目　录

基础篇

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科，简说是研究“数”与“形”的学科. 数学来源于实践又反过来作用于实践，其中普遍存在着对立统一、运动变化、相互联系、相互转变，并可为自然现象、社会系统提供应用模型.

本书分为四大部分：极限，导数与微分，积分，极限、导数与微分、积分的应用.

导数与微分、积分是特殊形式的极限. 极限是研究变量在无限变化中的变化趋势的一门科学，它的本质是从静止中认识运动，从有限中认识无限，从近似中认识精确，从量变中认识质变.

本篇知识框图

- 极限、导数与微分、积分
  - 极　限
    - 数学归纳法及其应用举例
    - 数列的极限
    - 函数的极限
    - 函数的连续性
  - 导数与微分
    - 导　数
    - 微分的概念与运算
  - 积　分
    - 不定积分
    - 定积分的概念与运算
  - 极限、导数与微分、积分的应用
    - 极限的应用
    - 导数与微分的应用
    - 积分的应用
    - 微积分思想
    - 用微积分思想解应用题举例

第一讲　极　限

本讲知识框图

- 极　限
  - 数学归纳法及其应用举例
    - 不完全归纳法与完全归纳法
    - 数学归纳法
  - 数列的极限
    - 数列的极限
    - 几种常见数列的极限
  - 函数的极限
    - $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限
    - $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限
    - 函数的左、右极限
    - 常见函数的极限
    - 极限的四则运算
  - 函数的连续性
    - 连续函数
    - 最大值、最小值定理

学习指导

［考纲要求］

理解数学归纳法的原理，能用数学归纳法证明一些简单的数学命题.

了解数列的极限和函数的极限的概念，掌握极限的四则运算法则，会求某些数列与函数的极限.

了解连续函数的意义，了解闭区间上的连续函数有最大值和最小值的性质.

1.1　数学归纳法及其应用举例

重点难点归纳

重点　数学归纳法的一般步骤.

难点　对数学归纳法原理的领悟.

本节需掌握的知识点　了解不完全归纳法和完全归纳法的相同点和不同点;数学归纳法的一般步骤.

知识点精析与应用

知识点精析

1. 不完全归纳法与完全归纳法

(1)不完全归纳法

不完全归纳法是根据事物的部分特例得出一般结论的推理方法.

由不完全归纳法得到的命题,可能是真命题,也可能是假命题.因此,不完全归纳法不能作为推理论证的方法.尽管如此,我们仍然可以把不完全归纳法视为研究数学的一把钥匙,用它去打开数学研究中的特例研究的大门,通过这些特例的不完全归纳,先是形成一些猜想,或者说发现其中的规律,然后再试图去证明猜想或规律的正确性,或者否定这些猜想与规律.

(2)完全归纳法

完全归纳法是一种在研究了事物的所有特殊情况后得出一般结论的推理方法,它又叫枚举法.

用完全归纳法得出的结论是可靠的.

如果事物包括的特殊情况不多,那么对该事物的推理,通常采用完全归纳法.

2. 数学归纳法

(1)数学归纳法的适用范围

用数学归纳法可以判断与正整数有关的数学命题的真假.

(2)数学归纳法

对于由不完全归纳法得到的某些与正整数有关的数学命题,常用两个步骤来证明它们的正确性:

①证明当 n 取第一个值 n_0(如 $n_0=1$ 或 $n_0=2$ 等)时,命题成立;

②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant n_0)$ 时,命题成立,证明当 $n=k+1$ 时命题也成立.

在完成了这两个步骤以后,就可以判定命题对于从 n_0 开始的所有正整数 n 都成立.这种证明方法叫做数学归纳法.

用数学归纳法证明某些数学命题时,①的完成往往是通过验证的方式去实施的,其中 n_0 称为初值;②中的“假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant n_0)$ 时,命题成立”,一般称为“归纳假设”,归纳假设的起始值从 n_0 开始.①、②都完成以后,命题对 $n=n_0$ 成立,对 $n=k+1(k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant n_0)$ 也成立,于是命题对

$$n_0,n_0+1,n_0+2,\cdots$$

都成立.

值得注意的是用数学归纳法证明数学命题时,必须使用归纳假设,否则,无论怎样,其证明都要算作是错误的,因为它脱离了数学归纳法的轨道.

解题方法指导

1. 用数学归纳法证明等式

[例 1]　用数学归纳法证明

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1(n\in\mathbf{N}^*).$$

证明　(1)当 $n=1$ 时,有

左边 $=1\cdot 1!=1$,右边 $=(1+1)!-1=2-1=1$,

∴　等式成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时等式成立,即

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+k\cdot k!=(k+1)!-1,$$

当 $n=k+1$ 时,有

$$\begin{aligned}&1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+k\cdot k!+(k+1)\cdot(k+1)!\\&=(k+1)!-1+(k+1)(k+1)!\\&=(k+1)![1+(k+1)]-1\\&=(k+1)!(k+2)-1=(k+2)!-1.\end{aligned}$$

$(k+1)!-1$ 源于归纳假设

∴　$n=k+1$ 时等式也成立.

由(1)、(2)知,等式对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

2. 用数学归纳法证明不等式

[例 2]　用数学归纳法证明

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2).$$

证明　(1)当 $n=2$ 时,有

$$1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}<\frac{3}{2}=2-\frac{1}{2},$$

∴　不等式成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant 2)$ 时不等式成立,即

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k},$$

当 $n=k+1$ 时,有

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

使用了归纳假设

$$<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{k(k+1)}$$

$$=2-\frac{1}{k}+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=2-\frac{1}{k+1},$$

∴　$n=k+1$ 时不等式也成立.

由(1)、(2)知,不等式对一切 $n\in\mathbf{N}^*$,且 $n\geqslant 2$ 都成立.

点评　本例证明过程中的"$\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{1}{k(k+1)}$"是对不等式运用加强的产物,依据是 $(k+1)^2>k(k+1)$.

[例 3]　用数学归纳法证明

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\geqslant\frac{3n}{2n+1}\quad(n\in\mathbf{N}^*).$$

分析　用数学归纳法证题的关键是第二步,难点也是第二步.在本例中,我们不能像证等式那样将 $\frac{3k}{2k+1}$ 和 $\frac{1}{(k+1)^2}$ 相加,一般来说,这两项相加并不恰好等于 $\frac{3(k+1)}{2(k+1)+1}$,这正是问题的难点所在.本例可考虑融归纳假设、分析法、求差比较法或放缩法于一体,实施对不等式的证明.

证明　(1)当 $n=1$ 时,左边$=1$,右边$=\frac{3\times 1}{2\times 1+1}=1$,不等式成立.

(2)假设当 $n=k(n\in\mathbf{N}^*)$ 时,不等式成立,即 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}\geqslant\frac{3k}{2k+1}$,则

当 $n=k+1$ 时,要证 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\geqslant\frac{3(k+1)}{2(k+1)+1}$,只要证

$$\frac{3k}{2k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}\geqslant\frac{3(k+1)}{2k+3}.$$

这步的意思是先看一看结果什么样?把求证式中的"n 换成 $k+1$"就知道了!知道结果以后,执果索因,用分析法证明

$$\because \quad \frac{3(k+1)}{2k+3}-\left(\frac{3k}{2k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{3}{4(k+1)^2-1}-\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$=\frac{1-(k+1)^2}{(k+1)^2[4(k+1)^2-1]}$$

$$=\frac{-k(k+2)}{(k+1)^2(4k^2+8k+3)}<0,$$

$$\therefore \quad \frac{3k}{2k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}\geqslant\frac{3(k+1)}{2k+3},$$

即
$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\geqslant\frac{3(k+1)}{2(k+1)+1},$$

$\therefore$ $n=k+1$ 时不等式成立.

由(1)、(2)知,不等式对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

3. 用数学归纳法证明整除问题

[例 4] 设 n 是任意的正整数,求证:n^3+5n 能被 6 整除.

分析 用数学归纳法证明整除问题,要把 $n=k$ 时的式子设为整除形式,即除式乘以一个整式,以便在后面的 $n=k+1$ 时的被除式中依此去变形.

证明 (1)当 $n=1$ 时,$n^3+5n=1^3+5\times1=6$ 能被 6 整除.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时,k^3+5k 能被 6 整除,则

由于$(k+1)^3+5(k+1)=k^3+3k^2+3k+1+5k+5$

$$=(k^3+5k)+3k(k+1)+6,$$

其中,k^3+5k 与 $3k(k+1)$分别能被 6 整除,

所以,当 $n=k+1$ 时,n^3+5n 也能被 6 整除.

由(1)、(2)知,对一切 $n\in\mathbf{N}^*$,n^3+5n 都能被 6 整除.

点评 $3k(k+1)$能被 6 整除,其理论依据是 $k(k+1)$能被 2 整除,或者说,k 与 $k+1$ 是两个连续的正整数,其积 $k(k+1)$一定是偶数.

4. 用数学归纳法证明数列问题

[例 5] 在数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,S_n 是其前 n 项的和. 当 $n\geqslant2$ 时,a_n,S_n,$S_n-\frac{1}{2}$成等比数列,求 a_2,a_3,a_4 的值,由此猜想$\{a_n\}$的一个通项公式,并证明所得的结论.

分析 由于 a_n,S_n,$S_n-\frac{1}{2}$成等比数列,所以 $S_n^2=a_n\left(S_n-\frac{1}{2}\right)$,由此可得出 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 与 a_n 的关系.

解　当 $n\geqslant 2$ 时，由 $a_n, S_n, S_n-\frac{1}{2}$ 成等比数列，可得

$$S_n^2=a_n\left(S_n-\frac{1}{2}\right),$$

所以
$$S_2^2=a_2\left(S_2-\frac{1}{2}\right),$$

即
$$(a_1+a_2)^2=a_2\left(a_1+a_2-\frac{1}{2}\right),$$

把 $a_1=1$ 代入上式，得 $a_2=-\frac{2}{3}$；

又 $S_3^2=a_3\left(S_3-\frac{1}{2}\right)$，

所以
$$(a_1+a_2+a_3)^2=a_3\left(a_1+a_2+a_3-\frac{1}{2}\right),$$

把 $a_1=1, a_2=-\frac{2}{3}$ 代入上式，得 $a_3=-\frac{2}{15}$；

同理可求出 $a_4=-\frac{2}{35}$.

猜想当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=-\frac{2}{(2n-1)(2n-3)}$，这时 $\{a_n\}$ 的一个通项公式是

$$a_n=\begin{cases}1 & (n=1),\\ -\dfrac{2}{(2n-1)(2n-3)} & (n\geqslant 2).\end{cases}$$

下面用数学归纳法去证明猜想是正确的：

(1)当 $n=2$ 时，$a_2=-\frac{2}{(2\times 2-1)(2\times 2-3)}=-\frac{2}{3}$，

所以，猜想正确.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*, k\geqslant 2)$ 时猜想正确，即 $a_k=-\frac{2}{(2k-1)(2k-3)}$，则

$$\begin{aligned}S_k&=1-2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k-3)}\right]\\&=1-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\right.\\&\qquad\left.\frac{1}{2k-3}-\frac{1}{2k-1}\right)\\&=1-\left(1-\frac{1}{2k-1}\right)=\frac{1}{2k-1}.\end{aligned}$$

假设中为什么取炷≤噪“约起什么作用？杂中的“小括号里面的中间的各项互相抵消，剩下首末两项”，即 员 援种“抵消”至少要有两项才行，那么初值也必须至少两项

由 $S_{k+1}^2=a_{k+1}\left(S_{k+1}-\frac{1}{2}\right)$，即 $(S_k+a_{k+1})^2=a_{k+1}\left(S_k+a_{k+1}-\frac{1}{2}\right)$，得

$$a_{k+1}=\frac{-S_k^2}{S_k+\frac{1}{2}}=-\frac{\left(\frac{1}{2k-1}\right)^2}{\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2}}=-\frac{2}{(2k+1)(2k-1)},$$

所以,当 $n=k+1$ 时猜想也是正确的.

由(1)、(2)知,猜想对一切 $n\in\mathbf{N}^*$,且 $n\geqslant2$ 是正确的.

结合 $a_1=1$ 知,对

$$a_n=\begin{cases}1 & (n=1),\\ -\dfrac{2}{(2n-1)(2n-3)} & (n\geqslant2)\end{cases}$$

的猜想是正确的.

5. 用数学归纳法证明几何问题

[例 6]　证明任一凸 $n(n\geqslant4)$ 边形都可以变形成一个与它面积相等的三角形.

分析　本例采用数学归纳法来证明,其中初值 $n=4$.

证明　如图 1-1.

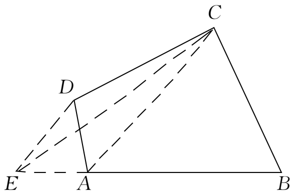

图 1-1

(1)当 $n=4$ 时,在凸四边形 $ABCD$ 中,连结 AC,过 D 作 $DE\,/\!/\,CA$,交 BA 的延长线于 E,连结 CE.

∵　$\triangle ACD$ 与 $\triangle ACE$ 等底等高,

∴　$\triangle ACD$ 与 $\triangle ACE$ 的面积相等,

∴　四边形 $ABCD$ 的面积与 $\triangle BCE$ 的面积相等,

∴　命题成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant4)$ 时,凸 k 边形可以变形成一个与它面积相等的三角形,则当 $n=k+1$ 时,有

∵　凸四边形可以变形成一个与它面积相等的三角形,

∴　凸 $k+1$ 边形可以变形成一个与它面积相等的凸 k 边形.

由归纳假设,可知凸 k 边形可以变形成一个与它面积相等的三角形.

∴　当 $n=k+1$ 时,命题也成立.

由(1)、(2)知,命题对一切 $n\in\mathbf{N}^*$,$n\geqslant4$ 都成立.

点评　本例的证明中,难点在"凸 $k+1$ 边形可以变形成一个与它面积相等的凸 k 边形"上. 对此的解释如下:把凸 $k+1$ 边形分为一个凸四边形和一个凸 $(k+1)-4$ 边形,其中凸四边形可以变形为一个与它面积相等的三角形;再把这

个三角形与凸$(k+1)-4$边形合在一起,其结果就是一个凸k边形.

基础训练题

一、选择题

1. 下列结论中,正确的是 ( )

A. 用数学归纳法证明数学命题时,初值n_0的值一定是1

B. 用数学归纳法证明数学命题时,不使用归纳假设也是允许的

C. 用数学归纳法证明数学命题时,$n=k+1$时命题成立即可保证命题成立

D. 用数学归纳法证明数学命题时,命题的成立是靠$n=n_0$(初值)和$n=k+1(k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant n_0)$时命题都成立共同保证的

2. 用数学归纳法证明命题“$(n+1)(n+2)\cdots(2n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)$”时,第二步在假设$n=k$时命题成立,去证明$n=k+1$时命题也成立,需在等式的两边同乘的因式是 ( )

A. $2k+1$ B. $2k+2$ C. $(2k+1)(2k+2)$ D. $4k+2$

3. 用数学归纳法证明:当n为正奇数时,x^n+y^n能被$x+y$整除,第二步的假设应写成 ( )

A. 假设$n=k$(k为正奇数)时命题正确,再推证$n=k+1$时命题正确

B. 假设$n=2k+1$ $(k\in\mathbf{N}^*)$时命题正确,再推证$n=2k+2$时命题正确

C. 假设$n=2k+1$ $(k\in\mathbf{N}^*)$时命题正确,再推证$n=2k+3$时命题正确

D. 假设$n=2k-1$ $(k\in\mathbf{N}^*)$时命题正确,再推证$n=2k+1$时命题正确

4. 某个与正整数n有关的命题,如果当$n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时该命题成立,则可推得当$n=k+1$时该命题也成立.现已知$n=7$时命题不成立,那么可推得 ( )

A. 当$n=6$时该命题不成立 B. 当$n=8$时该命题不成立

C. 当$n=6$时该命题成立 D. 当$n=8$时该命题成立

二、填空题

5. 用数学归纳法证明命题:当n是非负数时,$11^{n+2}+12^{2n+1}$能被133整除,假设$n=k$时命题成立,推证$n=k+1$时命题也成立,应添加的辅助项为______.

6. 证明$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$,假设$n=k$时成立到当$n=k+1$时成立一步,左边增加的项数是________.

7. 用数学归纳法证明“对一切正整数n,都有$2^n+2>n^2$”这一命题时,证明过程中的第(1)步,n应该验证________.

8. 用数学归纳法证明“$n\in\mathbf{N}^*,n(n+1)(2n+1)$能被6整除”时,某同学证法如下:

(1)当 $n=1$ 时，$1\times2\times3=6$ 能被 6 整除，

∴ $n=1$ 时命题成立.

(2)假设当 $n=k(n\in\mathbf{N}^*)$ 时命题成立，即 $k(k+1)(2k+1)$ 能被 6 整除，

那么当 $n=k+1$ 时，有

$$(k+1)(k+2)(2k+3)=(k+1)(k+2)[k+(k+3)]$$
$$=k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)(k+3).$$

∵ $k,k+1,k+2$ 和 $k+1,k+2,k+3$ 分别是三个连续正整数的积，

∴ 能被 6 整除，

∴ $n=k+1$ 时命题也成立.

综合(1)、(2)，对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，$n(n+1)(2n+1)$ 能被 6 整除 .

评价该同学的证明情况：________________________________.

三、解答题

9. 用数学归纳法证明：

$$1\cdot1+2\cdot3+3\cdot3^2+4\cdot3^3+\cdots+n\cdot3^{n-1}=\frac{3^n(2n-1)+1}{4}(n\in\mathbf{N}^*).$$

10. 用数学归纳法证明：在凸 n 边形中，以其顶点为顶点，但不以其边为边的三角形共有 $\frac{1}{6}n(n-4)(n-5)$ 个，这里 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant6$.

答案与提示

一、选择题

1. D（依据是数学归纳法的定义.）

2. D（从右式考虑较容易. $2^k\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2k-1)$ 乘以 $2[2(k+1)-1]$，得 $4k+2$.）

3. D（k 为正奇数时，$k+1$ 为正偶数，A 不正确；$2k+1$ 为正奇数时，$2k+2$ 为正偶数，B 不正确；$2k+1,2k+3(k\in\mathbf{N}^*)$ 虽是两个相邻正奇数，但 1 未包含在内，C 不正确 .）

4. A（若 $n=6$ 时命题成立，则可推得 $n=7$ 时命题成立，现已知 $n=7$ 时命题不成立，所以 $n=6$ 时命题不成立.）

二、填空题

5. $11\cdot12^{2k+1}-11\cdot12^{2k+1}$ 或 $144\cdot11^{k+2}-144\cdot11^{k+2}$（由 $11^{k+2}+12^{2k+1}$ 能被 133 整除，推证 $11^{k+1+2}+12^{2(k+1)+1}=11\cdot11^{k+2}+144\cdot12^{2k+1}$ 能被 133 整除时，考虑到用归纳假设，可添加辅助项 $11\cdot12^{2k+1}-11\cdot12^{2k+1}$ 或 $144\cdot11^{k+2}-144\cdot11^{k+2}$，构成 $11(11^{k+2}+12^{2k+1})+12^{2k+1}\cdot133$ 或 $144(11^{k+2}+12^{2k+1})-11^{k+2}\cdot133$，以证明 $n=k+1$ 时命题成立.）

6. $(2^{k+1}-1)-2^k+1=2^k$（当 $n=k$ 时，不等式左边是 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}$；当 $n=k+1$ 时，不等式左边是 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}$，增加了项 $\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}$，共有 $(2^{k+1}-1)-2^k+1=2^k$ 项．）

7. $n=1$、2、3 时命题都成立（第(1)步 $n=n_0$ 初始值的选取，应该是第(2)步递推能够进行下去的初始条件．由 $2^k+2>k^2$，推证 $2^{k+1}+2>(k+1)^2$，k 需取何值？若推证出 $2^{k+1}+2>(k+1)^2$，即证 $2^k>\frac{1}{2}(k^2+2k-1)$，$\because$ $2^k>k^2-2$，$\therefore$ 只需证 $k^2-2\geqslant\frac{1}{2}(k^2+2k-1)$，即 $(k+1)(k-3)\geqslant 0$，$\therefore$ $k\geqslant 3$，或 $k\leqslant -1$（舍）．由此可知，对一切大于等于 3 的正整数，才能完成由 $n=k$ 时不等式成立，推证出 $n=k+1$ 成立．$\therefore$ 初始值应该选取 $n=3$，且还要验证 $n=1$，2 时命题成立（因命题是对一切正整数而言）．）

8. 不符合数学归纳法要求（用数学归纳法证明 $n=k+1$ 时命题正确，必须用到 $n=k$时的归纳假设，以上证明推理虽然正确，但未用到归纳假设，所以证明过程不正确．）

三、解答题

9. (1)当 $n=1$ 时，左边 $=1\cdot 1=1$，右边 $=\frac{3(2-1)+1}{4}=1$，等式成立．　(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时等式成立，即 $1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+4\cdot 3^3+\cdots+k\cdot 3^{k-1}=\frac{3^k(2k-1)+1}{4}$，则当 $n=k+1$ 时，有 $1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+\cdots+k\cdot 3^{k-1}+(k+1)\cdot 3^k=\frac{3^k(2k-1)+1}{4}+(k+1)\cdot 3^k=\frac{3^k(2k-1)+1+4(k+1)\cdot 3^k}{4}=\frac{3^{k+1}[2(k+1)-1]+1}{4}$．这就是说，当 $n=k+1$ 时等式也成立，综合(1)，(2)可知，对一切正整数 n，等式都成立．

10. (1)当 $n=6$ 时，设六边形为 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，则仅由顶点及对角线构成的三角形为 $A_1A_3A_5$ 及 $A_2A_4A_6$ 两个，此时 $\frac{1}{6}\cdot 6\cdot(6-4)\cdot(6-5)=2$，命题成立．

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant 6)$时，命题成立，即在凸 k 边形中，满足条件的三角形有 $\frac{1}{6}k(k-4)\cdot(k-5)$个，则当 $n=k+1$ 时，对于凸 $k+1$ 边形 $A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}$，为不失一般性，设延长 A_2A_1 和 A_kA_{k+1} 相交于 A，于是作成一个凸 k 边

形 $AA_2\cdots A_k$. 依假设，该 k 边形中满足条件的三角形共有 $\frac{1}{6}k(k-4)\cdot(k-5)$ 个，但在原 $k+1$ 边形中，从顶点 A_1 与 A_{k+1} 出发的对角线各有 $(k+1)-3=k-2$ 条，它们各可构成满足条件的三角形有 $(k-4)+(k-5)+\cdots+2+1=\frac{1}{2}(k-3)(k-4)$ 个，在 k 边形 $A_1A_2\cdots A_k$ 中未计入；而在 k 边形 $AA_2\cdots A_k$ 中，从顶点 A 出发的 $(k-3)$ 条对角线所构成的满足条件的三角形共有 $(k-5)+(k-6)+\cdots+2+1=\frac{1}{2}(k-4)(k-5)$ 个，在 $k+1$ 边形 $A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}$ 中是没有的；因此，在凸 $k+1$ 边形 $A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}$ 中，满足条件的三角形的个数应为 $\frac{1}{6}k(k-4)(k-5)+2\cdot\frac{1}{2}(k-3)(k-4)-\frac{1}{2}(k-4)\cdot(k-5)=\frac{1}{6}(k-4)[k(k-5)+6(k-3)-3(k-5)]=\frac{1}{6}(k-4)\cdot(k^2-2k-3)=\frac{1}{6}(k+1)(k-3)(k-4)$. 即当 $n=k+1$ 时，命题也成立. 因此，对于大于等于 6 的任意正整数，命题都成立.

视野拓展

释疑解难

一步两项问题

通过前面的学习，我们对数学归纳法的认识，可以简单的概括为：

首先，用数学归纳法可以证明与正整数 n 有关的命题 $f(n)$ 的正确性.

其次，用数学归纳法证明与正整数 n 有关的数学命题 $f(n)$ 的正确性，其步骤是①验证当 $n=n_0$（初值）时，命题 $f(n)$ 成立；②假设 $n=k(k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant n_0)$ 时，命题 $f(n)$ 成立，即 $f(k)$ 成立，由此出发去证明 $f(k+1)$ 也成立；由①和②去断定命题对一切 $n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant n_0$ 都成立.

第三，起初学习数学归纳法的，最易犯下面的错误：

①机械、教条地看待 $n_0=1$. 其实，这里的“1”的内涵是初值，它可以是数值 1，也可以不是数值 1. 如，用数学归纳法证明

$$1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

时，由于等式的左边是 $n+1$ 项的和，所以，在验证 $n=n_0$ 时等式成立的时候，“左边=1”就是错误的，而“左边=1+2=3”才是正确的，这就是“一步两项”问题.

②用数学归纳法证明数学命题 $f(n)$ 成立，由假设 $f(k)$ 成立去推证 $f(k+1)$

成立时，总是“添加一项”，这也是不可取的. 如，用数学归纳法证明

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

时，由假设 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时命题成立去推证 $n=k+1$ 时命题也成立的时候，等式的左边应添加的项是 $\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$，而不是“$\frac{1}{2(k+1)}$”，这也是我们和读者们谈的“一步两项”问题.

典型例题导析

1. 典型例题

[例 7] 用数学归纳法证明

$$1+a+a^2+\cdots+a^{n+1}=\frac{1-a^{n+2}}{1-a}(a\neq 1,n\in\mathbf{N}^*)$$

时，验证 $n=1$ 时等式成立，等式的左边是 (　　)

A. 1　　B. $1+a$　　C. $1+a+a^2$　　D. $1+a+a^2+a^3$

解　等式的左边是 $n+2$ 项的和，

所以，当 $n=1$ 时，等式的左边应该是 $1+2=3$ 项的和，即

$$1+a+a^2.$$

选 C.

点评　前面“[释疑解难]”中，我们讲的是“一步两项”问题，本例可类比的定位它是“一步三项”问题，由此你可以去联想“一步 m 项”问题，其中 $m\in\mathbf{N}^*$，$m\geqslant 3$.

[例 8] 用数学归纳法证明

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}(n\in\mathbf{N}^*)$$

分析　等式的左边共 $2n$ 项，右边共 n 项，$f(k)$ 与 $f(k+1)$ 相比左边增两项，右边增一项，而且左、右两边的首项不同. 因此，由“$n=k$”到“$n=k+1$”时要注意项的合并.

证明　(1) 当 $n=1$ 时，左边 $=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，右边 $=\frac{1}{2}$，命题成立.

(2) 假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时命题成立，即

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k},$$

那么当 $n=k+1$ 时，有

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$$

$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$$

$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2},$$

求证式左边两个数的差为一组,共灶组,视为灶项援所以第噪员项由两个数的差组成援叫“一步两项”

上式表明当 $n=k+1$ 时命题也成立.

由(1)和(2)知,命题对一切正整数都成立.

点评　用数学归纳法证明与正整数有关的一些等式的关键在于“先看项”,弄清等式两边的构成规律,等式的两边各有多少项,项的多少与 n 的取值是否有关;由 $n=k$ 到 $n=k+1$ 这一步,等式的两边应增加多少项?增加怎样的项?

[例 9]　用数学归纳法证明 $(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)(n\in\mathbf{N}^*)$.

分析　这里的 n 具有两个含义:(1)乘积中各个因式均含有字母 n,因而当 $n=1$ 时,只需将 $n=1$ 代入即可;(2)n 的值还决定着左边因式和右边因数的个数,当 $n=1$ 时等式的左边是一个因式 $(1+1)$,右边是 $2^1\cdot(2\cdot1-1)$,不能错误地写成:左 $=(1+1)(1+2)(1+3)\cdots(1+1)$,右 $=2^1\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2\cdot1-1)$.

证明　(1)当 $n=1$ 时,左边 $=1+1=2$,右边 $=2$,等式成立.

(2)假设 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时等式成立,即 $(k+1)(k+2)\cdots(2k)=2^k\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2k-1)$,则

当 $n=k+1$ 时,有

$$(k+2)(k+3)\cdots[k+1+(k-1)](k+1+k)(k+1+k+1)$$

$$=2(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(2k)(2k+1)=2\cdot2^k\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2k-1)(2k+1)$$

$$=2^{k+1}\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot[2(k+1)-1],$$

上式表明当 $n=k+1$ 时,等式也成立.

由(1)、(2)知,等式对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

2. 试验、归纳、猜想、证明的数学模式

有些数学问题,题目要求中不是直截了当地要求用数学归纳法对其加以证明,但是,题目本身的结构和特点牵着我们用数学归纳法去给出它的证明. 这类问题的解决,我们可以采取

一试验⟶二归纳⟶三猜想⟶四证明

的模式去操作. 其中,试验、归纳、猜想阶段属于不完全归纳阶段,证明阶段属于完全归纳阶段,前者是探路,后者是对前者的落实.

[例 10]　比较 2^n 与 n^2 的大小,其中 $n\in\mathbf{N}^*$.

分析　由于 n 是正整数，所以，可以给 n 赋值，如：令 $n=1,2,3,4,5,6,\cdots$；这就是所谓的试验. 观察试验的结果，当 $n=1,2,3,4,5,6$ 时，2^n 与 n^2 的大小关系基本上呈现出一定的规律性，这个规律性就是所谓的归纳. 随后，可依据归纳的结果去猜想问题的结论，最后给出证明.

解　当 $n=1$ 时，$2^1>1^2$，即 $2^n>n^2$，

当 $n=2$ 时，$2^2=2^2$，即 $2^n=n^2$，

当 $n=3$ 时，$2^3<3^2$，即 $2^n<n^2$，

当 $n=4$ 时，$2^4=4^2$，即 $2^n=n^2$，

当 $n=5$ 时，$2^5>5^2$，即 $2^n>n^2$，

当 $n=6$ 时，$2^6>6^2$，即 $2^n>n^2$，

……

> 前四项圉与烓有三个关系“跃越约，后面形成了规律擾这样的题要有耐心，多试几项！

猜想：当 $n\geqslant 5$ 时，$2^n>n^2$.

下面用数学归纳法证明猜想是正确的.

(1)当 $n=5$ 时，由上面的计算可知，猜想是正确的.

(2)假设 $n=k(k\in\mathbf{N}^*，k\geqslant 5)$时，猜想是正确的，即 $2^k>k^2$，则

$$2^{k+1}=2\cdot 2^k>2k^2=k^2+k^2>k^2+(2k+1)=(k+1)^2,$$

上式表明当 $n=k+1$ 时，猜想也是正确的.

由(1)、(2)知，猜想对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，且 $n\geqslant 5$ 都是正确的.

综合猜想前的计算，以及对猜想的证明，可得

$$2^n\begin{cases}<n^2\,(n=3),\\=n^2\,(n=2,4),\\>n^2\,(n=1,5,6,\cdots).\end{cases}$$

点评　本例除了“试验，归纳，猜想，证明”的特点以外，另一个特点就是结论是分段形式的，前一段没有规律性，后一段呈现出规律性. 这样的问题的证明，前一段依靠逐一验证，别无选择，后一段可采用数学归纳法.

3. 归纳假设的形式不是唯一的

请读者们随我们一起考虑下面的问题：

用数学归纳法证明某些数学命题成立时，如果第二步改成“假设当 $n=k$ $(k\in\mathbf{N}^*，k\geqslant n_0)$时命题成立，那么当 $n=k+2$ 时命题也成立”，那么第一步应该如何修改？

试验如下：

$n=n_0$(初值)以及 $n=k+2$ 时，命题成立，成立的项是

$$n_0,n_0+2,n_0+4,n_0+6,\cdots.$$

在上面的这些项中，设想插入