名的数学教育家孙维刚老师的著作,涵盖了现行高中数学教育大纲中所要求掌握的内容,是孙老师三轮实验班的教材。本书立足于对高中数学中基础知识的分析把握,以及对方法和思想的指导,在详述概念后,引申概念外围的规律、方法,以及解题思考规律。书中提出,学好数学必须站在系统的角度看问题,力求一题多解、多解归一(结论一个)、多题归一(善于总结),善于用“动”的观点思考问题(做到“风物长宜放眼量”),这对开启学生的数学智慧,掌握科学的学习方法、思维规律,提高学习效率有很大的帮助。

本书可作为教师和学生的辅导用书或自学教材。

图书在版编目(CIP)数据

孙维刚高中数学 / 孙维刚编著. —北京: 北京大学出版社, 1999

(名家导学系列)

ISBN 7-301-02511-1

I. ①孙... II. ①孙... III. ①数学课. 原高中. ②教学参考资料. IV. ①G634.61

中国版本图书馆CIP数据核字(99)第 111111 号

书名: 孙维刚高中数学

著作责任者: 孙维刚编著

责任编辑: 温丹丹

标准书号: ISBN 7-301-02511-1

出版者: 北京大学出版社

地址: 北京市海淀区中关村北京大学校内

网址: <http://www.pup.cn>

电话: 邮购部 010-62750174 发行部 010-62750175 编辑部 010-62750176

电子邮箱: zouping@pup.cn

排版者: 北京东方人华北大彩印中心 电话: 010-62750177

印刷者:

发行者: 北京大学出版社

经销者: 新华书店

16开本 787毫米×1092毫米 1印张 110千字

1999年 1月第 1版 1999年 1月第 1次印刷

定价: 19.00元

目 录

第一篇 怎样学好高中数学

第 员章 热爱数学,学好数学	(员)
摇摇一、热爱数学,是学好数学的前提与途径	(员)
摇摇二、学好数学,需“醉翁之意不仅在酒”	(圆)
第 圆章 站在系统的高度学习	(源)
摇摇一、理解概念要深入本质,注意抓住知识之间的联系	(源)
摇摇二、在类比中发现和谐,简化记忆	(缘)
第 猿章 把知识的学习、能力的培养、素质的发展与完善有机地结合起来	(苑)
摇摇一、主动学习	(苑)
摇摇二、注意学习、积累和掌握数学方法与思想	(苑)
第 源章 各类知识学习方法示范	(苑)
摇摇一、概念与基础知识的学习	(苑)
摇摇二、公式、定理的学习	(猿)
摇摇三、一个单元的学习与小结	(猿)
摇摇四、一个数学方法(数学归纳法)的学习和小结	(源)
摇摇五、一个思考方法的学习和小结	(缘)
第 缘章 学会做题	(缘)
摇摇一、题不求多,但求精彩	(缘)
摇摇二、讲究做题的方法	(远)
第 远章 学会复习	(苑)
摇摇一、培养做小结的习惯和能力	(苑)
摇摇二、有效地进行高中数学总复习	(愿)

第二篇 高中数学各章学习指要

I 重要概念、基础知识、方法、思想	(愿)
一、有关命题的知识	(愿)
摇摇二、充分条件和必要条件	(愿)
摇摇三、数学归纳法	(愿)
摇摇四、反证法	(愿)
摇摇五、同一法	(愿)

摇摇六、换元法	(怨园)
摇摇七、列方程组的方法	(怨园)
摇摇八、待定系数法	(怨园)
摇摇九、配方法	(怨园)
摇摇十、转化归结思想	(怨园)
摇摇十一、动的思想方法——换个角度看问题	(怨园)
摇摇十二、对称的观点和思想	(怨园)
摇摇十三、数形结合的方法	(怨园)
II 摇摇高中代数	(怨园)
第 苑章 摇摇幂函数、指数函数和对数函数	(怨园)
摇摇一、学习指导	(怨园)
摇摇二、解题思考方法小结	(怨园)
第 愿章 摇摇三角函数、三角变换、反三角函数与三角方程	(怨园)
摇摇一、学习指导	(怨园)
摇摇二、解题思考方法小结	(怨园)
第 怨章 摇摇数列与数学归纳法	(怨园)
摇摇一、学习指导	(怨园)
摇摇二、解题思考方法小结	(怨园)
第 员园章 摇摇不等式	(怨园)
摇摇一、学习指导	(怨园)
摇摇二、解题思考方法小结	(怨园)
第 员员章 摇摇复数	(怨园)
摇摇一、学习指导	(怨园)
摇摇二、解题思考方法小结	(怨园)
第 员圆章 摇摇排列、组合、二项式定理	(怨园)
摇摇一、学习指导	(怨园)
摇摇二、解题思考方法小结	(怨园)
III 摇摇微积分初步	(怨园)
第 员猿章 摇摇极限	(怨园)
摇摇一、学习指导	(怨园)
摇摇二、解题思考方法小结	(怨园)
IV 摇摇立体几何	(怨园)
第 员源章 摇摇直线和平面	(怨园)
摇摇一、学习指导	(怨园)
摇摇二、解题思考方法小结	(怨园)

第 13 章 多面体和旋转体	(130)
摇摇一、学习指导	(130)
摇摇二、解题思考方法小结	(130)
V 平面解析几何	(130)
第 14 章 直线	(130)
摇摇一、学习指导	(130)
摇摇二、解题思考方法小结	(130)
第 15 章 圆锥曲线	(130)
摇摇一、学习指导	(130)
摇摇二、解题思考方法小结	(130)
第 16 章 坐标变换	(130)
摇摇一、学习指导	(130)
摇摇二、解题思考方法小结	(130)
第 17 章 参数方程、极坐标	(130)
摇摇一、学习指导	(130)
摇摇二、解题思考方法小结	(130)

第三篇 学会考试

摇摇一、做好应考前的准备	(130)
摇摇二、学会在考场上科学应对	(130)
摇摇三、养成检验习惯,积累检验方法,提高检验能力	(130)
摇摇四、分析一份综合练习,看对待难题的态度和方法	(130)

第四篇 解题思考分析的再示范

摇摇一、示范一	(130)
摇摇二、示范二	(130)
摇摇三、示范三	(130)
摇摇四、示范四	(130)
后记	(130)

第三版序

拿着笔,眼前不断地浮现出孙维刚老师著述时的情景。

他真的很忙,也很累。对于出版社的约稿,从不会拒绝别人要求的孙老师,总是一拖又拖,直至无法再拖,最后,只好硬着头皮放下手里永远干不完的“活儿”,伏案而书。

每逢写作,他总习惯桌子上除了稿纸以外,就是一支笔,其他东西统统搬走。

桌子还是那张桌子,灯光依旧。

我还清楚地记得他写作本书时用的那支笔,一支套着白色金属帽,有着草绿色笔杆的普通钢笔。因长时间的频繁使用,笔尖早已磨秃了,但写起字来却很流畅。他说:“这支笔可立了功,从一参加工作,我就用它,从没有离开过。”后来,这支笔在一次开会时不慎遗失,为此,他遗憾了很多日子。

孙老师写作起来,速度很快。从早晨到晚上,头都不肯抬一抬,只看见他握笔的手在稿纸上疾速地移动,发出沙沙的声音,间或夹杂着晃动涂改液的嗒嗒声。就这样,一天一万字,一气呵成。那笔尖流淌出的智慧,分明是他和学生心的碰撞。因此,读他的文字,就像听见他在课堂上的讲课,娓娓道来,带领着他的学生思潮如涌。

当这部著述终于完成时,他微微活动一下早已疲惫的身躯,细细地审视着手中的稿子,自言自语地说:“我要对得住我的读者。”这是他的心声。我还清楚地记得他很多次地引用过好友周沛耕老师的话:“教师的一切成就都是学生给的。”

另外,当您拿到这本由北京大学出版社出版的《孙维刚高中数学》时,一定要将前面“作者的话”细细地阅读,因为里面有很多重要的话要告诉您,这也是孙老师生前常常说给来信、来电或当面咨询的读者的话。

最后,衷心地希望这本《孙维刚高中数学》能对广大青少年朋友学习数学有所启迪。

如今,斯人已逝,谨以此序寄以无限的思绪。

王海亭

摇摇四零年元月于北京

第二版修订说明

摇摇幸蒙老师和同学们的关怀,拙述《初中数学》、《高中数学》两本书,至今已六次印刷,逾 10 万册。

其间,我受到各地老师和同学们热情来信的勉励和盛情建议,使两本书修订再版。

在保留原书主体的基础上,两书都在解题思考规律的应用,即提高解题能力方面,进行了补充。《初中数学》在一些主要章节,补充了一些新的例题分析;《高中数学》,则补充了“第四篇摇解题思考分析的再示范”。

《初中数学》书中某些知识,在新的九年义务教育大纲中列为选学或不学,本次再版,仍予保留。我的考虑是:

阅读者中许多学生初中毕业后要继续学习,特别是要升入普通高中,书中对这些少量知识的学习指导,还是很有价值的;

本书立足于对知识分析把握的指导,立足于对方法和思想的建议和指导,所以阅读这些部分是有益的。

另外,想多说几句的是关于如何学好数学的问题。

数学,是学生投入最多的一门课程,但许多同学却为并没取得理想效果所苦,部分同学甚至陷入题海,昏天黑地,以至望而却步。

究其原因,在于方法不得要领,或根本不当。

本人认为,学好数学,首重概念扎实、基础知识牢固,这几乎是人所共识。但究竟什么是“扎实”、“牢固”?又怎样才能“扎实”、“牢固”?则恐多有差异,甚至大相径庭了。

汽车飞驰,离不开动力的心脏——发动机,但必须通过变速箱、大轴,最后作用到轮子上。解数学题亦如此,概念、基础知识(发动机),要发挥作用,也必须靠一连串连接装置,即对概念的理解、引伸,概念外围的规律、方法,以及解题思考规律,这些在课本上是没有的。

学好数学,还要学会聪明地做题。既要在做题的实践中加深理解、增长才干,又不为其所累。怎样才是和才能“聪明地做题”?

而最根本的出路,是在学习过程中,提高了能力,完善了自己的素质。

怎样实现这美好的一切?本书就是要向广大同学、青年教师展示其途径。

限于水平,书中疏误仍将很多,诚请批评指正,不胜感谢。

摇 孙维刚

2000年 01月于北京

作者的话

摇摇“有谁能相信,北京 100 中今年毕业的高三(源)班,全班 100 人中,有 1 人被清华大学、北京大学录取。”

这是《北京日报》1985 年 10 月 1 日的一篇报道“润物细无声(记北京市特级教师孙维刚)”的第一自然段。所报道的是我第二轮实验班(1983~1985 年)的情况。

第三轮实验班的情况又如何呢?

“中学数学特级教师孙维刚创下下一个纪录——

他当班主任的北京 100 中高三(源)班,全班 100 人,1986 年高考百分之百上了录取线,100 人上重点线,有 100 人考入北京大学、清华大学,占全班总人数的 100%,这在全市各校的统计中是绝无仅有的。而六年前,这 100 名来自工薪阶层的子弟入初中时,100 人达不到区重点中学的录取分数线,100 人是就近入学的‘大拨轰学生’。”

这是《北京日报》1986 年 10 月 1 日第六版的整版报道“特级教师孙维刚”的第一自然段,由于 1985~1986 学年我同时带第二和第三两轮班,所以,第三轮班(1985~1986)在 1986 年 10 月中学毕业。

特别是,这轮班的闫珺同学,1986 年 10 月夺得了第 27 届国际数学奥林匹克的金牌,为祖国争得了荣誉。

北京 100 中是一所非重点中学,面对学生来源并不十分理想的现实,从 1983 年起,我在各级领导和同志们的帮助下,进行了六年一循环的数学教育改革实验。从初一接新生,教数学兼班主任,直到学生高三毕业,全面落实党的教育方针,努力使学生德智体全面发展,大幅度提高学生素质。这个素质,首先是思想品德素质,同时是紧密结合的智力素质,是以思维水平为核心的智力素质。从数学课来说,在第三轮班的中学六年,我基本没留过硬性家庭作业,从未收过作业,考试极少,又由于别的科目的老师留作业量也很少,因而使同学们每天晚上 10 点半左右就可以睡眠,优秀生则在 11 点左右睡眠。即使上高三后,大多数学生也能保证 10 个小时左右的睡眠,这种做法保持了学生清醒的头脑和旺盛的精力,使他们不是以题海战术取胜,而是以高水平的思维使难题迎刃而解。更重要的是这种良好的习惯为学生将来进一步的学习和深造,为他们毕生事业的成功打下了坚实的基础。

1985 年秋初一入学的第二轮班,当年入学成绩排北京市东城区第 100 位(小学升中学,是按区考试的)。三年后,在 1988 年全国初中数学联赛北京赛区一、二等奖的共 100 名得奖者中,本班占了 100 名。又过三年,在全国高中数学联赛北京赛区的一、二等奖的共 100 名得奖者中,本班占了 100 名,并且是第 100 名,这个靠前的名次。实验班的彭壮壮同学,1988 年赴美探亲,随即在全美数学竞赛中考入前 100 名(由于不是美国公民也不是永久居留者,未能获得美国奥林匹克数学国家集训队资格,不能参加集训和进一步选拔),1989 年初,他又以一篇数学论文“On the structure of the group of automorphisms of a free group”及答辩,获美国辛辛那提大学数学系授予的荣誉博士学位(西屋寻找科学天才竞赛,是一年一度美国高中学生最高规格竞赛),十多家报纸杂志报导了这一消息并刊登照片,他被哈佛大学免试录取。

第三轮班,不但夺得了国际数学奥林匹克的金牌,同时,在1997~1998年度全国高中数学联赛中,获一等奖猿人,二等奖猿人,三等奖远人,高考时数学平均分为147分,这个分高出当年北京市任何一所中学的校平均分。这个班高考五科总分平均分为588.6分,而在当年升中学时,全班100%的学生成绩低于区属重点中学的录取线。我是不是只抓了数学,挤了别的科目?以上事实已经作出回答。

那么,是什么原因,促成了学生的进步呢?

客观条件上,实验班的工作,得到了北京四中校长的领导和支持,三轮实验班的全体教师:张振良老师、何启真老师(政治)、金润芝老师、李向前老师、李锦文老师、关益成老师(语文)、姜宁老师、聂影梅老师、贾桂芳老师、隋志伟老师(物理)、董爽老师、邹法瑜老师(化学)、蒋倩梅老师、姚远老师、费松丽老师、徐崇孝老师、韩春英老师(英语)、周宝兰老师、景文老师、华亚铃老师(体育)、肖尧望老师、周强老师(生物)、王青梅老师、宋立真老师(历史)、王淑芳老师、李式娴老师(地理),他们不但业务造诣很深,而且热爱学生,热爱教育事业,使整个教师集体和学生集体心心相印、息息相通、血肉相连。

东城区教育局、区委、区政府、北京市教育局,一直关怀我们实验班的工作,许多著名教师,如陶晓勇等常常来班讲学,使学生受益匪浅。

主观上,实验班一贯重视把对学生的思想教育落到实处,教育学生勤奋学习、积极进取,做诚实、正派的人,立志为人民多作贡献。

另外,师生共同在探索一个新的思路,一套崭新的数学学习方法。

本书,就是要向读者介绍这套方法。

这套方法,首先是指导思想上的新认识,而后,才是由此而产生和由它所决定的具体做法。本书的第一篇“怎样学好高中数学”就是介绍上述认识和方法。结合实例,边叙边议。阅读本书时要两者兼顾,既不要光看条条,也不能只读举例。一定请读者结合例题,认真体会所介绍的思想和方法的真谛。

学习方法产生于具体数学内容的学习过程中,其价值在于促成高水平的学习。为此,在本书第二篇“高中数学各章学习指要”的每一章中,都分为“学习指导”和“解题思考方法小结”,这主要是着眼于本章知识的联系和规律,进行简要分析,帮助读者深入认识知识本质,并能做到切实掌握;总结本章题目内容有关特点,学会归纳解题思路。在写法上,凡课本上已写出的定义、定理、公式及解题方法,均不再重复。议叙分析一般从简,多数情况不再配以例题。

为了避免造成读者浮光掠影,收益受限,本书第一篇第 源章中分别举例,就如何学习概念,如何学习定理、公式,如何学习和小结一个单元,如何总结一章习题的解题思考方法,做了示范,请读者细读消化之后,能运用到第二篇的各章,依照“学习指导”和“解题思考方法小结”所列出的纲目,结合课本和习题,依照第一篇第 源章,写出深入详细的分析和总结。这是请读者一定要完成的作业。

本书修订后,还增加了第四篇“解题思考分析的再示范”。

我们反对题海战术,反对让学生通过大量考试、大量做题以成为做题的“熟练工”,而去对付考试应试教育的做法,这种做法不但与我们的教育方针相悖,而且损害学生健康,使学生思维僵化,其结果只能是劳民伤财,于国于民不利。

但是要学好数学,不做题是不行的。题要精彩,做题不在多而在精,对待做题的思想认识和方法要对头,要通过做题,深刻理解概念,扎实掌握基本知识,学会运筹帷幄、纵横捭阖,使自己的思维

水平不断上升,高屋建瓴,只有这样,学生在面对千变万化、面目各异的题目时,才能做到胸有成竹、应付自如,使一道道的难题“落花流水”。当然,这里最关键的是学生形成了系统的解题思考规律。在“解题思考分析的再示范”中,我们对此将作典型的示范。

鉴于篇幅的限制,本书各章之后不再编配习题,请读者在完成上述作业的基础上,选择质量好的习题集,检验自己的解题思考方法,以便提高解题技巧。同时,对新发现的不足之处要及时进行修正。这种循环往复、螺旋式上升的过程,会使自己的思维方法的水平以及能力的水平扶摇直上。

第一篇 怎样学好高中数学

第 1 章 热爱数学 学好数学

一、热爱数学 是学好数学的前提与途径

要完成任何一番事业,首先要热爱它,只有这样,才会满腔激情、全身心地投入,聪明才智、灵感悟性一齐涌上心头,铺平成功之路。这是人人皆知的道理。

但是,数学凭什么让人“爱”?

近两年来,我接到过上百封信,希望了解怎样才能学好数学,这些信北京和其他省市的都有,不但来自中学生,还来自许多家长。

广大中学生希望学好数学,他们的父母也都希望自己孩子的数学“棒”!为什么呢?

做家长的谁不望子成“龙”,成为祖国四化建设栋梁之材!但成“龙”之路怎么走?一些人认为,必须要升高中、上大学,甚至考硕士、当博士。而每每考试,数学总首当其冲,必考,又最难;况且,数学又是许多课程的基础,应用广泛,于是,尽管数学十分枯燥,拼命也得学好。

我不怀疑,伟大目标,将为刻苦学习数学带来巨大的力量,但是能否学好,这里就大有文章了。

因为,被迫地刻苦学习,有如捏住鼻子灌药,咽下去,又可能呕吐出来。近来,许多苦口良药外面裹上了糖衣,大概就是要避免这种遗憾吧!

如果拼命去学的动力,是发现了数学的美,为数学本身的魅力所吸引,则将如美味佳肴,凭它的色香味,使人油然升起强烈的向往。这才是美好数学的沧桑正道。

但是,数学是美味佳肴吗?它的色香味在哪里?

数学的美,是由它的高度严谨和合理而达到的和谐,这是一种令人神怡的内在和谐。

举个小小的例子。

小学生开始学习除法,老师说:把一个量分成若干等份,求其中“员份”那个量(一倍量)的运算叫除法。这样,孩子便产生了一个想法:商肯定不会大于被除数!

可是后来,远米衣 $\frac{1}{2}$ 越 $\frac{1}{2}$ 米,商怎么大于被除数呢?不可思议!只好死记。这是分数除法法则中“颠倒相乘”的结果。于是,

$$\text{远米衣} \frac{1}{2} \text{越} \frac{1}{2} \text{米} \quad \text{伊} \frac{2}{1} \text{越} \frac{2}{1} \text{米}$$

摇摇其实,把一个量分成若干等份,可以换言为:一个量(指被除数)如果是“员份”那个量的若干倍,除法,就是去计算那个“员份”是多少。于是,在本例中,远米即是那个“员份”的 $\frac{1}{2}$ 倍,那么“员份”当然

应该是远米衣 $\frac{1}{n}$ 越 $\frac{1}{n}$ 米了援

这样,在寻求彼此孤立的现象统一解释的过程中,对一个概念(除法)的认识不知不觉地深化了援

事情并未到此结束,从这里继续想下去援由于远米还可以是那个“员份”的 $\frac{1}{n}$ 倍, $\frac{1}{n^2}$ 倍, $\frac{1}{n^3}$ 倍, ... 这时,那个“员份”就是 $\frac{1}{n}$ 米, $\frac{1}{n^2}$ 米, $\frac{1}{n^3}$ 米, ... 越来越大援可以想见,对于远衣葬当葬 \rightarrow 园时,远衣葬将无限地增长,由于葬 \rightarrow 园可以从正、负两个方向进行,所以,远衣葬也将向正或负两个方向无限增大援记做,当葬 \rightarrow 园时, $\frac{1}{n} \rightarrow$ 依肆援这时,我们就从小学算术,经过初中代数、高中代数,而达到高等数学的边缘了援因为,我们从中对高等数学的极限问题,获得了初步的感性认识援

当然,再深入一步,又会产生新的疑问,葬 \rightarrow 园在数轴上,是趋向于一个点,而 $\frac{1}{n} \rightarrow$ 依肆却是背道而驰的两个方向援这怎么统一呢?

在非欧空间中统一这个矛盾现象,并非难事,当然,这远远超出了中学的范围援

这样的例子,数学中俯拾皆是援而这种寻求联系、统一的过程,不仅令人兴趣盎然,也是学好数学的正确途径援这样就能置知识于系统中,从系统的高度去理解、去把握每一个概念,着眼于并掌握每个环节的内涵和它与它以外事物的关联,以及相互联系中的规律援

这样学习,将能扎实地掌握知识援因为,得到的知识是具有结构的整体援不仅如此,由于总是着眼于联系的发现和规律的研究,一方面,养成了联想的习惯;另一方面,经常需要从本质上认识事物,逐步形成较深刻的观点,从而提高了能力,完善了素质援这其实是学习数学的重要目的援因为,近年有人提出,数学不但是研究现实世界的存在形式和数量关系的科学,数学还要研究人类的存在形式和人类思维的模式援

当然,伴随着能力的提高,素质的发展,学习效果必不可同日而语了援

二、学好数学,需“醉翁之意不仅在酒”

据说,爱因斯坦曾对一位朋友说:“我有一位朋友,他是一位才子,他认为,当一名学生毕业离开老师和学校时,如果把几年来所学的功课全部忘记了(当然,这是不可能的),这时,他所剩下的,才是这所学校和他的老师的教学及教育的实在成果援

都忘光了,谈何成果?不可思议援

细想之下,令我折服援这段话的意思是,教学和教育的真谛在育人,在学生能力的提高,素质的发展和完善援

那么,作为学生,不是也应该有同样的理解和认识吗!自己的目标,当是通过学习知识来学习思考,学会分析和解决问题,培养和提高自己的能力,发展和完善自己的素质,把自己变得更加聪明,实现了这个目标后,无论是继续进一步的学习,还是指导实践,都会干出突出的成就援

这就是说,学习的是知识,但“醉翁之意不在酒(知识)”,而在能力、素质的发展援

但是,能力和素质的追求,实现于学习知识的过程中,离不开知识援而且,掌握知识,是进学校的初衷援所以,应该全面地认识“醉翁之意不仅在酒”的深刻道理援

怎样才能实现上述的目标?

就学习数学而言,要掌握以下几个方面:学习任何知识,都要从系统的角度出发,着眼于知识的联系和规律,发掘其本质,注意数学思想的渗透和哲理观点的升华;为此,要经常进行总结,善于比较和区别,学习知识要总结,做题也要经常总结,一题多解,多解归一,多题归一,有所发现,有所创造,有所前进;从而,在主动学习中,实现扎实掌握知识、提高自己能力、完善自己素质的目标。

本书第一篇,将分别就以上几个方面,进行详细地讲解。

第2章 摇站在系统的高度学习

一、理解概念要深入本质,注意抓住知识之间的联系

中学课程的每一门学科,都有自己的基本概念、基础知识,即通常所说的双基。它们不仅本身有着广泛的应用,而且,对于其他知识有着较大的甚至规定性的影响,所以,掌握好它们,就成为十分必要的了。

但是,怎样才算把它们抓住了?背得滚瓜烂熟,是没有多大价值的。重要的是,理解它们,才能掌握和应用它们。那么,怎样才算理解呢?字面上弄懂仅仅是第一层次,还必须弄清它和它以外事物的关联,从本质上融会贯通,这当然应该从系统的角度去分析认识它们了。

举个例子。

有一次,我曾对一所高中数学奥林匹克学校的学生提出一个问题:

摇摇请你写出,命题“直角相等”的否命题。

居然,在数百名数学学习的尖子生中,几乎没有人能正确作出回答。他们异口同声地答道:所求否命题是,“不是直角不相等”。

问他们,根据是什么?他们说,一个命题的否命题,就是在原命题的题设和结论的前面,分别添上“不是”两个字。

多么表面和肤浅的理解!

因为,所谓添上“不是”二字,只是形式上的实质,是要把原来的说法否定,就是写出原来说法的反面情况。

原来题设的反面情况是什么呢?

$\angle A, \angle B, \angle C, \dots, \angle D$ 都是直角的反面情况,既包括它们都不是直角,也包括它们之中有的角是直角,有的角不是直角,一言以蔽之,应当说, $\angle A, \angle B, \angle C, \dots, \angle D$ 不都是直角。

同样地, $\angle A, \angle B, \angle C, \dots, \angle D$ 都相等的否定,应当是,不都相等。

这样,所提问题的正确回答应当是,“不都是直角的角,不全相等”。

同学们所犯错误的根源,即在于,对于“不是”的理解只求表面现象,不抓实质。

其实,这个错误,不仅暴露了同学们对“否命题”概念的理解还停留在表面上,而且,对于“补集”概念的理解,也没有抓住实质。

如果,记 $\angle A$ 为 A , $\angle B$ 为 B , $\angle C$ 为 C , \dots , $\angle D$ 为 D ,那么, $\angle A, \angle B, \angle C, \dots, \angle D$ 都是直角,就可表示为 $A \cap B \cap C \cap \dots \cap D$,那么,它的补集是 $\overline{A \cap B \cap C \cap \dots \cap D} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \cup \dots \cup \overline{D}$,意思就是, $\angle A$ 不是直角或, $\angle B$ 不是直角...或 $\angle D$ 不是直角。换言之, $\angle A, \angle B, \dots, \angle D$ 不都是直角。

类似地可以得到: $\angle A$ 和 $\angle B$ 并且, $\angle A$ 和 $\angle C$ 并且 $\angle B$ 和 $\angle C$, \dots , $\angle (A \cap B)$ 和 $\angle C$ 它的补集是, $\angle A \neq \angle B$ 或 $\angle B \neq \angle C$ 或 $\angle A \neq \angle C$, \dots 或 $\angle (A \cap B) \neq \angle C$ 即 $\angle A, \angle B, \angle C, \dots, \angle D$ 不都相等。

由此看来,无论是在理解“否命题”这个概念,还是在理解“补集”这个概念时,如果能抓住它们的实质,上述错误都可避免。不仅如此,还将发现,在课本上,相距“迢迢”的两个概念(“否命题”出现源

在初中《几何》中，“补集”出现在高中代数中），竟然互相沟通了起来援
挖掘知识之间的联系，会使我们加深对每个知识的理解，它，多么重要！

二、在类比中发现和谐，简化记忆

数学，是中学课程中的一门主科，课时最多，内容浩瀚，记忆和掌握起来，都比较困难援
站在系统的高度，注意比较知识间的联系和区别，不但有利于抓住问题本质，而且可以找出规律即共性，简化记忆，便于掌握援这也是因为，联系、规律、和谐，正是数学科学的本来面目援
举一个例子援

如果在学习初中代数正比例函数 $y=kx$ 的图像时，注意到函数的图像是随函数解析式中常数 k 的不同而不同，换言之， k 决定着图像直线的位置援在这里， k 的符号，决定着直线所在象限的位置； k 的绝对值决定着直线向上方向和 x 轴正向夹角的大小援而当 k 值遍取（ $-\infty$ ， $+\infty$ ）上的全体实数时，直线 $y=kx$ 则绕原点旋转而扫遍除 x 轴以外的整个坐标平面（若允许 $k=0$ ）援

这样，后来学习二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 时，可以事先就猜想，是否常数 a 的取值将决定曲线 $y=ax^2+bx+c$ 的位置？结果发现 a 的符号决定着曲线所在象限的位置情况； a 的绝对值决定着曲线与 x 轴的相对位置情况；当 a 值跑遍在（ $-\infty$ ， $+\infty$ ）上的全体实数时，曲线 $y=ax^2+bx+c$ 将扫过除 x 轴之外的整个坐标平面援那么，这将在入门伊始，就抓住了学习二次函数的关键，使得利用二次函数求最大（小）值，解一元二次不等式等一系列问题，不难得到解决援

当然，由于 $y=ax^2+bx+c$ 的图像是一条曲线， a 在决定曲线与 x 轴相对位置的时候，已经影响了曲线的形状援

升入高中，学习幂函数 $y=x^a$ ，在同样思想的指导下，不难发现，仍是常数 a 决定着曲线 $y=x^a$ 的位置和形状援当然，由于常数的位置发生了变化，从系数的位置，移动了指数的位置，那么，常数 a 的符号，已不再决定曲线所在象限的位置情况，而是决定曲线通过（ $0,1$ ）点还是（ $1,1$ ）点； a 的绝对值决定着曲线在 a 取定某个值时，曲线的曲率情况援但一方面又是类似的，即 a 跑遍在（ $-\infty$ ， $+\infty$ ）上的实数时，曲线扫遍除直线 $y=x$ 以外的整个第一象限援

以上的两次类比，启发我们去想像，函数解析式中的常数，可能总是以某种分类方式（按符号分类，是以 0 作为界点的分类）来影响着函数图像曲线的某种特征，而且，当这个常数跑遍它所允许范围内的每个实数时（是连续取值），图像曲线总是扫遍某个区域援

对于指数函数 $y=a^x$ （ $a>0$ 且 $a \neq 1$ ），由于 $a > 1$ 我们以 1 作分类的界点援当 $a > 1$ 时，函数图像曲线呈上升状态；当 $0 < a < 1$ 时，曲线呈下降状态； a 较大时，则在曲线的高于直线 $y=x$ 的部分，较靠近 x 轴正向； a 较小时，则在曲线的高于 $y=x$ 的部分，比较远离 x 轴正向援抓住了这几位，以及曲线都在 x 轴上方并且通过（ $0,1$ ）点，那么，熟记指数函数的各种性质，将易如反掌援

例如，由于曲线都在 x 轴上方，当然， $a > 1$ ，如图 1 所示援
摇摇又如， $0 < a < 1$ 时，曲线呈下降状态，当然函数 $y=a^x$ 为减函数，如图 2 所示援又由于，曲线通过（ $0,1$ ）点，当 $a > 1$ 时， $a^x > x$ ；当 $0 < a < 1$ 时， $a^x < x$ ，如图 3 所示援这样掌握和记忆指数函数的性质，当然比单纯死记用列表法写出的性质表，要好得多了援

摇摇关于对数函数 $y=\log_a x$ （ $a>0$ 且 $a \neq 1$ ）中常数 a 作用的讨论，与对于指数函数中 a 的讨论十分相似，请读者自己动手完成援

上述这种讨论，对于高中数学中所学习的最后一种函数——三角函数，同样是有益的援

第3章 把知识的学习、能力的培养、素质 摇摇摇的发展与完善有机地结合起来

一、主动学习

一个学生的学习过程,有人把它分成了“预习”、“课堂听讲”、“复习”三个环节,也有人把“预习”、“课堂听讲”合并为“听讲”,因为“课堂听讲”是听老师讲,“预习”则是听编书人在讲,也有人把“复习”分为“做作业”和“复习”两个环节。

本书第一篇的第三章和第三篇,将分别就“做题”和“复习”时的主动学习问题提出看法,本章主要谈谈“听讲”时的主动学习问题。

听讲要专心,但专心的标准是什么?

人们当然会回答:精神集中,不走神。

我认为,这并不是一个理想的回答,因为,只做到把精神集中到老师的讲授内容上,是跟在老师的后边亦步亦趋呢,还是把老师的讲解作为一个因素,独立思考、主动思考,创造性地进行思维,这两者之间就有很大差别了。

听讲时,紧跟老师,把老师的每一句话都听进耳朵里,再弄懂它的意思,从而把它们都记熟。一般地说,这对于知识的学习,能收到较好的学习效果,但总是处于被动的状态,思维的创造性和飞跃都会受到限制。

怎样才能摆脱这种被动,我建议同学们,给自己的课堂听讲应当规定下面这样两条要求。

一是要“超前思维”。这是指,一个概念提出来了,自己先试着去定义它;一个命题提出来了,自己先试着去判断它的真假;一个定理或公式写出来了,自己先试着去证明它;一道例题写出来了,自己先试着分析、解出它;甚至在学习过程中,自己设想,该提出什么命题了,该定义什么概念了等。总而言之,让自己的思维跑在老师讲解(包括预习阅读时的文字叙述)的前面,达不到大跨度的超前时,则争取设想老师正在说着的这句话的下一句话是什么。

这样做的结果,由于名词、定理、公式是自己定义、推导出来的,身临其境,清楚过程中的坎坎坷坷,当然理解就深刻,掌握就会牢固。即使将来忘记了,自己还可以再重新推证出来。而且是在游泳中学游泳,推理能力、思维能力经常得到训练,当然会逐步地得到培养提高。

二是在判断问题时,敢于“向老师挑战”。在进行“超前思维”的听课中,有时老师已经讲出了结论,自己还没想出来;或者老师想出了一种解题思路,自己的思路却没完成,这时该怎么办?

我想,从“一分为二”的观点出发,两种极端都是不可取的。

一种极端就是前面所讲的,完全做老师讲课的尾巴、应声虫;另一种极端是,完全撇开老师,自己另搞一套。

我建议,如果自己的想法和老师的大体一致,要分析老师之所以能完成的原因,找到自己的症结是在知识上,还是在方法上,或是在思维上?如果自己的大致判断和老师的结论不一致,那么,不妨试试去推翻老师(包括书上)的结论。

为什么要这样做?因为,第一,老师(包括书上)的结论未必永远正确;第二,在你失败的尝试推翻的过程中,将会从反面加深对概念的理解。同时,这种独立构思、带有辩论性质的论证,更有助于