龙门专题

目　录

CONTENTS

龙门专题

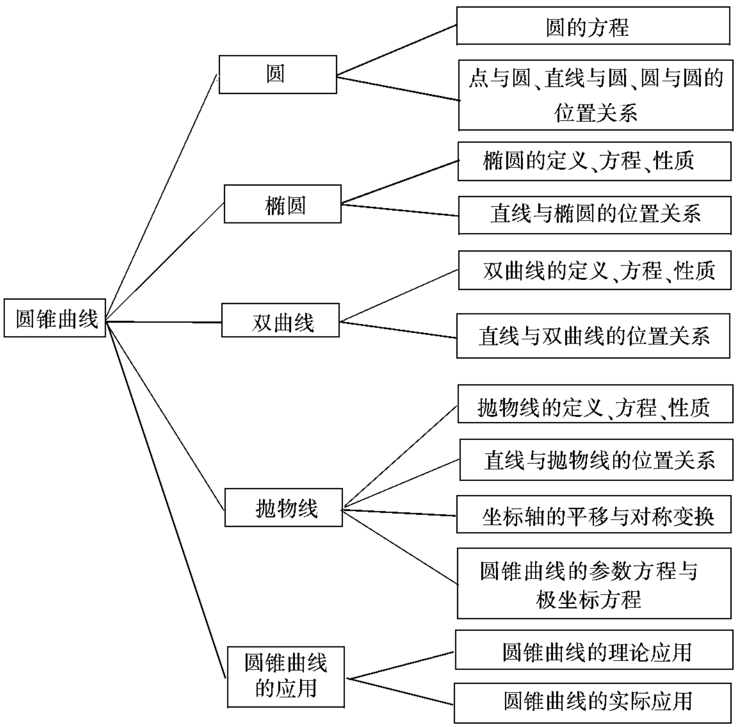
基 础 篇

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科,简说研究“数”与“形”的学科.圆锥曲线方程属“用代数的方法研究几何问题——解析几何”的后续部分.

圆锥曲线又称为二次曲线,它们的得名源于两个有公共顶点、且一个正立一个倒立的圆锥被平面从四个不同的角度所截.

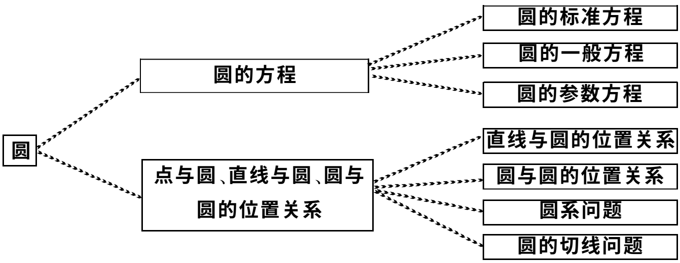
在圆锥曲线的研究中,圆的个性和共性都比较突出,人们的坐标观点,绝大部分是在这个阶段的学习中形成的.而椭圆、双曲线、抛物线除了延续圆在圆锥曲线中的共性外,它们各自还都有个性的一面,即它们本身的定义、方程、图形和性质.个性也好,共性也罢,对圆锥曲线的研究仍离不开两个主要问题——根据已知条件,求出曲线的方程;通过方程,讨论曲线的性质.

本书知识框图



第一讲　圆

本讲知识框图



学习指导

［考纲要求］

掌握圆的标准方程和一般方程，了解参数方程的概念，理解圆的参数方程.

1.1　圆的方程

重点难点归纳

重点　①掌握圆的定义. ②掌握圆的标准方程、一般方程、参数方程.

难点　领悟研究讨论圆的思维方法，提高坐标观念.

本节需掌握的知识点　掌握圆的标准方程、一般方程、参数方程，深化曲线和方程的对应思想.

知识点精析与应用

知识点精讲

1. 圆的标准方程

(1)圆的定义

平面内与定点距离等于定长的点的集合（轨迹）叫做圆. 定点叫做圆心，定长

叫做半径.

(2)圆的标准方程

圆的标准方程是

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$$

其中,(a,b)为圆的圆心的坐标,R 为圆的半径.

特别地,圆心在原点、半径为 r 的圆的方程为

$$\boxed{x^2+y^2=r^2}$$

2. 圆的一般方程

$$\boxed{x^2+y^2+Dx+Ey+F=0}$$

把圆的一般方程配方,得 $\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}\right)^2$. 可见,当 $D^2+E^2-4F>0$ 时,方程表示圆心为 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$、半径为 $\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$ 的圆. 于是,方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 表示圆的充要条件为 $D^2+E^2-4F>0$.

圆的一般方程形式上的特点有二:

(1)x^2,y^2 项系数相等且不为 0;

(2)无 $x\cdot y$ 这样的二次(交叉)项.

3. 圆的参数方程

圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$的参数方程为 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数),其中 θ 的几何意义为圆心角.

圆$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2(R>0)$的参数方程为 $\begin{cases}x=a+R\cos\theta\\y=b+R\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数).

解题方法指导

1. 圆的标准方程、一般方程问题

[例 1]　写出满足下列条件的圆的方程:

(1)圆心在原点;(2)过原点;(3)圆心在 x 轴上;(4)圆心在 y 轴上;(5)过原点且圆心在 x 轴上;(6)过原点且圆心在 y 轴上;(7)与 x 轴相切;(8)与 y 轴相切;(9)与两坐标轴都相切.

[解]　为了突出 9 个方程各自的特点,将答案列表给出:

	条　件	标准方程	一般方程
(1)	圆心在原点	$x^2+y^2=r^2(r\neq0)$	$x^2+y^2-r^2=0(r\neq0)$
(2)	过原点	$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2(a^2+b^2\neq0)$	$x^2+y^2+Dx+Ey=0$ $(D^2+E^2\neq0)$
(3)	圆心在 x 轴上	$(x-a)^2+y^2=r^2(r\neq0)$	$x^2+y^2+Dx+F=0$ $(D^2-4F>0)$
(4)	圆心在 y 轴上	$x^2+(y-b)^2=r^2(r\neq0)$	$x^2+y^2+Ey+F=0$ $(E^2-4F>0)$
(5)	圆心在 x 轴上且过原点	$(x-a)^2+y^2=a^2(a\neq0)$	$x^2+y^2+Dx=0(D\neq0)$
(6)	圆心在 y 轴上且过原点	$x^2+(y-b)^2=b^2(b\neq0)$	$x^2+y^2+Ey=0(E\neq0)$
(7)	与 x 轴相切	$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2(b\neq0)$	$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ $(E\neq0,D^2-4F=0)$
(8)	与 y 轴相切	$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2(a\neq0)$	$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ $(D\neq0,E^2-4F=0)$
(9)	与两坐标轴都相切	$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2(\vert a\vert=\vert b\vert\neq0)$	$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ $(\vert D\vert=\vert E\vert\neq0,D^2-4F=0)$

[点评]　本例实质上是给出了具有特殊位置的圆的两种方程的设法,这是今后的解题依据.

[例 2]　求过 $A(1,4)$、$B(3,2)$两点,且圆心在直线 $y=0$ 上的圆的标准方程.

[解法 1]　(待定系数法)

设圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

∵圆的圆心在 $y=0$ 上,

∴ $$b=0,$$

∴圆的标准方程为$(x-a)^2+y^2=r^2$.　待定系数:a, r 等待确定

又∵圆过 $A(1,4)$、$B(3,2)$两点,

∴ $$\begin{cases}(1-a)^2+16=r^2,\\(3-a)^2+4=r^2,\end{cases}$$

解得 $$a=-1,r^2=20.$$

∴圆的标准方程为$(x+1)^2+y^2=20$.

圆的平面几何性质

[解法 2] （直接求出圆心和半径）

因为圆过 $A(1,4)$、$B(3,2)$ 两点，所以圆心 C 在线段 AB 的垂直平分线 l 上．因为 $k_{AB}=\frac{4-2}{1-3}=-1$，所以 l 的斜率为 1．又线段 AB 的中点为 $(2,3)$，所以线段 AB 的垂直平分线 l 的方程为

$$y-3=x-2,$$ 点斜式 即 $x-y+1=0$.

又知圆心 C 在直线 $y=0$ 上，由 $\begin{cases}x-y+1=0,\\ y=0\end{cases}$ 得圆心的坐标为 $C(-1,0)$，于是，半径 $r=|AC|=\sqrt{(1+1)^2+4^2}=\sqrt{20}$.

所以，圆的标准方程为 $(x+1)^2+y^2=20$.

[点评] 本例给出了圆的标准方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的求法，两种基本方法各具特色，都很重要，应掌握．

[例 3] 一个三角形的三条边所在直线的方程分别为 $x+6y-11=0$，$x-y-4=0$，$5x+2y+1=0$，求这个三角形的外接圆的方程．

[解] 由方程组 $\begin{cases}x+6y=11,\\ x-y=4\end{cases}$ $\begin{cases}x+6y=11,\\ 5x+2y=-1\end{cases}$ $\begin{cases}x-y=4,\\ 5x+2y=-1\end{cases}$ 解得该三角形三个顶点的坐标分别为 $(5,1)$，$(-1,2)$，$(1,-3)$.

设该三角形的外接圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

把三角形三个顶点的坐标分别代入方程，得

$$\begin{cases}5^2+1^2+5D+E+F=0,\\ (-1)^2+2^2-D+2E+F=0,\\ 1^2+(-3)^2+D-3E+F=0.\end{cases}$$

如没有特别说明，圆的标准方程、圆的一般方程通用．用哪一个，视具体情况而定

解得 $D=-\frac{25}{7}$，$E=-\frac{3}{7}$，$F=-\frac{54}{7}$.

∴圆的方程是 $x^2+y^2-\frac{25}{7}x-\frac{3}{7}y-\frac{54}{7}=0$.

[例 4] 实数 a 取何值时，方程 $a^2x^2+(a+2)y^2+2ax+2a=0$ 表示圆？

[解] 由 $a^2=a+2$，得 $a=2$，或 $a=-1$.

(1) 当 $a=2$ 时，方程为 $4x^2+4y^2+4x+4=0$，

即 $$x^2+y^2+x+1=0.$$

此时 $D^2+E^2-4F=1^2+0^2-4\times1<0$，所以 $a=2$ 不合题意. 难点，易错

(2)当 $a=-1$ 时，方程为 $x^2+y^2-2x-2=0$.

此时 $D^2+E^2-4F=(-2)^2+0^2-4\times(-2)>0$，所以 $a=-1$ 符合题意.

所以，当 $a=-1$ 时，原方程表示圆.

[点评]　本例给出了方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 表示圆的充要条件，即 $\begin{cases}A=C\neq0,\\B=0,\\D^2+E^2-4AF>0.\end{cases}$ $D^2+E^2-4AF>0$ 是其中的必要条件.

2. 圆的参数方程问题

[例 5]　已知 $x^2+y^2=2$，求 $x+y$ 的最大值和最小值.

[解]　依题意，令 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta,\\y=\sqrt{2}\sin\theta,\end{cases}$ (θ 为参数，$0\leqslant\theta<2\pi$)，则

$$x+y=\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta=2\sin(\theta+\frac{\pi}{4}),$$

$\therefore x+y$ 的最大值为 2，最小值为 -2.

[点评]　圆的参数方程通常用于点的三角换元. 如，点 $P(x,y)$ 满足 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ 时，可令 $\begin{cases}x=x_0+R\cos\theta,\\y=y_0+R\sin\theta,\end{cases}$ (θ 为参数).

基础达标演练

一、选择题

1. 圆 $x^2+y^2-2x+2y=0$ 的周长为　(　　)

A. $\sqrt{2}\pi$　　B. 2π　　C. $2\sqrt{2}\pi$　　D. 4π

2. “x^2 与 y^2 的系数相同，且不等于零，没有 xy 项”是“二元二次方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 表示圆”的　(　　)

A. 必要不充分条件　　B. 充分不必要条件

C. 充分且必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. $y=|x|$ 的图形和圆 $x^2+y^2=4$ 可围成两个面积不等的封闭图形，其中较小的一个的面积是　(　　)

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. π　　C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{3\pi}{2}$

4. $x^2+y^2-x+y+R=0$ 表示一个圆，则 R 适合的条件是　(　　)

A. $R\leqslant 2$　　B. $R<2$　　C. $R<\frac{1}{2}$　　D. $R\leqslant\frac{1}{2}$

二、填空题

5. 若圆 P：$x^2+y^2-2x-4y-1=0$ 和圆 P' 关于直线 $x-y+3=0$ 对称，则 P' 的方程是________.

6. 已知正三角形的两个顶点是 $O(0,0)$ 和 $A(6,0)$，则它的外接圆的方程是________.

7. 过原点且和 x 轴、y 轴分别交于 $(m,0)$、$(0,n)$ 两点的圆的方程是________.

8. 方程 $x^2+y^2-Dx-Ey+F=0(D^2+E^2-4F=0)$ 的图形是________.

三、解答题

9. 已知方程 $x^2+y^2-2(t+3)x+2(1-4t^2)y+16t^4+9=0$.

(1) t 为何值时，方程表示圆？

(2) t 为何值时，方程表示的圆半径最大？并求出半径最大时的圆的方程.

10. 已知圆 $x^2+y^2-4x\cos\theta-4y\sin\theta+3=0$ 的圆心为 M.

(1)求点 M 的坐标；

(2)当 $\theta\in\mathbf{R}$ 时，求点 M 的轨迹.

答案与提示

一、选择题

1. C（原方程化为 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$，∴半径 $r=\sqrt{2}$，周长为 $2\pi r=2\sqrt{2}\pi$.）

2. A（$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 表示圆的充要条件为 $\begin{cases}A=C\neq 0,\\ B=0,\\ D^2+E^2-4AF>0.\end{cases}$）

3. B（画图可得 $S_{扇}=\frac{1}{4}\pi R^2=\frac{1}{4}\pi\times 2^2=\pi$.）

4. C（由 $D^2+E^2-4F=1+1-4R>0$，得 $R<\frac{1}{2}$.）

二、填空题

5. 已知圆 P 的圆心为 $P(1,2)$，半径为 $\sqrt{6}$，点 $P(1,2)$ 关于 $x-y+3=0$ 的对称点的坐标为 $P'(-1,4)$，所以圆 P' 的方程为 $(x+1)^2+(y-4)^2=6$，即 $x^2+y^2+2x-8y+11=0$.

6. ∵正三角形另外一个顶点为 $(3,\pm 3\sqrt{3})$，∴圆的圆心为 $(3,\pm\sqrt{3})$，半径 $R=2\sqrt{3}$，所求圆的方程为 $(x-3)^2+(y\pm\sqrt{3})^2=12$.

7. 圆心$\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)$，半径 $R=\sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{n}{2}\right)^2}$，∴圆的方程为$\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+\left(y-\frac{n}{2}\right)^2=\left(\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{n}{2}\right)^2$，即 $x^2+y^2=mx+ny$.

8. 由于 $D^2+E^2-4F=0$，且原方程配方后为$\left(x-\frac{D}{2}\right)^2+\left(y-\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}=0$，∴原方程的图形是点$\left(\frac{D}{2},\frac{E}{2}\right)$.

三、解答题

9. (1) 由方程表示圆的充要条件，得$[-2(t+3)]^2+[2(1-4t^2)]^2-4(16t^4+9)>0$，即 $7t^2-6t-1<0$，解得$-\frac{1}{7}<t<1$. ∴当$-\frac{1}{7}<t<1$ 时，方程表示圆. (2) 当$-\frac{1}{7}<t<1$ 时，方程表示圆，其半径为$\frac{1}{2}\sqrt{[-2(t+3)]^2+[2(1-4t^2)]^2-4(16t^4+9)}=\frac{1}{2}\sqrt{-4(7t^2-6t-1)}=\sqrt{-7t^2+6t+1}=\sqrt{-7\left(t-\frac{3}{7}\right)^2+\frac{16}{7}}$，∴当 $t=\frac{3}{7}$时，半径有最大值$\sqrt{\frac{16}{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$，这时，圆心的坐标为$(t+3,4t^2-1)$，即$\left(\frac{24}{7},-\frac{13}{49}\right)$，所以半径最大时圆的方程是$\left(x-\frac{24}{7}\right)^2+\left(y+\frac{13}{49}\right)^2=\frac{16}{7}$.

10. (1) 将已知圆方程配方，得$(x-2\cos\theta)^2+(y-2\sin\theta)^2=1$，∴圆心 M 的坐标为$(2\cos\theta,2\sin\theta)$. (2) 当 $\theta\in\mathbf{R}$ 时，点 M 为动点. ∵$(2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2=4$，∴点 M 的轨迹方程是 $x^2+y^2=4$，它是以原点为圆心，半径为 2 的圆.

视 野 拓 展

释 疑 解 难

$x^2+y^2=1$ 与 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 相像的根源在哪儿

当 $r=1$ 时，圆的标准方程 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 为 $x^2+y^2=1$，它与同角三角函数的平方关系之一 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 十分相像. 两者的相像根源在哪儿呢？对我们的学习又有什么启示呢？

①溯源：如图 1-1，设角 α 的终边与圆 $x^2+y^2=1$

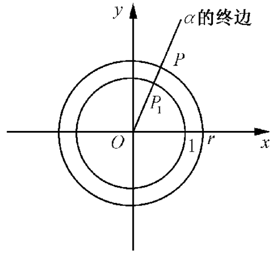


图 1-1

和 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 分别交于 $P_1(x_1,y_1)$、$P(x,y)$ 两点，则根据任意角的三角函数的定义，得

$$\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{y_1}{1},\\ \cos\alpha=\dfrac{x_1}{1}.\end{cases} \quad ①$$

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{x}{r},\\ \sin\alpha=\dfrac{y}{r}.\end{cases} \quad ②$$

由①得 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha={x_1}^2+{y_1}^2=|OP_1|^2=1$，即 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

由②得 $x^2+y^2=r^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=r^2$，即 $x^2+y^2=r^2$. 特别地，当 $r=1$ 时，$x^2+y^2=r^2$ 为 $x^2+y^2=1$. 这时，P_1 点与 P 点重合. 由此可知，当 P_1 点与 P 点重合时，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 源于用 α 表示 P_1 点的坐标 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$x^2+y^2=1$ 源于用 x、y 表示 P_1 点的坐标 (x,y).

②启示：圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 的参数方程是 $\begin{cases}x=r\cos\alpha,\\ y=r\sin\alpha.\end{cases}$ 它启示我们圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 上的任意一点均可表示成 $(r\cos\alpha,r\sin\alpha)$ 的形式. 于是，对圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 的研究，可以从解析几何范畴跨跃到三角函数领域，借助三角函数完整的公式体系，实现最终目的，这其中体现出来的数学思想是等价转化思想.

典型例题导析

[例 6] 点 $P(x,y)$ 是圆 $x^2+y^2=1$ 上任一点，求 $u=\dfrac{y-2}{x+1}$ 的取值范围.

[分析] 用圆上任一点的参数坐标代替 x 与 y，转化为三角问题解决.

[解] 设 $\theta\in[0,2\pi)$，圆 $x^2+y^2=1$ 上任一点为 $P(\cos\theta,\sin\theta)$，则

$$x=\cos\theta,y=\sin\theta.$$

$\therefore u=\dfrac{\sin\theta-2}{\cos\theta+1}$，$u\cos\theta+u=\sin\theta-2$，$u\cos\theta-\sin\theta=-(u+2)$.

$\therefore$
$$\sin(\theta-\varphi)=\frac{u+2}{\sqrt{u^2+1}}(\tan\varphi=u).$$

又 $\because |\sin(\theta-\varphi)|\leqslant 1$，　三角函数的有界性

∴ $$\frac{|u+2|}{\sqrt{u^2+1}}\leqslant 1, u\leqslant -\frac{3}{4}.$$

∴u 的取值范围是$\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right]$.

[例 7] 已知对于圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 上任一点 $P(x,y)$,不等式 $x+y+m\geqslant 0$ 恒成立,求实数 m 的取值范围.

[分析] 设圆上任一点为 $P(\cos\theta,1+\sin\theta)$(因为这时 P 点坐标满足方程 $x^2+(y-1)^2=1$),把解析几何问题转化为三角问题来解.

[解] 设圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 上任一点为 $P(\cos\theta,1+\sin\theta)$,$\theta\in[0,2\pi)$,则

$$x=\cos\theta, y=1+\sin\theta.$$ 相当于三角换元

∵$x+y+m\geqslant 0$ 恒成立,

∴$\cos\theta+1+\sin\theta+m\geqslant 0$ 恒成立,即 $m\geqslant -(1+\sin\theta+\cos\theta)$ 恒成立,

∴只需 m 不小于$-(1+\sin\theta+\cos\theta)$的最大值.

∵$u=-(\sin\theta+\cos\theta)-1=-\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-1$,

∴ $$u_{\max}=\sqrt{2}-1,$$

∴ $$m\geqslant\sqrt{2}-1,$$

∴m 的取值范围是$[\sqrt{2}-1,+\infty)$.

[点评] 解答中,运用了圆上点的参数设法. 一般地,可把圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上的点设为$(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)(\theta\in[0,2\pi))$. 采用这种设法一方面可以减少参数的个数,另一方面可以灵活地运用三角公式. 从代数观点看,这种做法的实质就是三角代换.

小常识——两类参数本质上的差别

解析几何中,参数方程和含有参数的方程几乎随处可见,但它们却有着本质的差别. 追根溯源,差别的源头是"参数".

看一个例子:设 $t\in[0,2\pi)$,指出参数方程$\begin{cases}x=2\pi\cos t\\ y=2\pi\sin t\end{cases}$…①和含有参数的方程 $x^2+y^2=t^2$…②的图形各是什么?

如图 1-2(1),方程$\begin{cases}x=2\pi\cos t\\ y=2\pi\sin t\end{cases}$,$t\in[0,2\pi)$表示以原点为圆心、以 2π 为

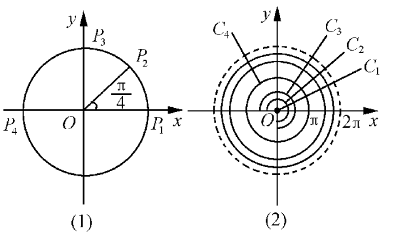


图 1-2

半径的圆.

如图 1-2(2),方程 $x^2+y^2=t^2$ ($t\in[0,2\pi)$)表示原点或以原点为圆心、以 $t(0<t<2\pi)$为半径的一系列同心圆.

剖析图 1-2 的形成:

当 t 依次取 $0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\pi,\cdots$时,有

以方程①的解为坐标的点依次是图 1-2(1)中的点 $P_1,P_2,P_3,P_4,\cdots$;

方程②的图形依次是图 1-2(2)中的原点 O(即 C_1),圆 $C_2,C_3,C_4,\cdots$.

由此可以看出,同是一个字母——参数 t,由 0 变化到 2π,它在方程①的图形中影响点的变化,使方程①表示一条曲线,而它在方程②的图形中却影响着曲线的变化,使方程②表示一点(原点)或无数条曲线.

综上所述,t 使方程①和方程②产生的本质上的差别可概述为:方程①的图形是点集,它表示一条曲线;方程②的图形是点或曲线集,它表示一点或无数条曲线.用集合可分别表示为$\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}x=2\pi\cos t,\\ y=2\pi\sin t,\end{cases}0\leqslant t<2\pi\right\}$;$\{C|C=\{(x,y)|x^2+y^2=t^2,0\leqslant t<2\pi\}\}$.

集合的集合,能理解吗?

思维拓展测试

一、选择题

1. 方程$\begin{cases}x=2\cos\alpha,\\ y=-1+2\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 是参数,$0\leqslant\alpha\leqslant\pi$)表示的图形是 ( )

A. 点 B. 直线 C. 圆 D. 半圆

2. 若直线 $x+ay=2a+2$ 与直线 $ax+y=a+1$ 平行,则实数 a 等于 ( )

A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 1 D. -1

3. 方程$\begin{cases}x=-\sin\alpha,\\ y=\cos\alpha\end{cases}$($\alpha$ 是参数,$0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$)的图形是 ( )

A. 四分之一圆 B. 半圆 C. 圆 D. 线段

4. 设曲线 C 的方程是 $y=x^2+px+q$,则 C 只通过一、二象限的条件是 ( )

A. $p>0$ 且 $q<0$ B. $q<0$ C. $p>0$ D. $p^2-4q<0$

二、填空题

5. 圆 C 的圆心的坐标为$(m,2n)$,且圆心到直线 $x-y=0$ 的距离是$\sqrt{2}$,则 m、n 的关系是________.

6. 若直线 $2x+y-b=0$ 通过圆 $x^2+y^2-4x+2y-15=0$ 的圆心,则实数 b 的值是________.

7. 若直线 $l: x+y-m=0$ 和圆 $C: (x-3)^2+(y-2)^2=2$ 有公共点，则实数 m 的取值范围是________.

8. 方程 $\begin{cases} \alpha=\sqrt{2x-x^2}, \\ y=\sin\alpha \end{cases}$（$\alpha$ 是参数）表达的 x 与 y 的直接关系是________.

三、解答题

9. 已知圆系 C 是半径为 5、圆心在直线 $l: x-3y-3=0$ 上的圆. 在平行于 l 的直线中，哪些直线与圆系 C 中的各个圆都有公共点.

10. 已知直线 $l: x+2y-3=0$ 与圆 $C: x^2+y^2+x-6y+c=0$ 相交于 P、Q 两点，O 为坐标原点，且 $OP\perp OQ$，求 c 的值.

答案与提示

一、选择题

1. D（以 $(0,-1)$ 为圆心、2 为半径的半圆.）
2. C（∵若 $a=0$，则 $x=2$ 与 $y=1$ 显然不平行，∴$a\neq0$. 由 $\frac{1}{a}=\frac{a}{1}\neq\frac{2a+2}{a+1}$，得 $a=1$（-1 舍）.）
3. A（$x^2+y^2=1$，$-1\leqslant x\leqslant0$，$0\leqslant y\leqslant1$.）
4. D（由已知，C 为开口向上的抛物线，方程无解，$\Delta<0$.）

二、填空题

5. $m-2n\pm2=0$.
6. $b=3$.
7. $[3,7]$.
8. $y=\sin\sqrt{2x-x^2}$，$0\leqslant x\leqslant2$.

三、解答题

9. 设圆系 C 的方程是 $[x-(3t+3)]^2+(y-t)^2=25$（$t\in\mathbf{R}$），平行于 l 的直线为 $x-3y+3b=0$，则∵直线 l 与圆系 C 中的各圆都有公共点，∴$\frac{|3t+3-3t+3b|}{\sqrt{10}}\leqslant5$. $x-3y+3b=0$ 为所求，其中 $-\frac{5\sqrt{10}}{3}-1\leqslant b\leqslant\frac{5\sqrt{10}}{3}-1$.

10. 将 $l: x=3-2y$ 代入圆 C 方程并整理，得 $5y^2-20y+12+c=0$. 设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则∵$OP\perp OQ$，∴$-1=\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_1y_2}{(3-2y_1)(3-2y_2)}=\frac{y_1y_2}{9-6(y_1+y_2)+4y_1y_2}=\frac{\frac{12+c}{5}}{9-6\times4+4\times\frac{12+c}{5}}$，∴$c=3$.

1.2　点与圆、直线与圆、圆与圆的位置关系

重点难点归纳

重点　掌握用代数方法、几何方法解答直线与圆的位置关系问题的两种模式.

难点　①圆的切线问题. ②圆系问题.

本节需掌握的知识点　①点与圆三种位置关系的判断. ②直线与圆三种位置关系的判断及应用. ③两个圆五种位置关系的判断方法. ④圆系问题.

知识点精析与应用

知识点精讲

1. 点与圆、直线与圆的位置关系

(1)点与圆的位置关系

点与圆有三种位置关系,即点在圆外、圆上、圆内.

①点 $P(x_0, y_0)$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\ (R>0)$的三种位置关系描述如下:

点 P 在圆外 $\Longleftrightarrow (x_0-a)^2+(y_0-b)^2>R^2$;

点 P 在圆上 $\Longleftrightarrow (x_0-a)^2+(y_0-b)^2=R^2$;

点 P 在圆内 $\Longleftrightarrow (x_0-a)^2+(y_0-b)^2<R^2$.

②点 $P(x_0, y_0)$ 与圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\ (D^2+E^2-4F>0)$的三种位置关系描述如下:

点 P 在圆外 $\Longleftrightarrow x_0{}^2+y_0{}^2+Dx_0+Ey_0+F>0$;

点 P 在圆上 $\Longleftrightarrow x_0{}^2+y_0{}^2+Dx_0+Ey_0+F=0$;

点 P 在圆内 $\Longleftrightarrow x_0{}^2+y_0{}^2+Dx_0+Ey_0+F<0$.

(2)直线与圆的位置关系

直线与圆有三种位置关系:相交,相切,相离.

设①圆的半径为 r,圆心到直线的距离为 d;②直线的方程和圆的方程组成的方程组为 P. 这时,直线与圆的位置关系可描述如下:

位置关系	相交	相切	相离
几何特性	$d<r$	$d=r$	$d>r$
代数特性	P 有两组不同的实数解	P 有一组实数解	P 无实数解

2. 圆与圆的位置关系

设①两圆的半径分别为 $R,r(R\geqslant r)$，圆心距为 d；②两圆的方程组成的方程组为 P. 这时，两圆的位置关系可描述如下：

位置关系	外切	内切	相交	内含	外离
几何特性	$d=R+r$	$d=R-r$	$R-r<d<R+r$	$d<R-r$	$d>R+r$
代数特性	P 有一组实数解	P 有一组实数解	P 有两组不同的实数解	P 无实数解	P 无实数解

3. 圆系问题

一组有公共几何特性的圆称为圆系. 常用的圆系方程如下：

(1)以(a,b)为圆心的同心圆系方程

$(x-a)^2+(y-b)^2=\lambda^2(\lambda\neq 0,\lambda$ 是参数).

(2)与圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2+4F>0)$同心的圆系方程

$x^2+y^2+Dx+Ey+\lambda=0(D^2+E^2-4\lambda>0)$.

(3)经过同一定点(a,b)的圆系方程

$(x-a)^2+(y-b)^2+\lambda_1(x-a)+\lambda_2(y-b)=0$.

(4)过直线 $Ax+By+C=0$ 与圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 交点的圆系方程

$x^2+y^2+Dx+Ey+F+\lambda(Ax+By+C)=0$.

(5)过两圆 $C_1:x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 和 $C_2:x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 交点的圆系方程

$(x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1)+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0(\lambda\neq-1)$.

这个圆系中不含有圆 C_2，解题时要注意检验 C_2 是否满足题意，以防丢解.

特别地，当 $\lambda=-1$ 时，圆系表示直线 l：$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0$($l$ 称为两圆的“根轴”).

①若两圆相交，则 l 为两圆公共弦所在的直线.

②若两圆相切(内切或外切)，则 l 为过两圆的公共点的公切线.

4. 圆的切线问题

(1)过圆上一点作圆的切线

①圆 $x^2+y^2=r^2$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$.

②圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程为$(x-a)\cdot(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=r^2$.

③圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $x_0x+y_0y+D\cdot\frac{x+x_0}{2}+E\cdot\frac{y+y_0}{2}+F=0$.

(2)过圆外一点作圆的两条切线

①设切线的方程为点斜式,用圆心到直线的距离等于圆的半径求出直线的斜率,从而求出切线的方程.注意有时两条切线中有一条切线的斜率不存在.

②设切线的方程为点斜式,将直线与圆的方程联立,用判别式 $\Delta=0$ 求得斜率,从而求出切线的方程.

上述两种方法中,法 1 具有个性的一面,它仅限于解决直线与圆的相切问题.法 2 是解决直线与圆锥曲线相切问题的通法.

(3)已知圆的切线的斜率求圆的切线的方程

斜率为已知的圆的切线有两条,其方程可设为斜截式,解法同上.

特别地,圆 $x^2+y^2=r^2$ 的斜率为 k 的切线方程为 $y=kx\pm r\sqrt{1+k^2}$.

(4)两圆的公切线的数目

两圆的位置关系与公切线条数如下表:

位置关系	内切	外切	相交	相离	内含
公切线条数	1 条	3 条 (1 内 2 外)	2 条	4 条 (2 内 2 外)	无

(5)切线长的计算公式

过圆外一点 $P(x_0,y_0)$引圆的切线,则切线长为

$d=\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2+Dx_0+Ey_0+F}$(一般方程),

或 $d=\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-R^2}$(标准方程).

解题方法指导

1. 直线与圆的位置关系问题

[例 1] 已知直线 l:$y=kx+5$ 和圆 C:$(x-1)^2+y^2=1$,试问 k 为何值时,直线 l 与圆 C 相离、相切、相交.

[解] 圆 C:$(x-1)^2+y^2=1$ 的圆心为 $C(1,0)$,半径 $r=1$.

设直线 l:$y=kx+5$ 与圆心 C 的距离为 d.

当 $\frac{|k+5|}{\sqrt{k^2+1}}>1$,即 $k>-\frac{12}{5}$ 时,直线 l 与圆 C 相离;

当 $\frac{|k+5|}{\sqrt{k^2+1}}=1$,即 $k=-\frac{12}{5}$ 时,直线 l 与圆 C 相切;

解这一类问题时,应先解不等式,后解方程,这样只要正确地求出一个不等式的解,其他情况就可以顺次推出