



# 目 录

|                                |         |
|--------------------------------|---------|
| 基础篇 .....                      | ( 1 )   |
| 第一讲  复数的概念 .....               | ( 2 )   |
| 1.1  数的概念的发展和复数的概念 .....       | ( 2 )   |
| 1.2  复平面和共轭复数 .....            | ( 18 )  |
| 1.3  复数的向量表示 .....             | ( 31 )  |
| 高考热点题型评析与探索 .....              | ( 51 )  |
| 本讲测试题 .....                    | ( 55 )  |
| 第二讲  复数的运算与复数集内的方程 .....       | ( 65 )  |
| 2.1  复数的四则运算及性质 .....          | ( 65 )  |
| 2.2  复数集内的方程 .....             | ( 83 )  |
| 高考热点题型评析与探索 .....              | ( 101 ) |
| 本讲测试题 .....                    | ( 105 ) |
| 第三讲  复数与三角函数的联系 .....          | ( 118 ) |
| 3.1  复数的三角形式 .....             | ( 118 ) |
| 3.2  复数的三角形式的运算 .....          | ( 142 ) |
| 高考热点题型评析与探索 .....              | ( 165 ) |
| 本讲测试题 .....                    | ( 170 ) |
| 第四讲  复数与平面向量的联系 .....          | ( 183 ) |
| 4.1  复数加减法的几何意义 .....          | ( 183 ) |
| 4.2  复数的乘法、除法、乘方、开方的几何意义 ..... | ( 204 ) |
| 高考热点题型评析与探索 .....              | ( 221 ) |
| 本讲测试题 .....                    | ( 225 ) |
| 综合应用篇 .....                    | ( 231 ) |
| 一、复数的模的应用 .....                | ( 231 ) |
| 二、复数的辐角主值的应用 .....             | ( 242 ) |
| 综合应用测试题 .....                  | ( 260 ) |

# 基 础 篇

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科,简称研究“数”和“形”的学科.代数是数学中侧重研究运算方法的一个分支,复数是代数的一个节点.

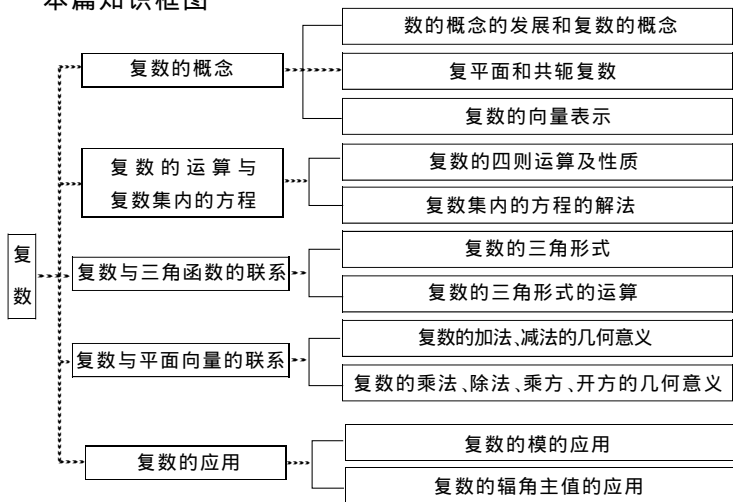
复变量  $z=a+bi$  区别于实变量的显著标志是它由两个实变量  $a$  与  $b$  有序构成. $z$  的变化受  $a, b$  的共同制约,而不是只受  $a, b$  之一的制约.

复数的本质是以  $a+bi$  为整体,研究整体形式下的变量的运算规律,其表现形式是代数运算、三角运算、几何运算.

复数  $z=a+bi$  当  $b=0$  时为实数,此时复数论与实数论完全等同.所以  $b=0$  与  $b \neq 0$  是复数集  $C$  与实数集  $R$  的分界线,后续理论都在  $b \neq 0$  上.

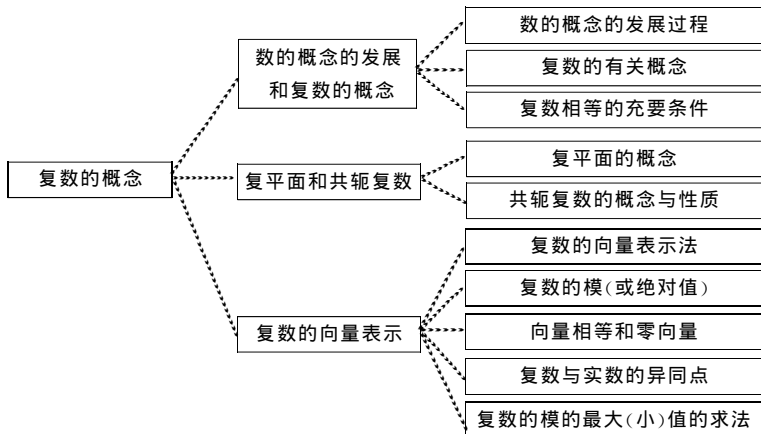
解决复数问题的思维模式是“化虚为实”、“整体运用”.

## 本篇知识框图



# 第一讲 复数的概念

本讲知识框图



## 学习指导

[考纲要求]

了解复数的有关概念,了解复数的代数表示和几何意义.  
了解从自然数系到复数系的关系及扩充的基本思想.

## 1.1 数的概念的发展和复数的概念

### 重点难点归纳

- 重点** ①了解数的概念的发展过程,理解数集扩充到复数集的必然性.②掌握复数的有关概念,并能熟练地运用复数的这些概念解题.③熟记复数相等的充要条件,并能熟练地运用这些条件解决有关问题.
- 难点** ①准确区分复数集与实数集,复数集与虚数集,虚数集与纯虚数集之间的包含关系.②复数有关概念的应用.
- 本节需掌握的知识点** ①复数的有关概念.②复数相等的充要条件.

## 知识点精析与应用

### 知识点精析

#### 1. 数的概念的发展过程

数的概念是从实践中产生和发展起来的. 早在人类社会初期, 由于计数的需要, 人们就建立了正整数的概念. 正整数的全体构成正整数集  $\mathbf{N}^*$  (或  $\mathbf{N}_+$ ).

随着生产和科学的发展, 数的概念也得到发展.

为了表示各种具有相反意义的量以及满足记数法的要求, 人们引进了零及负整数, 把自然数看作正整数和零, 把自然数、负整数合并在一起, 构成整数集  $\mathbf{Z}$ .

为了解决测量、分配中遇到的将某些量进行等分的问题, 人们又引进了分数, 分数集实际上就是有理数集  $\mathbf{Q}$ .

为了解决有些量与量之间的比值(例如, 用正方形的边长去度量它的对角线所得结果)不能用有理数表示的矛盾, 人们又引进了无理数. 有理数集与无理数集合并在一起, 构成实数集  $\mathbf{R}$ .

数的范围扩充到实数集  $\mathbf{R}$  以后, 像  $x^2 = -1$  这样的方程还是无解, 因为没有 一个实数的平方等于  $-1$ . 在十六世纪, 由于解方程的需要, 人们开始引进一个新数  $i$ , 叫做虚数单位, 并规定:

(1) 它的平方等于  $-1$ , 即  $i^2 = -1$ .

(2) 实数可以与它进行四则运算, 进行四则运算时, 原有的加、乘运算律仍然成立.

在这种规定下,  $i$  可以与实数  $b$  相乘, 再同实数  $a$  相加, 由于满足乘法交换律及加法交换律, 从而可以把结果写成  $a+bi$ . 这样, 数的范围又扩充了, 出现了形如  $a+bi$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ) 的数, 人们把它们叫做复数. 全体复数构成的集合, 一般用字母  $\mathbf{C}$  来表示.

#### 2. 复数的有关概念

(1) 实数  $a, b$  分别叫做复数  $a+bi$  的实部和虚部;

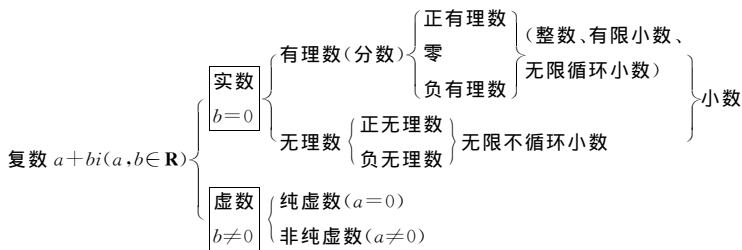
(2) 复数  $a+bi$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ), 当  $b=0$  时, 就是实数;

(3) 复数  $a+bi$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ), 当  $b \neq 0$  时, 叫做虚数;

(4) 复数  $a+bi$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ), 当  $a=0$  且  $b \neq 0$  时, 叫做纯虚数.

(5) 复数的分类:

(2)、(3)、(4) 是  
解题依据, 必须  
背下来



(6) 两个复数, 如果不全是实数, 就不能比较大小.

### 3. 复数相等的充要条件

对于复数  $a+bi$  和  $c+di(a, b, c, d \in \mathbf{R})$ , 它们相等的充分必要条件是

$$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c, b=d;$$

特别地,  $a+bi=0 \Leftrightarrow a=0, b=0$ .

“化虚为实”就是从这儿开始的

复数相等的充要条件, 开辟了把复数问题转化为实数问题的新途径.

## 解题方法指导

### 1. 复数相等的充要条件

**[例 1]** 已知  $(2x+1)+i=y+(3-y)i$ , 其中  $x, y \in \mathbf{R}$ . 求  $x$  与  $y$ .

**[分析]** 由复数相等的充要条件知, 当且仅当实部相等且虚部相等, 等式左右两边的复数相等, 列出关于  $x$  与  $y$  的二元一次方程组, 求解后可得  $x$  与  $y$ .

**[解]** 根据复数相等的充要条件, 得方程组

$$\begin{cases} 2x+1=y, \\ 1=3-y, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=2. \end{cases}$$

**[点评]** 复数是二元形式的, 通过实部、虚部分别相等, 得两个等式, 可求  $x$  和  $y$  的值.

**[例 2]** 已知关于  $x, y$  的方程组  $\begin{cases} (2x-1)+i=y-(3-y)i, & \text{①} \\ (2x+ay)-(4x-y+b)i=9-8i & \text{②} \end{cases}$

有实数解, 求实数  $a$  与  $b$  的值.

**[解]** 由方程①, 得

$$\begin{cases} 2x-1=y, \\ 1=-(3-y), \end{cases}$$

解得  $\begin{cases} x=\frac{5}{2}, \\ y=4. \end{cases}$  关键在求出  $x, y$

把  $x$  与  $y$  的值代入方程②, 得

$$(5+4a)-(6+b)i=9-8i.$$

$$\therefore a, b \in \mathbf{R},$$

$$\therefore \begin{cases} 5+4a=9, \\ 6+b=8, \end{cases}$$

解得  $\begin{cases} a=1, \\ b=2. \end{cases}$

[点评] 求  $a$  与  $b$  的值, 需要先求  $x, y$ , 这是通过对②的观察得到的. 解本题, 先后顺序直接关系到解题的成败.

**[例 3]** 设方程  $(1+i)x^2 + (1+5i)x - (2-6i) = 0$  有实根, 求这个实数根.

[分析] 将方程的实根  $x_0$  代入方程, 由复数相等的充要条件可得方程组, 求解即可.

[解] 方程整理为  $(x^2+x-2)+i(x^2+5x+6)=0$ .

设方程的实根为  $x_0$ , 则

化虚为实, 即把复数问题转化为实数问题解决

$$\begin{cases} x_0^2+x_0-2=0, & \text{①} \\ x_0^2+5x_0+6=0. & \text{②} \end{cases}$$

解方程组得

$$\begin{cases} x_0=1 \text{ 或 } -2, \\ x_0=-3 \text{ 或 } -2. \end{cases}$$

同时满足①、②的值为  $x_0=-2$ .

保证①、②两个条件都成立

$\therefore$  所求的根为  $x_0=-2$ .

**[例 4]** 如果方程  $(1+i)x^2 - 2(a+i)x + 5-3i=0 (a \in \mathbf{R})$  有实数解, 那么  $a=$  \_\_\_\_.

[分析] 方程的实数解必然适合方程. 设  $x=x_0$  为方程的实数解, 代入方程, 方程具有  $c+di=0$  的形式 ( $c, d \in \mathbf{R}$ ). 由复数相等的充要条件, 可得关于  $x_0$  与  $a$  的方程组, 解方程组便可求得  $x_0$  与  $a$ .

[解] 原方程整理为

$$(x^2-2ax+5)+(x^2-2x-3)i=0.$$

设方程的实根为  $x_0$ , 代入方程得

$$(x_0^2 - 2ax_0 + 5) + (x_0^2 - 2x_0 - 3)i = 0.$$

由复数相等的充要条件, 得

$$\begin{cases} x_0^2 - 2ax_0 + 5 = 0, & \text{①} \\ x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0. & \text{②} \end{cases}$$

由②得  $x_0 = 3$  或  $x_0 = -1$ ; 代入①得  $a = \frac{7}{3}$  或  $a = -3$ .

$$\therefore a = \frac{7}{3} \text{ 或 } a = -3.$$

[点评] 一般地, 根据复数相等的充要条件, 可以由两个复数相等的式子, 得到两个实数方程所组成的方程组, 从而可以用来确定两个独立参数(参数必须为实数或纯虚数).

## 2. 复数的有关概念

[例5]  $m$  为何实数时,  $z = (2m^2 - 5m + 2) + (3m^2 - 4m - 4)i$ ; (1) 是实数; (2) 是纯虚数; (3) 对应点在第四象限.

[分析] 复数  $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$ :  $z$  为实数  $\Leftrightarrow b = 0$ ;  $z$  为纯虚数  $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b \neq 0; \end{cases}$   $z$  的

对应点在第四象限  $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ b < 0. \end{cases}$

[解] (1) 由  $3m^2 - 4m - 4 = 0$ , 得  $m = -\frac{2}{3}$  或  $m = 2$ ,

$\therefore$  当  $m = -\frac{2}{3}$  或  $m = 2$  时, 复数  $z$  为实数.

(2) 复数  $z$  为纯虚数的充要条件是  $\begin{cases} 2m^2 - 5m + 2 = 0, \\ 3m^2 - 4m - 4 \neq 0, \end{cases}$

解得  $m = \frac{1}{2}$ .

$\therefore$  当  $m = \frac{1}{2}$  时, 复数  $z$  为纯虚数.

(3) 由  $\begin{cases} 2m^2 - 5m + 2 > 0, \\ 3m^2 - 4m - 4 < 0, \end{cases}$  得  $-\frac{2}{3} < m < \frac{1}{2}$ ,

$\therefore$  当  $-\frac{2}{3} < m < \frac{1}{2}$  时, 复数  $z$  的对应点在第四象限.

**【例6】**  $m$  取何实数时,复数  $z = \frac{m^2 - m - 6}{m + 3} + (m^2 - 2m - 15)i$  是实数? 是虚数? 是纯虚数?

**【分析】** 本题是判断复数在什么情况下为实数、虚数、纯虚数. 只要我们紧紧抓住“设  $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$ , 若  $b = 0$ , 则  $z \in \mathbf{R}$ ; 若  $b \neq 0$ , 则  $z$  是虚数; 若  $a = 0, b \neq 0$ , 则  $z$  是纯虚数”这样三条主线, 此题就极易解决.

**【解】** (1) 当  $\begin{cases} m^2 - 2m - 15 = 0, \\ m + 3 \neq 0 \end{cases}$  时, 分母不为 0 不能忽视

即  $\begin{cases} m = 5 \text{ 或 } m = -3, \\ m \neq -3 \end{cases}$  时, 亦即  $m = 5$  时,  $z \in \mathbf{R}$ .

(2) 当  $\begin{cases} m^2 - 2m - 15 \neq 0, \\ m + 3 \neq 0 \end{cases}$  时, 即  $m \neq -3$  且  $m \neq 5$  时,  $z$  是虚数.

(3) 当  $\begin{cases} m^2 - 2m - 15 \neq 0, \\ m^2 - m - 6 = 0, \\ m + 3 \neq 0 \end{cases}$  时, 即  $\begin{cases} m \neq -3 \text{ 且 } m \neq 5, \\ m = 3 \text{ 或 } m = -2, \\ m \neq -3 \end{cases}$  时, 亦即  $m = 3$  或

$m = -2$  时,  $z$  是纯虚数.

**【例7】** 实数  $m$  分别取什么数值时, 复数  $z = (m^2 + 5m + 6) + (m^2 - 2m - 15)i$ :

- (1) 是实数;
- (2) 是虚数;
- (3) 是纯虚数;
- (4) 对应点在  $x$  轴的上方;
- (5) 对应点在直线  $x + y + 5 = 0$  上.

**【分析】** 运用  $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$  是实数、虚数、纯虚数的条件和  $z = a + bi$  与点  $Z(a, b)$  的对应关系进行求解.

**【解】** (1) 由  $m^2 - 2m - 15 = 0$  可知,  $m = 5$  或  $m = -3$  时,  $z$  为实数;

(2) 由  $m^2 - 2m - 15 \neq 0$  可知,  $m \neq 5$  且  $m \neq -3$  时,  $z$  为虚数;

(3) 由  $\begin{cases} m^2 - 2m - 15 \neq 0, \\ m^2 + 5m + 6 = 0 \end{cases}$  可知,  $m = -2$  时,  $z$  为纯虚数;

(4) 由  $m^2 - 2m - 15 > 0$  可知,  $m < -3$  或  $m > 5$  时,  $z$  的对应点在  $x$  轴的上方;

按实部、虚部的符号区分

(5) 由  $(m^2 + 5m + 6) + (m^2 - 2m - 15) + 5 = 0$  可知,  $m = \frac{-3 - \sqrt{41}}{4}$  或  $m = \frac{-3 + \sqrt{41}}{4}$  时,  $z$  的对应点在直线  $x + y + 5 = 0$  上.

点的坐标适合直线方程

【点评】类似本例的问题,一般都是运用复数的相关概念将问题转化为关于  $m$  的方程或不等式来解.

【例 8】已知复数  $z = m^2(1+i) - (m+i)$  ( $m \in \mathbf{R}$ ), 当  $m$  为何值时, 复数  $z$ :

- (1) 是实数;
- (2) 是虚数;
- (3) 是纯虚数.

【分析】由于所给复数  $z$  为非标准形式, 需将  $z$  整理为标准形式后, 再按题目要求, 对实部和虚部分别进行处理.

【解】  $z = (m^2 - m) + (m^2 - 1)i$ .

(1) 由  $m^2 - 1 = 0$ , 得  $m = \pm 1$ ;

(2) 由  $m^2 - 1 \neq 0$ , 得  $m \neq \pm 1$ ;

(3) 由  $\begin{cases} m^2 - 1 \neq 0, \\ m^2 - m = 0, \end{cases}$  得  $\begin{cases} m \neq \pm 1, \\ m = 0 \text{ 或 } 1, \end{cases}$  即  $m = 0$ .

【例 9】求  $\theta$ , 使复数  $z = (2\sin^2\theta - \sin\theta) + (3\tan^2\theta - 1)i$  是:

- (1) 实数;
- (2) 纯虚数;
- (3) 零.

【分析】复数  $z$  的实部、虚部是用三角函数的形式给出的, 按照题目要求得到三角等式(方程)或三角不等式即可.

【解】(1) 由  $3\tan^2\theta - 1 = 0$ , 得  $\tan\theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,

$\therefore \theta = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) 时,  $z$  是实数.

$\theta$  为满足条件的所有实数

(2) 由  $\begin{cases} 2\sin^2\theta - \sin\theta = 0, \\ 3\tan^2\theta - 1 \neq 0, \end{cases}$  得  $\begin{cases} \sin\theta(2\sin\theta - 1) = 0, \\ \tan\theta \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \end{cases}$

$\therefore \theta = k\pi$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) 时,  $z$  是纯虚数.

$$(3) \text{ 由 } \begin{cases} 2\sin^2\theta - \sin\theta = 0, \\ 3\tan^2\theta - 1 = 0 \end{cases} \text{ 得}$$

$$\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ 或 } \theta = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} (k \in \mathbf{Z}), z = 0.$$

**【例 10】** 设复数  $(-3+k^2) - (k^2-2)i$  所对应的点在三象限内, 求  $k$  的取值范围.

**【分析】** 由复数  $z = a + bi$  和点  $Z(a, b)$  的对应关系, 实部小于 0, 虚部小于 0, 得不等式组, 求解即可.

**【解】** 由已知, 表示复数的点在三象限,

$$\therefore \begin{cases} -3+k^2 < 0, \\ -(k^2-2) < 0, \end{cases} \quad \leftarrow \text{点 } (-3+k^2, -k^2+2) \text{ 的横、纵坐标都小于零}$$

解这个不等式组, 得

$$-\sqrt{3} < k < -\sqrt{2} \text{ 或 } \sqrt{2} < k < \sqrt{3}.$$

$\therefore k$  的取值范围是  $(-\sqrt{3}, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ .

## 基础达标演练

### 一、选择题

- “复数  $a + bi (a, b \in \mathbf{R})$  为纯虚数”是“ $a = 0$ ”的 ( )
  - 充分但不必要条件
  - 必要但不充分条件
  - 充要条件
  - 既不充分又不必要条件
- $m \in \mathbf{R}$ , 复数  $(2m^2 - 3m - 2) + (m^2 - 3m + 2)i$  表示纯虚数的条件是 ( )
  - $m = -\frac{1}{2}$  或  $m = 2$
  - $m = 2$
  - $m = -\frac{1}{2}$
  - $m = 2$  或  $m = 1$
- 设  $C = \{\text{复数}\}$ ,  $A = \{\text{实数}\}$ ,  $B = \{\text{纯虚数}\}$ , 全集  $I = C$ , 则下列结论中正确的是 ( )
  - $A \cup B = C$
  - $\complement_I A = B$
  - $A \cap (\complement_I B) = \emptyset$
  - $B \cup (\complement_I B) = C$
- 若  $z_1 = \sin 2\theta + i \cos \theta$ ,  $z_2 = \cos \theta + i \sqrt{3} \sin \theta$ ,  $z_1 = z_2$ , 则  $\theta$  等于 ( )
  - $k\pi (k \in \mathbf{Z})$
  - $2k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$
  - $2k\pi \pm \frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$
  - $2k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$

二、填空题

5. 方程  $(2+i)x^2 - (5+i)x + (2-2i) = 0$  的实数解  $x =$  \_\_\_\_\_.

6. 复数  $z = x^2 - 2x - 3 + [(\log\frac{1}{2}x)^2 - \log\frac{1}{2}x - 2]i$  是虚部为正实数的非纯虚数, 则实数  $x$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

7. 已知  $M = \{1, 2, (a^2 - 3a - 1) + (a^2 - 5a - 6)i\}$ ,  $N = \{-1, 3\}$ ,  $M \cap N = \{3\}$ , 则实数  $a$  \_\_\_\_\_.

8. 复数  $z = (a^2 - 2a + 3) - (a^2 - a + \frac{1}{2})i$  ( $a \in \mathbf{R}$ ) 在复平面内的对应点位于 \_\_\_\_\_ 象限.

三、解答题

9. 使复数  $z = a^2 - a - 6 + \frac{a^2 + 2a - 15}{a^2 - 4}i$  为纯虚数的实数  $a$  是否存在? 存在, 求出  $a$  的值; 不存在, 说明理由.

10. 关于  $x$  的方程  $a(1+i)x^2 + (1+a^2i)x + a^2 + i = 0$  ( $a \in \mathbf{R}$ ) 有实根, 求  $a$  及方程的根.

答案与提示

一、选择题

1. A (若  $a+bi$  为纯虚数, 则  $a=0$  且  $b \neq 0$ ; 而  $a=0$  时,  $bi$  可能是纯虚数, 也可能是 0.)

2. C ( $a+bi$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ) 表示纯虚数的条件是  $\begin{cases} a=0, \\ b \neq 0, \end{cases}$  即  $\begin{cases} 2m^2 - 3m - 2 = 0 \cdots \textcircled{1}, \\ m^2 - 3m + 2 \neq 0 \cdots \textcircled{2}. \end{cases}$  解

方程①得  $m = -\frac{1}{2}$  或  $m = 2$ , 代入②知  $m = 2$  时,  $m^2 - 3m + 2 = 0$ , 使原复数为 0, 舍去.)

3. D (根据复数集分类直接判断选 D.)

4. D ( $\because z_1 = z_2, \therefore \begin{cases} \sin 2\theta = \cos \theta \cdots \textcircled{1}, \\ \cos \theta = \sqrt{3} \sin \theta \cdots \textcircled{2}. \end{cases}$  由①、②可知  $\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ).)

二、填空题

5. 设实数解为  $x_1$ , 则  $(2x_1^2 - 5x_1 + 2) + (x_1^2 - x_1 - 2)i = 0$ .  $\because x_1 \in \mathbf{R}$ ,

$\therefore \begin{cases} 2x_1^2 - 5x_1 + 2 = 0, \\ x_1^2 - x_1 - 2 = 0, \end{cases}$  即  $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \text{ 或 } x_1 = 2, \\ x_1 = -1 \text{ 或 } x_1 = 2, \end{cases} \therefore x_1 = 2$ , 即原方程的实数

解为  $x = 2$ .

6. 由题意, 有  $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \neq 0, \\ \log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}} x - 2 > 0, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x \neq -1, x \neq 3, \\ x > 2 \text{ 或 } 0 < x < \frac{1}{4}. \end{cases} \therefore x \in (0, \frac{1}{4}) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty),$

$\therefore x$  的取值范围是  $(0, \frac{1}{4}) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$ .

7. 按题意  $(a^2 - 3a - 1) + (a^2 - 5a - 6)i = 3, \therefore \begin{cases} a^2 - 5a - 6 = 0, \\ a^2 - 3a - 1 = 3, \end{cases}$  解得  $a = -1$ .

8. 实部  $a^2 - 2a + 3 = (a - 1)^2 + 2 > 0$ , 虚部  $-(a^2 - a + \frac{1}{2}) = -(a - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} < 0$ , 实部大于 0, 虚部小于 0, 点  $Z$  在第四象限.

### 三、解答题

9. 假设  $z$  为纯虚数, 则  $\begin{cases} a^2 - a - 6 = 0 \cdots \textcircled{1}, \\ \frac{a^2 + 2a - 15}{a^2 - 4} \neq 0 \cdots \textcircled{2}. \end{cases}$  由  $\textcircled{1}$  得  $a = -2$ , 或  $a = 3$ . 当  $a =$

$-2$  时,  $\textcircled{2}$  式左端无意义; 当  $a = 3$  时,  $\textcircled{2}$  式不成立.  $\therefore$  不存在实数  $a$ , 使  $z$  为纯虚数.

10.  $\therefore$  方程有实根,  $\therefore x \in \mathbf{R}$ . 又  $a \in \mathbf{R}, \therefore \begin{cases} ax^2 + a^2x + 1 = 0, \\ ax^2 + x + a^2 = 0, \end{cases}$  相减得  $(a^2 - 1)x = a^2 - 1$ . (1) 当  $a^2 - 1 \neq 0$  时,  $x = 1$ , 代回原方程, 此时  $a^2 + a + 1 = 0$  无实解. (2) 当  $a^2 - 1 = 0$  时,  $\textcircled{1} a = 1$  时,  $x^2 + x + 1 = 0$  无实根;  $\textcircled{2} a = -1$  时,  $x^2 - x - 1 = 0, x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . 综

上所述,  $a = -1, x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  符合题意.

## 视野拓展

### 释疑解难

#### 解决复数问题的两条主线——化虚为实, 整体运用

虚数单位  $i$  的加盟, 使得数的理论体系中出现了形如  $a + bi$  的数, 其中  $a, b$  都是实数.  $a$  与  $b$  都不能独立地确定  $z = a + bi$ , 要确定  $z = a + bi$ , 必须由  $a$  与  $b$  联手完成. 在中国语言中, 两个或两个以上才有“复”的内涵, 这样我们才有理由称  $z = a + bi$  为复数. 全体复数构成复数集  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{C}$  的理论体系与  $\mathbf{R}$  的理论体系之间存在怎样的联系和差异呢?

### 1. 化虚为实

对于复数  $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$ , 如果  $b = 0$ , 那是我们过去熟知的实数理论. 因此, 学习复数, 后续理论的焦点是“ $b \neq 0$ ”.

用已有的知识解决未知的问题, 符合常人的思维习惯, 这是无可厚非的. 所以, 我们这里讲的“化虚为实”, 其本质就是把“ $z = a + bi$ ”中的“ $a$ ”与“ $b$ ”分离出来, 通过对“ $a$ ”与“ $b$ ”的研究, 实施对“ $z = a + bi$ ”的讨论.

如  $z_1 = a - 1 + (b + 2008)i = 2009 + 2010i = z_2$ , 其中  $a, b \in \mathbf{R}$ , 问  $a = ?$ ,  $b = ?$  这个问题, 我们用  $z_1$  与  $z_2$  的直接关系是不好解决的, 但是根据

$$x_1 + y_1 i = x_2 + y_2 i \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2 (x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbf{R})$$

可得

$$\begin{cases} a - 1 = 2009, \\ b + 2008 = 2010, \end{cases} \quad \leftarrow \text{实数问题}$$

这不就是“化虚为实”吗?!

又如, 设  $m \in \mathbf{R}$ , 问  $m$  为何值时, 以  $m - 1 + (m - 2)i$  的实部、虚部为坐标的点  $(m - 1, m - 2)$  位于第四象限? 本来虚数是不可以比较大小的, 而第四象限的点的横坐标大于零、纵坐标小于零, 这里的“ $>$ ”、“ $<$ ”是无法用“ $m - 1 + (m - 2)i$ ”进行表述的. 化虚为实:

$$\begin{cases} m - 1 > 0, \\ m - 2 < 0. \end{cases} \quad \leftarrow \text{实数问题}$$

再如, 研究  $bi$ , 只要研究  $b$  不就可以了么?

随着我们学习的步步深入, 类似于上述的问题何止成千上万? 本书于此寄希望于读者们同化、顺应“化虚为实”的观点.

### 2. 整体运用

分离  $z = a + bi$  中的  $a$  与  $b$  是“化虚为实”观点之精髓; 开辟  $a$  与  $b$  “连体”的全新理论, 则是“整体运用”与“纯实”和“纯虚”的不同之处.

如, 设  $z = a + bi$  与点  $Z(a, b)$  对应, 那么, 讨论  $z$  不就可以借鉴解析几何的理论进行吗? 点  $Z(a, b)$  的轨迹上的点的性质就可以完完全全地映射到  $z = a + bi$  上.

又如, 建立复数  $z = a + bi$  与向量  $\overrightarrow{OZ} = (a, b)$  的对应关系, 这时, 向量的理论不就有了新的“用武之地”了吗?

“整体运用”是一种观念, 有待于我们一点儿一点儿地去形成.




 典型例题导析

[例 11]  $a=0$  是复数  $a+bi(a, b \in \mathbf{R})$  为纯虚数的 ( )

- A. 必要条件                      B. 充分条件  
C. 充要条件                      D. 非必要非充分条件

[分析] 由复数的有关概念, 复数为纯虚数的条件为实部为零而虚部不为 0, 所以若  $a=0, b \in \mathbf{R}$ , 则  $b$  的值不能确定, 当  $b=0$  时,  $a+bi$  不是纯虚数, 所以  $a=0$  不是充分条件, 排除 B, 同时也排除 C. 反过来,  $a+bi$  若是纯虚数必有  $b \neq 0, b \in \mathbf{R}$ , 且  $a=0$ , 所以,  $a=0$  是复数  $a+bi(a, b \in \mathbf{R})$  为纯虚数的必要条件.

[解] 选 A.

[例 12] 设  $z = \log_2(1+m) + i \log_{\frac{1}{2}}(3-m) (m \in \mathbf{R})$ .

- (1) 若  $z$  是虚数, 求  $m$  的取值范围;  
(2) 若  $z$  在复平面内的对应点在第三象限, 求  $m$  的取值范围.

[解] (1) 因为  $z$  是虚数,

所以  $\log_{\frac{1}{2}}(3-m) \neq 0$ , 且  $1+m > 0$ , 即

$$\begin{cases} 3-m > 0, \\ 3-m \neq 1, \\ 1+m > 0, \end{cases}$$

解得  $m \in (-1, 2) \cup (2, 3)$ .

(2) 由题设知  $\begin{cases} \log_2(1+m) < 0, \\ \log_{\frac{1}{2}}(3-m) < 0, \end{cases}$  即  $\begin{cases} 1+m > 0, \\ 1+m < 1, \\ 3-m > 0, \\ 3-m > 1, \end{cases}$

解得  $m \in (-1, 0)$ .

[例 13] 设  $\sqrt{2x-1} + (y-1)i = y - \sqrt{x-1}i (x \geq 1, y \in \mathbf{R})$ , 求  $x+y$ .

[分析] 由复数相等的充要条件可得关于  $x$  与  $y$  的方程组, 解方程组后, 再求  $x+y$ .



[解] 由复数相等的条件,得  $\begin{cases} \sqrt{2x-1}=y, \\ y-1=-\sqrt{x-1}, \end{cases}$  解无理方程要验根

解这个方程组得

$$\begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$$

$\therefore x+y=2.$

[例 14] 设复数  $z = \log_2(x^2 - 3x - 3) + i\log_2(x - 3)$ , 当  $x$  为何实数时:

- (1) 复数  $z$  为纯虚数;
- (2) 在复平面上表示  $z$  的点位于第三象限;
- (3) 表示  $z$  的点在直线  $x - 2y + 1 = 0$  上.

[解] (1) 当  $\begin{cases} \log_2(x^2 - 3x - 3) = 0, \\ \log_2(x - 3) \neq 0 \end{cases}$  时,  $z$  为纯虚数.

由  $\begin{cases} x^2 - 3x - 3 = 1, \\ x - 3 > 0, \\ x - 3 \neq 1, \end{cases}$  得  $\begin{cases} x = 4 \text{ 或 } x = -1, \\ x > 3, \\ x \neq 4. \end{cases}$

当  $x = -1$  时,  $x - 3 = -4 < 0$  不合题意.

当  $x = 4$  时,  $\log_2(x - 3) = 0$  不合题意.

$\therefore$  复数  $z$  不可能是纯虚数.

(2) 由题意,得  $\begin{cases} \log_2(x^2 - 3x - 3) < 0, \\ \log_2(x - 3) < 0, \end{cases}$  解得  $\frac{3 + \sqrt{21}}{2} < x < 4$

$\therefore$  当  $\frac{3 + \sqrt{21}}{2} < x < 4$  时, 复数  $z$  在复平面上的对应点位于第三象限.

(3) 当复数  $z$  的实部、虚部满足直线的方程时, 表示  $z$  的点在直线上.

$\therefore \log_2(x^2 - 3x - 3) - 2\log_2(x - 3) + 1 = 0,$

即  $\log_2 2(x^2 - 3x - 3) = \log_2(x - 3)^2, x > 3,$

即  $\begin{cases} x^2 - 3x - 3 > 0, & \text{①} \\ x - 3 > 0, & \text{②} \\ 2(x^2 - 3x - 3) = (x - 3)^2. & \text{③} \end{cases}$

由③, 得  $x = \sqrt{15}$  或  $x = -\sqrt{15}$ .

依  $x > 3$  将  $x = -\sqrt{15}$  (舍去).

$\therefore x = \sqrt{15}$  满足①、②,

$\therefore$  当  $x = \sqrt{15}$  时, 复数  $z$  在复平面上的对应点在直线  $x - 2y + 1 = 0$  上.



**[例 15]** 关于  $x$  的方程  $3x^2 - \frac{a}{2}x - 1 = 10i - ix - 2ix^2$  有实数根, 求实数  $a$  的值.

**[分析]** 将实数根代入原方程, 运用复数相等的条件求解.

**[解]** 原方程整理, 得

$$\left(3x^2 - \frac{a}{2}x - 1\right) + (2x^2 + x - 10)i = 0.$$

设方程的实数根为  $x_0$ .

由复数相等的充要条件, 得

此处如果不设原方程的实根为  $x_0$ , 那么①、②都是复数方程

$$\begin{cases} 3x_0^2 - \frac{a}{2}x_0 - 1 = 0, & \text{①} \\ 2x_0^2 + x_0 - 10 = 0. & \text{②} \end{cases}$$

由②得  $x_0 = 2$  或  $x_0 = -\frac{5}{2}$ , 代入式①, 得

$$a = 11 \text{ 或 } a = -14\frac{1}{5}.$$

**[点评]** 注意此题不能这样解:

$\therefore$  方程有实根,

$$\begin{aligned} \therefore \Delta &= \left(i - \frac{a}{2}\right)^2 - 4(3+2i)[-(1+10i)] \\ &= \frac{a^2}{4} + 67 + (128-a)i \geq 0, \end{aligned}$$

$\therefore$  虚部为 0,  $a = 128$ .

原因是虚数不能比较大小, 今后凡涉及大小问题的概念、理论, 如: 与不等式、判别式等有关的问题, 都要在实数范围内进行大小的比较(实系数一元二次方程的根的判别式仍可使用).

**[例 16]** 已知关于  $x$  的二次方程  $x^2 + (2+i)x + 4ab + (2a-b)i = 0 (a, b \in \mathbf{R})$ .

- (1) 当方程有实根时, 求点  $(a, b)$  的轨迹;
- (2) 求方程的实数根的取值范围.

**[分析]** 把方程的实根  $\alpha$  代入后可得关于  $a, b, \alpha$  的方程组, 再消去  $\alpha$ , 可得  $(a, b)$  的轨迹.

**[解]** (1) 设方程的实根为  $\alpha$ , 则

$$\alpha^2 + (2+i)\alpha + 4ab + (2a-b)i = 0, (\alpha^2 + 2\alpha + 4ab) + (\alpha + 2a - b)i = 0.$$

根据复数相等的充要条件,得

$$\begin{cases} \alpha^2 + 2\alpha + 4ab = 0, \\ \alpha + 2a - b = 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \end{matrix}$$

由②得  $b - 2a = \alpha$ , 代入①得

代入法消参数

$$(b - 2a)^2 + 2(b - 2a) + 4ab = 0, (b + 1)^2 + (2a - 1)^2 = 2,$$

$$\frac{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}} + \frac{(b + 1)^2}{2} = 1.$$

$\therefore$  所求点的轨迹是以  $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$  为中心, 焦点为  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2} - 1\right)$ 、

$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2} - 1\right)$  的椭圆.

(2) 由②得  $b = \alpha + 2a$ , 代入①得

$$\alpha^2 + 2\alpha + 4a(\alpha + 2a) = 0,$$

$$8a^2 + 4a\alpha + (\alpha^2 + 2\alpha) = 0.$$

建立关于实数  $a$  的二次方程,  
 $a$  为实数, 可用  $\Delta$ , 重要!

$\therefore a \in \mathbf{R}$ ,

$$\Delta = 16a^2 - 32(\alpha^2 + 2\alpha) \geq 0,$$

解得  $-4 \leq \alpha \leq 0$ .

$\therefore$  方程实数根的取值范围是  $[-4, 0]$ .

### 思维拓展测试

1. 设  $z_1 = \cos\theta + i\sin 2\theta$ ,  $z_2 = \sqrt{3}\sin\theta + i\cos\theta$ ,  $z_1 = z_2$ , 求  $\theta$  的值.
2. 已知  $|z| + 2z = \frac{3-i}{1+i}$ , 且  $x^2 - z = 0$ ,  $z \in \mathbf{C}$ , 求  $x$ .
3. 已知  $\alpha, \beta$  是锐角三角形的两个内角, 判断复数  $z$  所对应的点  $Z$  落在第几象限内, 其中  $z = (\cos\beta - \sin\alpha) + i(\sin\beta - \cos\alpha)$ .
4. 非零复数  $a, b, c$  满足  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ , 求  $\frac{a+b-c}{a-b+c}$  的值.
5. 若  $t \in \mathbf{R}$ , 则复数  $z = \frac{1-t^2+2ti}{1+t^2}$  所对应的点组成的图形是 ( )
  - A. 单位圆
  - B. 单位圆除去  $(\pm 1, 0)$
  - C. 单位圆除去  $(1, 0)$
  - D. 单位圆除去  $(-1, 0)$
6. 设  $m, n \in \mathbf{Z}$ , 判断复数  $\frac{n-5}{m^2-3m+2} + (n^2-8n+15)i$  能否为纯虚数.
7. 设关于  $x$  的方程  $x^2 + (t^2 + 3t + tx)i = 0$  有纯虚数根, 求实数  $t$  的值.