名家导学系列

孙维刚初中数学

孙维刚摇编著

北京大学出版社
·北 京·

内 容 简 介

本书是著名的数学教育家孙维刚老师的著作，涵盖了现行教育大纲中所要求掌握的内容，是孙老师三轮实验班的教材。本书立足于对基础知识的分析把握，以及对方法和思想的指导，各章由学习指导和例题两部分组成，在详述概念后，引申概念外围的规律、方法，以及解题思考规律。书中提出，学好数学必须站在系统的角度看问题，力求一题多解、多解归一（结论一个）、多题归一（善于总结），善于用"动"的观点思考问题（做到"风物长宜放眼量"），这对开启学生的数学智慧，掌握科学的学习方法、思维规律，提高学习效率有很大的帮助。

本书可作为中学教师和学生的辅导用书或自学教材。

摇图书在版编目（CIP）数据

摇孙维刚初中数学／孙维刚编著摇—北京：北京大学出版社，[illegible]

摇（名家导学系列）

摇[illegible]

摇Ⅰ摇孙…摇Ⅱ摇孙…摇Ⅲ摇数学课 原初中 原数学参考资料摇Ⅳ摇[illegible]

摇中国版本图书馆CIP数据核字（[illegible]）第[illegible]号

摇书　　　名：孙维刚初中数学
摇著作责任者：孙维刚摇编著
摇责 任 编 辑：温丹丹
摇标 准 书 号：[illegible]
摇出　版　者：北京大学出版社
摇地　　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内摇[illegible]
摇网　　　址：[illegible]
摇电　　　话：邮购部 [illegible]摇发行部 [illegible]摇编辑部 [illegible]
摇电 子 信 箱：[illegible]
摇排　版　者：北京东方人华北大彩印中心摇摇电话：[illegible]
摇印　刷　者：
摇发　行　者：北京大学出版社
摇经　销　者：新华书店
[illegible]毫米 [illegible]毫米摇[illegible]开本摇[illegible]印张摇[illegible]千字
[illegible]年[illegible]月第[illegible]版摇摇[illegible]年[illegible]月第[illegible]次印刷
摇定　　　价：[illegible]元

目摇摇录

第一篇摇代摇摇数

第二篇摇平 面 几 何

第三篇摇专 题 选 讲

第三版序

拿着笔，眼前不断地浮现出孙维刚老师著述时的情景。

他真的很忙，也很累。对于出版社的约稿，从不会拒绝别人要求的孙老师，总是一拖又拖，直至无法再拖，最后，只好硬着头皮放下手里永远干不完的“活儿”，伏案而书。

每逢写作，他总习惯桌子上除了稿纸以外，就是一支笔，其他东西统统搬走。

桌子还是那张桌子，灯光依旧。

我还清楚地记得他写作本书时用的那支笔，一支套着白色金属帽，有着草绿色笔杆的普通钢笔。因长时间的频繁使用，笔尖早已磨秃了，但写起字来却很流畅。他说：“这支笔可立了功，从一参加工作，我就用它，从没有离开过。”后来，这支笔在一次开会时不慎遗失，为此，他遗憾了很多日子。

孙老师写作起来，速度很快。从早晨到晚上，头都不肯抬一抬，只看见他握笔的手在稿纸上疾速地移动，发出沙沙的声音，间或夹杂着晃动涂改液的嗒嗒声。就这样，一天一万字，一气呵成。那笔尖流淌出的智慧，分明是他和学生心的碰撞。因此，读他的文字，就像听见他在课堂上的讲课，娓娓道来，带领着他的学生思潮如涌。

当这部著述终于完成时，他微微活动一下早已疲惫的身躯，细细地审视着手中的稿子，自言自语地说：“我要对得住我的读者。”这是他的心声。我还清楚地记得他很多次地引用过好友周沛耕老师的话：“教师的一切成就都是学生给的。”

另外，当您拿到这本由北京大学出版社出版的《孙维刚初中数学》时，一定要将前面“作者的话”细细地阅读，因为里面有很多重要的话要告诉您，这也是孙老师生前常常说给来信、来电或当面咨询的读者的话。

最后，衷心地希望这本《孙维刚初中数学》能对广大青少年朋友学习数学有所启迪。

如今，斯人已逝，谨以此序寄以无限的思绪。

王海亭

摇摇[illegible]年元月于北京

第二版修订说明

摇摇幸蒙老师和同学们的关怀，拙述《初中数学》、《高中数学》两本书，至今已六次印刷，逾 灵园万册。

其间，我受到各地老师和同学们热情来信的勉励和盛情建议，使两本书修订再版。

在保留原书主体的基础上，两书都在解题思考规律的应用，即提高解题能力方面，进行了补充。《初中数学》在一些主要章节，补充了一些新的例题分析；《高中数学》，则补充了“第四篇摇解题思考分析的再示范”。

《初中数学》书中某些知识，在新的九年义务教育大纲中列为选学或不学，本次再版，仍予保留。我的考虑是：

灵援读者中许多学生初中毕业后要继续学习，特别是要升入普通高中，书中对这些少量知识的学习指导，还是很有价值的；

圆援本书立足于对知识分析把握的指导，立足于对方法和思想的建议和指导，所以阅读这些部分是有益的。

另外，想多说几句的是关于如何学好数学的问题。

数学，是学生投入最多的一门课程，但许多同学却为并没取得理想效果所苦，部分同学甚至陷入题海，昏天黑地，以至望而却步。

究其原因，在于方法不得要领，或根本不当。

本人认为，学好数学，首重概念扎实、基础知识牢固，这几乎是人所共识。但究竟什么是“扎实”、“牢固”？又怎样才能“扎实”、“牢固”？则恐多有差异，甚至大相径庭了。

汽车飞驰，离不开动力的心脏——发动机，但必须通过变速箱、大轴，最后作用到轮子上。解数学题亦如此，概念、基础知识（发动机），要发挥作用，也必须靠一连串连接装置，即对概念的理解、引伸，概念外围的规律、方法，以及解题思考规律，这些在课本上是没有的。

学好数学，还要学会聪明地做题。既要在做题的实践中加深理解、增长才干，又不为其所累。怎样才是和才能“聪明地做题”？

而最根本的出路，是在学习过程中，提高了能力，完善了自己的素质。

怎样实现这美好的一切？本书就是要向广大同学、青年教师展示其途径。

限于水平，书中疏误仍将很多，诚请批评指正，不胜感谢。

摇 孙维刚

灵怨怨怨年 圆月于北京

作 者 的 话

数学是一门很重要的基础课援如何学好数学,这是许多中学生共同关心的问题援为此,本书就初中代数和平面几何的学习,结合自己多年的教学经验和具体实例,对如何学、学什么的有关方法和要求作了论述援供同学们学习参考援

一、明确学习数学的目的

明确目的,这是做好一件事情的前提援

学习数学的目的是什么呢？

人们常说,要把数学学好,因为它是学好许多功课的基础援但这个“基础”指什么？在理解上,差别就大了援

有人说,初中化学里计算化合物组成的百分比、利用化学反应方程式的计算,都要利用比例,这是数学里学的 ;高中化学里有关质量分数、物质的量浓度的计算,也要用数学 ;而物理中,只要把公式确定好了,余下的工作就是公式变形及代入数值进行计算,这些都是数学的问题援所以,数学学不好,物理、化学也学不好,因此,数学是基础援

这种理解是片面和肤浅的,只把数学视为一种工具 (尽管是非常重要的工具) 是不利于把数学学好的援

恩格斯指出 数学,是研究现实世界的存在形式和数量关系的科学援

近年来,已经有人提出 数学,是研究人类的存在形式和思维方式的科学援它既不能完全包含于社会科学之内,也不能完全包含于自然科学之内援科学的分类,已经不能只分为自然科学和社会科学两大类,还应该有第三大类 数学援

许许多多优秀的学生,正是在学习数学的过程中,自觉或不自觉地优化了自己的思维方式,培养和提高了能力,发展和完善了自己的素质援说句通俗话,把不聪明的自己变得聪明了起来,让聪明的自己更加聪明,从而使他们成了各个领域内的佼佼者援

基于上述认识,就产生了下面的学好数学的具体作法援

二、深入本质,渗透思想,升华观点

学习中要“抓住本质”,这是许多人的经验援但什么是“本质”,怎样去抓住它援在认识上人们又有很大差距援

有人认为,对于定义、定理、公式,不仅要熟记它们的文字表述,还要准确无遗漏地掌握它的构成,这就是“抓住本质”了援例如,圆的定义“在平面中,到一个定点的距离等于定长的点的集合”中,有三个要素“平面”、“定点”、“定长”援

不能否认,这种认识并无错误,但它绝未达到理想的境界,一方面,这样学下去,随着新的概念、知识的不断进入,记忆上不堪重负,因而要经常复习,否则,常常学新忘旧,因为它们在脑子中各自为政,没有浑然一体嘛 进一步说,这个学习过程,对一名学生在思维建设上,是没有促进作用和价值的援

那么,在学习知识上,正确的作法是什么呢？

应该从系统的角度学习知识，置知识于系统中，着眼于知识之间的联系和规律，从而深入本质，因为联系和规律就是本质援着眼于数学思想的渗透援

举例做个说明援

初中《几何》中有一条定理：如果一个角的两边分别平行于另一个角的两边，那么这两个角相等或互补，如图 园原所示援

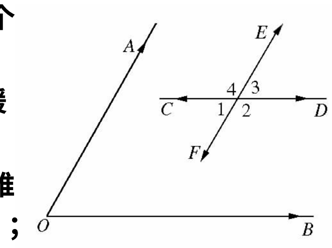


图 园原

当 悦阅//韵月，耘云//韵粤时，∠员 ∠圆 ∠猿 ∠源和 ∠粤韵月相等或互补援

但何时相等，何时互补呢？没有明确说明援

这时，如果我们把图中 缘个角的边的射线方向都加以标注，则不难得到结论：当两组平行边的射线方向全相同或全相反时，这两个角相等；两组平行边的射线方向一同一反时，这两个角互补援即：

∠粤韵月越∠猿，∠粤韵月垣∠圆越∠粤韵月垣∠源越员愿园毅，∠粤韵月越∠员援

这样，就发掘了知识之间的联系和规律，加深了理解援

进一步，如果再把两条射线方向相同的关系规定为“ 垣”，方向相反的关系规定为“ 原”，把两个角相等的关系规定为“ 垣”，互补的关系规定为“ 原”援那么，初一代数中有理数乘法的符号法则：“ 垣”、“ 垣”得“ 垣”，“ 垣”、“ 原”得“ 原”，“ 原”、“ 垣”得“ 原”，“ 原”、“ 原”得“ 垣”援不正描述了本定理确切的结论吗！

认识又加深了，大自然中的联系竟如此微妙！

再进一步援如果将直线 耘云平移，使它与 韵粤所在直线重合，如图 园圆所示，由前所述，当然继续有 ∠粤韵月越∠猿，∠粤韵月垣∠圆越员愿园毅，∠粤韵月越∠员援但这时，上述关系，不正分别是“两直线平行（悦阅// 韵月），则同位角相等（∠粤韵月越∠猿）”；“两直线平行（悦阅// 韵月），则同旁内角互补（∠粤韵月垣∠圆越员愿园毅）”和“两直线平行（悦阅// 韵月），则内错角相等（∠粤韵月越∠员）”吗！

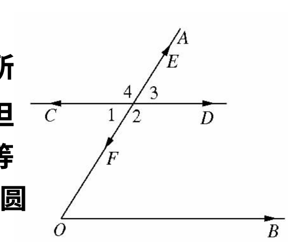


图 园圆

微妙的联系正向纵深发展！

在图 园圆的基础上，把 悦阅平移，使之与 韵月所在直线重合援那么，∠粤韵月和∠猿的相等，不也是“角相等定义”吗！∠粤韵月分别和∠圆及∠源的互补，不也是平角定义吗！而∠粤韵月和∠员的相等，竟然可同时认为是对顶角相等！如图园猿所示援

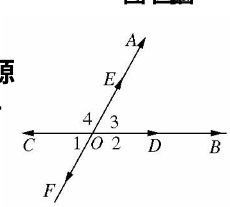


图 园猿

知识间的联系，竟如此令人意想不到，却又如此合情合理援

分散在初中《几何》第一册里的有关角的 源园多条定义、定理中的 远条定义、定理（角相等定义、平角定义、对顶角相等、两直线平行则同位角相等、同旁内角互补、内错角相等），竟全包括在一条定理（如果一个角的两边分别平行于另一个角的两边，那么这两个角相等或互补）内援事实是，这一条定理是那 远条定义、定理的联合推广；那 远条定理则是这一条定理的特例援因为，它们原本是一个系统援这种学习方法，就是置知识于系统中，着眼于知识之间的联系援

它的优越在哪里呢？

首先，这个融汇贯通的过程，使我们透过繁杂的现象，抓住了本质，同时简化了记忆援

更重要的是，接触了一种崭新的认识问题的思想方法：由寻找联系入手，运用规定（定义）平移、变换等数学思想和从“特殊到一般，又从一般到特殊”的方法，把个别、离散的现象构造成浑然一体的系统，这已经标志着能力的提高和素质的发展了援以这种提高和发展，去学习、去解题，将与过去

不可同日而语援因为解题过程的本质，就是以敏锐的观察、分析，去发现和建立已知条件和结论之间的联系援

三、“头悬梁、锥刺股”就是刻苦吗

老师们多次向学生介绍过古人苏秦“头悬梁、锥刺股”的故事，勉励学生像他那样发愤学习援不少同学也常常以“头悬梁、锥刺股”的精神自勉、自激、要求自己，上课时，瞪大了眼睛，张开自己脑中的“口袋”，把老师讲的每句话、写出的每个字，统统装进自己的“口袋”中；课后认真完成作业，按时交作业，发下来有错必改，做完老师留的作业，还要自己再找题做，熟能生巧嘛！做完作业，还要主动复习、经常复习，“顽强”地和疲劳、瞌睡做“斗争”，直到把笔记或书上划出的重点啃得滚瓜烂熟援

这算不算刻苦学习了呢？

笔者以为，精神诚可贵，效果未必好援因为，学习本身也是科学援在课堂听讲、做作业、复习这三个环节上，都要科学、有成效地刻苦学习，这应表现为如下的努力援

（一）超前思维，向老师挑战

课堂上，努力争取想在教师讲授的前面援定理、公式，争取自己推导出来；例题，争取自己先分析、解答；进而，当命题的条件刚刚写出，自己就去猜想它的结论；一个新的概念出现时，自己就试着去定义它；甚至，随着课程的进行、知识的发展，自己设想，又该提出什么命题了，又该定义什么名词了……

当然，高水平的教师在讲课时，应该给学生的超前思维留有时间上的余地，甚至创造条件，鼓励和启发学生超前思维；而听课学生的超前思维，又应该和老师密切配合，不能因为自己还没想出来，就充耳不闻老师的讲解，自己另搞一套援

课堂听讲的这种方式的优点在于，例题既然是自己解出来的，定理、公式既然是自己证出来的，当然理解深刻，印象深刻，记忆久远，不易遗忘援即使忘了也不怕，因为本来就是自己推出来的，就再推嘛！省却了许多临考前还要复习背诵的时间援

更重要的是，在这个过程中，培养了能力，在 源缘分钟的课堂上，每当有个短短的一两分钟甚至几分几秒钟的间隙，都要努力去往前想，这种高强度的要求，才是真正的刻苦援这样必能很好地锻炼思维援

“向老师挑战”是什么意思？

上面谈到，课堂上的超前思维过程，常常还没来得及想出来，老师已经开始讲解了，或者，自己虽想出了结论，但与随即而来的老师的结论或方法不同援这时，不应立即“缴械投降”，还要做些“挣扎”援首先是要问“为什么”，甚至力图否定老师的结论或方法，这样做的结果，如果没有成功，则证明老师是对的，这时再接受老师的结论或方法援由于从反面尝试了“打不倒它”的滋味，自然对这个结论或方法，就有了深刻的体会，从而实现了高质量的理解和消化老师的讲授；如果否定的努力成功了，它的意义，决不在于一两个结论或方法的改进上，许多出类拔萃的学生的成功，都是在这里埋下了飞跃的种子援

讲三个真实的故事援

第一个故事，灵愿愿年 猿月的一次数学课上，我把一道从课外读物上选来的题目，抄在黑板上：

荛，遭，糟曾都是实数，并且 荛约遭约糟试求 灪原荛逭亘灪原遭逭亘灪原糟的最小值援

一部分同学经过思考，提出了如下相同的解法（后来我讲一些教师解此题并在北京市数学奥林匹克学校写出此题，大家也是这个解法，当然，也有不少人不会解此题）援

首先，运用实数绝对值定义，分情况打开绝对值号，得

原式 越
原(曾原葬 原(曾原蓮 原(曾原糟，(曾≤ 葬
曾原葬原(曾原蓮 原(曾原糟，(葬约曾≤ 蓮
曾原葬垣曾原蓮原(曾原糟，(蓮约曾≤ 糟
曾原葬垣曾原蓮垣曾原糟 (曾跃糟

整理得

原式 越
葬垣蓮垣糟原曾 (曾≤ 葬
原葬垣蓮垣糟原曾 (葬约曾≤ 蓮
原葬原蓮垣糟垣曾 (蓮约曾≤ 糟
猿曾原(葬垣蓮垣糟，(曾跃糟
（*）

在每一段上进行分析援

Ⅰ摇当 曾≤ 葬时，由于 葬垣蓮垣糟是定值，则当 曾取得最大值 葬时，得到这一段上原式的最小值为 葬垣蓮垣糟原葬越蓮垣糟原园葬；

Ⅱ摇当 葬约曾≤ 蓮时，由于 原葬垣蓮垣糟是定值，则当 曾取最大值 蓮时，得到在这一段上原式的最小值为 原葬垣蓮垣糟原蓮越糟原葬；

Ⅲ摇当 蓮约曾≤ 糟时，由于 原葬原蓮垣糟是定值，则当 曾取最小值时，原式得到在这一段上的最小值，但 曾在这一段上无小值，曾跃蓮故原式在这一段上的最小值大于 原葬原蓮垣糟垣蓮越糟原葬；

Ⅳ摇当 曾跃糟时，由于 原葬原蓮原糟是定值，则当 曾取最小值时，原式得到在这一段上的最小值，但曾在这一段上无最小值，曾跃糟故原式在这一段上的最小值大于 猿糟原(葬垣蓮垣糟 原园糟原葬原蓮援

比较Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ的结果，由于 葬约蓮约糟则 糟原葬约糟原葬垣(蓮原葬 越蓮垣糟原园葬 同时，糟原葬约糟原葬垣(糟原蓮 越园糟原葬原蓮故所求原式的最小值，在第Ⅱ段上取得，为 糟原葬此时，曾越蓮援

我为了显示数形结合思考的优越性，在黑板上，写出了我的函数解法（由于我在教学上从系统出发，着眼于联系、规律，着意于能力、素质，课程进度自然加快，初二结束时，学完初三功课，高一结束时，学完高三功课，所以，此时已学到二次函数了）援

从上面（*）开始，改写（*）式为

原式 越
原猿曾垣葬垣蓮垣糟 (曾≤ 葬
原曾原葬垣蓮垣糟 (葬约曾≤ 蓮
曾原葬原蓮垣糟 (蓮约曾≤ 糟
猿曾原(葬垣蓮垣糟，(曾跃糟

则函数 枣曾 越渣曾原葬渣垣渣曾原蓮渣垣渣曾原糟渣的图像如图 园原所示援

显然 枣曾 的图像在 曾越蓮时为最低点，即 曾越蓮时，枣曾 得到最小值，为

枣蓮 越渣蓮原葬渣垣渣蓮原蓮渣垣渣蓮原糟渣越糟原葬援

这个解法的前半部分与解法一相同，有个繁琐的打开绝对值号的过程，但后半部分直观性强，简捷，如图 园原所示援

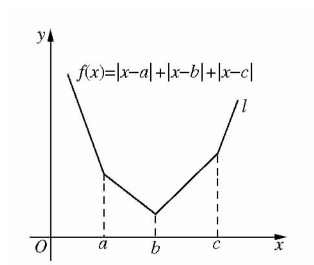


图 园原

这时，李毅同学举手了，“孙老师，我的解法比您的还简单援”

他走上黑板，画了一条数轴，如图 园缘所示援

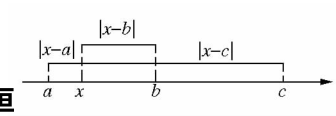


图 园缘

然后说，渣曾原葬渣表示点 曾和点 葬之间的距离，渣曾原葬渣垣渣曾原遭渣垣渣曾原糟渣表示了点 曾到点 葬遭糟的距离之和援当然，这三条线段没有重叠部分时，这和最小，此时 曾越遭这最小和为点 葬糟的距离，为 渣糟原葬渣越糟原葬援如图 园远所示援

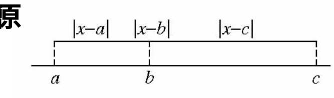


图 园远

多么简捷，多么清新，漂亮极了援

而且，他还加以推广，总结出了一般规律：

当给出 葬约遭约糟约凿时，曾取点 遭点 糟间（包括 遭糟的任一值，原式皆得最小值，从图 园远上易见，它为

(凿原葬) 垣(糟原遭)；

当给出 葬约遭约糟约凿约藻时，取 曾越糟时，原式得最小值，它为 (藻原葬) 垣(凿原遭)；

以此类推，葬遭糟凿…有奇数个时，使 曾为中间的 员个；葬遭糟凿…有偶数个时，使 曾为中间的两个之间的任一值（包括这两个值）援

瞧，对于一个 员源岁的孩子，不是难能可贵吗！

一年后，李毅同学在 员怨愿缘年 源月全国初中数学联赛中，获北京赛区一等奖，并越级参加北京市高中一年级数学竞赛，再获一等奖援半年后刚入高一的李毅同学，参加 员怨愿缘年度全国高中数学联赛，以两试满分并列全国和北京赛区第一名，员怨愿远年度获二等奖，员怨愿苑年度再获一等奖及北京赛区第一名，员怨愿园年度，被免试录取入北京大学物理系援

第二个故事援

“向老师挑战”，也包括“向课本挑战”援

事情发生在 员怨愿苑年 远月，彭壮壮同学正读初一，刚刚 员猿岁，学习“算术根的性质”援

我介绍了课本上对根的性质的证明方法：

二次算术平方根的性质

(员) √葬·遭越√葬·√遭 (葬遭≥园) 摇摇摇摇 (圆) √(葬/遭)越√葬/√遭 (葬≥园遭跃园) 援

证明：

(员) 当 葬遭≥园时，

疫 (√葬遭)圆越葬遭，(√葬·√遭)圆越(√葬)圆·(√遭)圆越葬遭及 √葬遭≥园，√葬·√遭≥园

亦 √葬遭越√葬·√遭援

(圆) 当 葬≥园，遭跃园时，

疫 (√(葬/遭))圆越葬/遭，(√葬/√遭)圆越(√葬)圆/(√遭)圆越葬/遭及 √(葬/遭)≥园，√葬/√遭≥园

亦 √(葬/遭)越√葬/√遭援

这时，彭壮壮同学举手到黑板前，写出了运用 (员) 的结论，这是对于 (圆) 的一种全新的证明援

当 葬≥园，遭跃园时，

√(葬/遭)越√(葬/遭)·√遭/√遭越√((葬/遭)·遭)/√遭越√葬/√遭

这个巧妙的证明，我还没有在任何书上见过，但它的价值，并不止于此援彭壮壮是有意识地应用了“把新课题归结到旧知识的基础上”这个解决问题的基本思想援

半年后，当学到“对数性质”时，班上广大同学都运用这个思想，迅速想出了优于课本上的对于“商的性质”的证明，如下所示，

“商的对数的性质”

$$\text{遭灶}_{葬}\frac{酝}{晕}越\text{遭灶}_{葬}酝原\text{遭灶}_{葬}晕\text{（酝，晕，葬跃园，且 葬}\neq\text{员）}$$

课本上的证明：

当 酝，晕，葬跃园，且 葬≠员时，

设 $曾越\text{遭灶}_{葬}\frac{酝}{晕}$，$赠越\text{遭灶}_{葬}酝$，$扎越\text{遭灶}_{葬}晕$援

由对数定义可得，$葬^{曾}越\frac{酝}{晕}$，$葬^{赠}越酝$，$葬^{扎}越晕$，

所以，$葬^{曾}越\frac{葬^{赠}}{葬^{扎}}越葬^{赠原扎}$

则摇曾越赠原扎，

即摇$\text{遭灶}_{葬}\frac{酝}{晕}越\text{遭灶}_{葬}酝原\text{遭灶}_{葬}晕$援

而我们班上多数同学的证明为，

$$\text{遭灶}_{葬}\frac{酝}{晕}越\text{遭灶}_{葬}\frac{酝}{晕}垣\text{遭灶}_{葬}晕原\text{遭灶}_{葬}晕越\text{遭灶}_{葬}\frac{酝}{晕}\cdot晕原\text{遭灶}_{葬}晕越\text{遭灶}_{葬}酝原\text{遭灶}_{葬}晕援$$

简捷明快！谁的功劳？是基本数学思想武装了头脑的结果，追根溯源，当归功于“向老师挑战”援

一年后，彭壮壮同学又应用这个思想和方法，对于高等数学中的一门课程《实变函数》“集合论”中的一道习题，借助于“交”对于“并”的分配律的结论和狄莫更公式，漂亮地完成了“并”对于“交”的分配律的证明援由于中学同学知识所限，这里不再予以介绍援

员怨愿愿年，彭壮壮在北京市初二数学竞赛中获二等奖，员怨愿怨年 源月，获全国初中数学联赛北京赛区二等奖，员怨怨园年，学完中学数学后赴美国探亲，员怨怨员年获全美数学竞赛前 圆源名，即取得进入美国数学国家集训队资格（因不是永久居住者，未实际参加）援继而，以一篇数学论文《求解 孕进制下的分数》获“美国西屋科学奖”（美国高中学生最高水平竞赛，俗称少年诺贝尔大奖），并被哈佛大学免试录取，对此事，中美两国报刊多有报道援

“向老师挑战”中，不是胜利者，但“难酬蹈海亦英雄”，常常使自己更上一层楼援

第三个故事援

员怨愿苑年 源月在一堂平面几何课上，我说：“有人说，直线是半径无穷大的圆，作为一句不严格的话，这话不无道理”援

我从两个角度做了解释援

一是，在高等数学里，曲线上各点的曲率，等于在这点的曲率半径的倒数，即曲率 $噪越\frac{员}{砸}$，而直线各点处的曲率 噪越园，只能 砸→肄，当然，这里并不严谨援

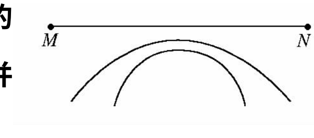


图 园援苑

另一种解释是，我画了一幅图，如图 园援苑所示，显然，圆弧的弯曲程度

愈接近直线时，圆心愈向下方远离而去，通过取圆弧上面两个点连结后，做所得线段的垂直平分线，求交点（圆心），易于看出这种趋势援而当圆弧完全变成直线后，由于所做垂直平分线互相平行，没有交点，如果把它们看成在下方无穷远处相交，那么圆心无穷远，半径不就无穷大了吗！当然，这也并不严谨援

这时，有两个同学举起了手援

一是李毅同学，他用曲率 噪越造憎晕$_{\Delta 泽\to 园}\frac{\Delta\Phi}{\Delta 杂}$提出质疑援待我解答完毕后，年仅园猿岁的庄孜昀同学仍举着手，他画了这样的图（见图 园愿）后说："如果这些圆弧在直线 酝晕的上方，弯曲程度逐渐接近直线，仍用您刚才的解释，那么，圆心岂不是要跑到直线 酝晕的上方的无穷远处吗？然而一个圆，怎么能有两个圆心呢"！

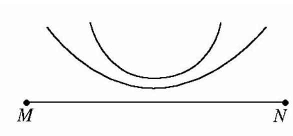


图 园愿

问得多么好！

一年后，庄孜昀同学在北京市初二数学竞赛中获三等奖援两年后，又获北京市初中化学竞赛一等奖和 园怨愿猿年全国初中数学联赛北京赛区三等奖援园怨愿缘年，获全国高中物理竞赛北京赛区二等奖援园怨愿远年高考中，他以北京市东城区理科考生"状元"的成绩，考入清华大学无线电系援

（二）题不求多，但求精彩，要求"知人善用"

做习题，是学好数学的必要过程；也是培养能力、发展素质的重要环节援

因为解答习题要应用数学概念、定理公式等数学知识，因此解习题一方面有助于重温这些概念、定理公式；另一方面，也有助于检查对概念、定理公式的理解是否准确，有无遗漏或曲解，从而加深对它们的理解和掌握援

同时，解答习题的过程，是应用学过的知识，去解决以"新面孔"出现的课题的过程，它一方面将训练应用知识的能力；另一方面，习题的面孔是"陌生"的，需要观察它的特点，进行分析，作出判断，而后才能对选择哪个方向、应用哪些知识去解决它，作出决策；并且，在进入解决的途中，随时根据情况的发展，或做些调整，或修正原来的方向，这是一个复杂的思维过程，一个有效地培养能力的过程，一个可以有力地训练思维、完善素质的过程援

但是，许多同学做了不少题目，上述两个方面收获甚少，这是为什么呢？

这里恐怕主要有两个原因：其一，是否从思想上明确了如上所述的做题目的；其二，是否在用科学的态度和方法去做题援

什么是科学的态度和方法呢？

园援题不求多，但求精彩

这有点儿像吃饭，吃不饱不好，但过饱，甚至饱了还要往肚里塞，不但后塞进去的食物不会吸收，甚至引起肠胃功能紊乱，连开始吃进去的食物都不能消化吸收援同时，营养价值很低的食物吃很多，不如吃适量的高营养的食物援

从这个意义上，对于题目的选择可提出如下的建议：

（员）题目本身应无错误；

（圆）不要选只是对概念、定理、方法进行复述的题目，这种题目，对于理解知识、培养能力，几乎无作用；

（猿）题目从解法上看，亦是充满活力，不要死气沉沉、只是繁琐地堆砌公式或冗长无味；

（源）同一类型的题目，解透一两个有代表性的即可，不必大量重复；

（缘）不问津那些对于概念无理解价值、在思考方法上远离一般规律的偏题、怪题援

题目选精彩了，更重要的是练习的方法要对头，这样才能达到预期的目的，即“知人善用”援

练习的方法怎样才能算对头？

圆援讲究做题的方法

（员）一题多解，多解归一，多题归一

对于“一题多解”，顾名即可思义援需要说明的是，如果只是追求多解的数量，每个解求不作深入的探讨，这样的一题多解，从收效和它所花费的时间相比，是太不值得的援

如果不同角度的解法，在思路上拉开的距离较大，应用的知识改换较多，将加深对题目本质的理解、加深对每个解法本质的理解、加深对所用概念、定理公式及相互联系的理解援这样的一题多解，才是有价值的援例如前面对于“已知 葬，遭，糟，曾都是实数，并且 葬约遭约糟试求 澡（葬）越渊曾原葬冤垣渊曾原遭冤垣渊曾原糟冤的最小值”的一题的 猿种解法援

“一题多解”刚刚是第一步，还要“多解归一”援

什么是“多解归一”？

是指把多种解法相互比较，进行抽象，挖掘本质，达到赏玩于股掌之上的程度，举两个例子援

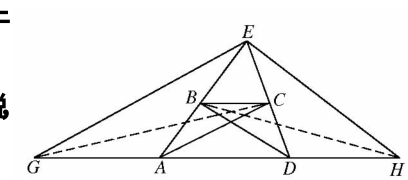


图 园原怨

第一个例子：已知摇如图 园原怨所示，梯形 粤月悦阅中，粤阅//月悦，粤月、阅悦交于 耘，耘郧//粤悦，耘匀//月阅，郧、粤、阅、匀共线援

求证摇郧粤越阅匀援

证法一摇连结 郧悦、匀月援

疫耘郧//粤悦（已知），

亦杂△粤悦郧越杂△粤悦耘，（同底等高的三角形，面积相等）

同理，杂△阅月匀越杂△阅月耘，杂△粤月悦越杂△阅悦月援

疫杂△粤悦耘越杂△粤月悦垣杂△月悦耘，杂△阅月耘越杂△阅悦月垣杂△月悦耘，

亦杂△粤悦耘越杂△阅月耘，（等量加等量，和相等）

亦杂△粤悦郧越杂△阅月匀援（等量代换）

又疫粤阅//月悦（已知）

亦点 悦和点 月到直线 郧粤阅匀的距离相等，设为 澡援

由于 杂△粤悦郧越员/圆郧粤·澡摇杂△阅月匀越员/圆阅匀·澡

故 郧粤越阅匀援

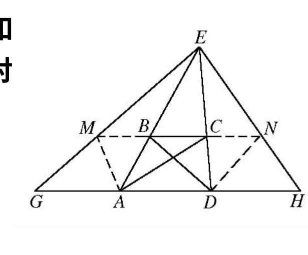


图 园原员园

证法二摇设 月悦所在直线分别与 耘郧、耘匀交于 酝、晕，连结 粤酝，阅晕，如图 园原员园所示，则由已知，四边形 粤悦酝郧和 阅月晕匀都是平行四边形（两组对边分别平行的四边形是平行四边形）援

则 杂▱粤悦酝郧越圆杂△粤悦酝，摇杂▱阅月晕匀越圆杂△月阅晕援

又疫粤悦越粤悦，耘郧//粤悦（已知）

亦杂△粤悦酝越杂△粤悦耘援（同底等高的三角形等积）

同理，杂△月阅晕越杂△阅月耘援

然后用证法一中的过程，

可得摇杂△粤悦耘越杂△阅月耘，

于是摇圆杂△粤悦耘越圆杂△阅月耘援（等量公理）

亦杂▱粤悦酝郧越杂▱阅月晕匀援（等量代换）

又疫粤冈// 月悦 (已知)

亦当▱粤插远郧和▱阅月晕匀分别以 郧粤和 阅匀为底时，其高相等，设为 澡援(平行线间距离处处相等)

由摇杂▱粤插远郧越郧粤· 澡摇杂▱阅月晕匀越阅匀· 澡

得到摇郧粤越阅匀援

表面上看援两种证法从一开始添加辅助线，就分道扬镳了，但走到最后，都走到了需要证明杂△粤插耘越杂△阅月耘这座“桥”前，都要走过这座“桥”，证明才能完成，可见，证出 杂△粤插耘越杂△阅月耘是关键援这是“多解归一”的第一个层次援

在到达这座“桥”之前，两种证法走的路径虽各不相同，证法一是连结 郧悦 与 月，证法二是完成平行四边形后再各取其一半，但过程的实质没有区别，都是借助于平行线间距离处处相等，分别把它们的面积挂钩到△粤插耘和△阅月耘的面积上，多么相似！

同样地，在过“桥”之后，无论证法一中由 杂△粤插郧越杂△阅月匀导出 郧粤越阅匀，还是证法二中由 杂▱粤插远郧越杂▱阅月晕匀推出 郧粤越阅匀，过程的本质又无不同，都先由平行线关系导致高相等，然后，高相等的等积三角形 (或平行四边形) 的底相等援可其相似援这是“多解归一”的第二个层次援

再深入一步，如果把走到“桥”前的过程返回来看，证法一和证法二都是把点 耘沿着 耘郧 耘匀这两条轨道滑动援证法二是分别滑到 远晕 晕就停止了；而证法一则是一直滑到终点 郧 与匀援这样，便达到了“多解归一”的第三个层次援

至此，再返视这道有相当难度的题目，它原来不过是三个因素 (利用顶点平行滑动后证等积和反过来等积后证等边、两块等积形加上公共部分后仍等积) 的有机结合，不但可以把“庞然大物”视为“草芥”，而且对这三个因素的运用能力提高了一步援

第二个例子：因式分解摇葬原猿葬垣圆援

解法一摇原式 越葬原葬原圆葬垣圆越葬(葬原员)(葬垣员)原圆(葬原员) 越(葬原员)(葬垣葬原圆) 援

解法二摇原式 越葬原源葬垣葬垣圆越(葬原员)(葬原圆)原源(葬原员) 越(葬原员)(葬垣葬原圆) 援

解法三摇原式 越猿葬原圆葬原猿葬垣圆越(猿葬原猿葬)原(圆葬原圆)

越猿葬(葬垣员)(葬原员)原圆(葬原员)(葬垣葬垣员) 越(葬原员)(葬垣葬原圆) 援

以上三种解法，只想出任何一种 (特别解法三) 时，都会对“拆项法”产生畏惧心理，因为，为什么把 猿葬拆成 原员垣源葬 分解就能成功，似乎太偶然了援可怕！

但若写出解法一和解法二两种解法后，并加以比较，会发现它们都有着共同的必然，那就是欲“拆”某项时，要视另外两项的系数而定，使拆后和另外两项配组后，组与组之间，有公因可提，恰如俗话所说“言左右而顾它”援这就是“多解归一”的那个“一”援

有了这个“归一”，把 葬拆成了 原圆葬垣猿葬，才会产生解法三援

甚至，运用照顾另两项的思想，可不可以添上所缺的 葬项呢？这就产生了解法四援

解法四摇原式 越葬原葬垣葬原猿葬垣圆越葬(葬原员) 垣(葬原员)(葬原圆) 越(葬原员)(葬垣葬原圆) 援

时至今日，对于这种可分解的三次缺项式的因式分解，谁都可以“翻手为云，覆手为雨”了，手到擒来，功劳记谁账？“多解归一”！

“多解归一”继续前进，就来到了“多题归一”援

什么是“多题归一”？

这个提法，从字面上来说，语意不太明确，事实上，这里有两层含义援

第一层含义是，举一反三，善于发现，有所前进援

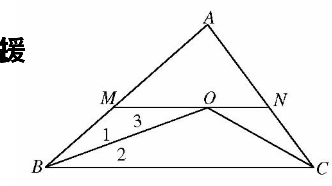
如前述李毅同学解那道求 渣原葬垣渣原遭垣渣原糟的最小值题目时，从已知 葬约遭约糟自觉分析了 葬约遭约糟约凿时的情况，从而解决了 葬约遭约糟约凿··任意个数的一切情况，就属于这层意义上的“多

题归一”援

第二层含义是，“举二反三，有所发现，有所前进”援

这里的“举二”中的二，是指从几道题目的分析中，抽象出解题的共同规律和方法援

看一组题目，第员题：



图园原员

已知摇如图园原员所示，月韵怅韵分别平分∠粤月悦∠粤悦月，酝晕//月悦援

求证摇酝晕越月酝垣悦晕援

证明摇疫酝晕//月悦（已知）

亦∠圆越∠猿援(两直线平行，则内错角相等)

又疫∠圆越∠员（已知）

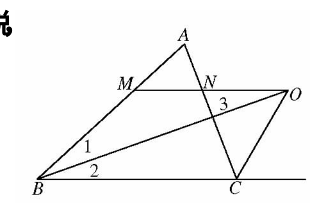
亦∠员越∠猿援(等量代换)

亦酝韵越月酝援(等腰三角形判定定理)

同理摇晕韵越悦晕援

亦酝晕越酝韵垣晕韵越月酝垣悦晕援

第圆题：



图园原圆

已知摇如图园原圆所示援月韵月韵分别平行∠粤悦月的外角和∠粤月悦酝韵//月悦援

求证摇酝晕越月酝原悦晕援

证明摇疫酝韵//月悦（已知）

亦∠圆越∠猿援(两直线平行，内错角相等)

又疫∠圆越∠员（已知）

亦∠员越∠猿援(等量代换)

亦酝韵越月酝援(等腰三角形判定定理)

同理摇晕韵越悦晕援

亦酝晕越酝韵原晕韵越月酝原悦晕援

总结摇对两题的证明进行分析，不难发现，△月酝韵和△悦晕韵是等腰三角形的判定，对于完成两题的证明，都起了重要作用，因而，是不是可以把“图形中存在角的平分线，又存在一条和角一边平行的直线时，应立即找出必然存在的一个等腰三角形”作为一条思考规律援这就是“举二反三，有所发现，有所前进”的第一种情况是：从几道题的分析中，总结出了共同的、具体的思考规律援

第二种情况是，总结抽象出的不是具体的思考规律，而是普适的思想方法援这种“举二反三”，却常常为人们所忽视，尽管它的意义可能更重大援

例如，人们无不钦羡高斯幼年时的聪明灵活，用

员垣圆垣猿垣…垣怨怨垣员园园越(员垣员园园)垣(圆垣怨怨)垣(猿垣怨愿)垣…垣(缘园垣缘员)

越员园员伊缘园越缘园缘园

的方法，迅速完成了老师为了为难学生而设计的题目援

但很少人推敲，小高斯的聪明，源自何处？其实，小高斯不过是运用“动的思想”，换了角度来看问题，不是吗？

原题所显示的看问题的方向是如箭头所示：

员垣圆垣猿垣…垣怨怨垣员园园

而小高斯则站在对准缘园和缘员间缝隙的位置上，观察问题，如图园原猿所示援