目　录

CONTENTS

基 础 篇

第一章 四 边 形

1.1 平行四边形

1.1.1 平行四边形的性质

学习指导

[考纲要求]

平行四边形的概念和性质是初中几何的重要知识，是中考的必考内容.出题频率较高，考题多以选择、填空、计算、证明题的形式出现，预测今后中考除上述题型外，还会以应用题、开放题等形式出现.

[重点聚焦]

重点：1. 理解并掌握平行四边形的定义与性质，并能应用其进行简单的推理计算.

2. 掌握平行线间的距离处处相等这一结论，并能应用它解题.

难点：1. 能灵活运用平行四边形的性质进行相关的计算和证明.

2. 能运用平行四边形的性质解决有关实际生产、生活中的应用问题.

知识点精析与应用

知识点精析

1. 平行四边形的定义及表示方法

(1)平行四边形的定义：两组对边分别平行的四边形，叫做平行四边形.

[注意] ①只有一组对边平行的四边形一定不是平行四边形；

②定义给出了平行四边形的一个重要性质：两组对边分别平行.

(2)表示方法：平行四边形 $ABCD$，可记作“▱$ABCD$”，读作“平行四边形 $ABCD$”.

［注意］ 平行四边形的表示一定按顺时针或逆时针依次注明各顶点，如图 1-1-1，若写成“$\square ABDC$”或“$\square DACB$”等都是错误的.

（3）对角线：平行四边形不相邻的两个顶点连成的线段叫做它的对角线.

2. 平行四边形的性质

（1）平行四边形的对边相等；

（2）平行四边形的对角相等；

（3）平行四边形的对角线互相平分.

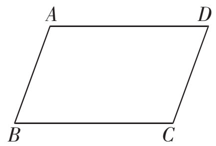


图 1-1-1

3. 平行线之间的距离及其特征

（1）定义：若两条直线互相平行，则其中一条直线上任意一点到另一条直线的距离，叫做这两条平行线之间的距离.

（2）特征：①平行线之间的距离处处相等；

②夹在两条平行线之间的平行线段相等.

［注意］ ①距离是指垂线段的长度，是正值.

②两条平行线的位置确定后，它的距离是定值，不随垂线段的位置改变而改变.

③平行线间的距离处处相等. 因此，在作平行四边形的高时，可根据需要灵活选择位置.

4. 平行四边形的面积

（1）平行四边形的面积等于它的底和这个底上的高的积.

［拓展］ 如图 1-1-2，$S_{\square ABCD}=BC\cdot AE=CD\cdot AF$，由此可得到启示，利用面积关系可建立多条线段之间的关系.

（2）同底（等底）同高（等高）的平行四边形面积相等.

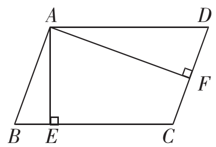


图 1-1-2

问题探究

课堂上，老师给出了如图 1-1-3 所示的$\square ABCD$，希望同学们能够发现图中所隐含的一些特征. 在同学们的自主学习、合作交流中，个个都露出了成功的喜悦笑容.

生 1：我发现了 $AB=CD$，$AD=BC$. 我的想法是：用剪刀裁剪出两个能够完全重合的平行四边形，在它们的对角线交点处钉一枚图钉，将其中一个平行四边形旋转 $180°$后，两个平行四边形能够再次重合，由此可以断定 $AB=CD$，$AD=BC$；

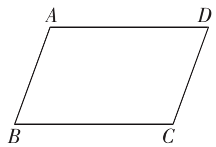


图 1-1-3

生 2：我发现$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，我的想法与刚才同学的想法一样，仍可用重合方法得到；

生 3：我认为 $AB=CD$，$BC=AD$，$\angle B=\angle D$，我的方法比他们的方法要简单得多. 我是直接连结 AC，再借助平行四边形的对边 $AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$，轻松证明

$\triangle ACD\cong\triangle CAB$，从而得到上述结论的.

……

一时间，教室里热闹非凡，同学们用自己的思考发现了更多的奥秘. 亲爱的读者，你的看法如何？不妨也与同伴交流一下吧！

解题方法指导

考查知识点：平行四边形内角之间关系的应用.

可能题型：填空、选择.

解题思路：根据图形的特点，从平行四边形的内角之间的内在关系来入手分析解题.

[例 1]　(2005・浙江杭州)如图 1-1-4，在▱$ABCD$ 中，$\angle B=110^\circ$，延长 AD 至 F，延长 CD 至 E，连结 EF，则

(1)$\angle E+\angle F=$　　　　(　　)

A. 110°　　B. 30°　　C. 50°　　D. 70°

(2)从平行四边形的一个锐角顶点向对边作两条高线，如果这两条高线的夹角为 135°，则这个平行四边形的内角的度数为______.

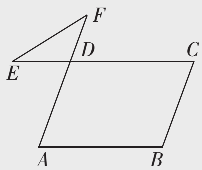


图 1-1-4

[分析]　对于(1)，要求$\angle E+\angle F$ 的度数，由图可知，只需求出$\angle EDF$ 的度数即可，从图中可看出$\angle EDF=\angle ADC$，再根据四边形 $ABCD$ 为平行四边形，得$\angle ADC=\angle B=110^\circ$，至此问题解决；而对于(2)，应先画出符合题意的图形，再根据四边形内角和定理、平行四边形对角相等、邻角互补等性质来解答.

[解答]　(1)选 D

理由：∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，∴ $\angle ADC=\angle B=110^\circ$，又∵ $\angle EDF=\angle ADC$，　这是平行四边形的性质之一，对角相等

∴ $\angle EDF=110^\circ$，而$\angle E+\angle F+\angle EDF=180^\circ$，∴ $\angle E+\angle F=70^\circ$；

(2)如图 1-1-5，从平行四边形 $ABCD$ 锐角顶点 D 向 AB、BC 作高 DE、DF，由$\angle EDF=135^\circ$，$\angle E=\angle F=90^\circ$，　作出符合题意的图形很重要

而$\angle B+\angle E+\angle EDF+\angle F=360^\circ$，∴ $\angle B=45^\circ$.

又∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $\angle ADC=\angle B=45^\circ$，

∵ $AD/\!/BC$，∴ $\angle B+\angle BAD=180^\circ$，∴ $\angle BAD=135^\circ$，而$\angle BCD=\angle BAD$，

∴ $\angle BCD=135^\circ$，即这个平行四边形的内角度数为 45°、135°、45°、135°.

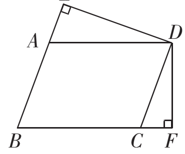


图 1-1-5

[总结]　通过本例可以看出，凡涉及平行四边形中内角度数的问题时，它的对角相等必定是解题的突破口，而邻角互补的结论，在解题中容易被忽视，恰当运用性质是求四边形内角度数的常用方法.

考查知识点：平行四边形边长及周长、面积的计算.

可能题型：填空、选择、解答题.

解题思路：从平行四边形的对边相等、两邻边之和等于其周长的一半以及面积公式入手来分析解题.

[例 2]　如图 1-1-6，$\square ABCD$ 的周长为 50 cm，对角线 AC、BD 相交于 O 点，且 $\triangle AOB$ 的周长比 $\triangle BOC$ 的周长多 7 cm，求这个平行四边形的各边长.

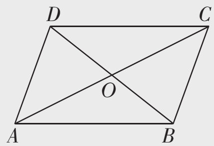


图 1-1-6

[分析]　由平行四边形对角线互相平分可知：$OA=OC$，$OB=OD$，故 $\triangle AOB$ 与 $\triangle BOC$ 的周长之差就是 AB 与 BC 之差了. 又知 $\square ABCD$ 的周长为 50 cm，从而可求出 $\square ABCD$ 的各边长.

[解答]　∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴ $AB=CD$，$AD=BC$，$OA=OC$，

又　$AB+BC+CD+AD=50$，

∴ $AB+BC=25$.　　①

又　$(OA+OB+AB)-(OB+OC+BC)=7$，

∴ $AB-BC=7$.　　②

由①、②可得

$AB=16$，$BC=9$.

建立关于平行四边形两邻边长的方程组是解这类题的关键

即 $\square ABCD$ 的各边长分别为 $AB=16$ cm，$BC=9$ cm，$CD=16$ cm，$AD=9$ cm.

[总结]　有关平行四边形的计算题，在解题时，除了要利用好平行四边形的性质，常常还要用到方程组的知识来帮助解决问题，请读者认真体会.

[例 3]　如图 1-1-7，在 $\square ABCD$ 中，$AE\perp BC$ 于 E，$AF\perp CD$ 于 F，且 $\angle EAF=60^\circ$，$BE=2$ cm，$DF=3$ cm，试求 $\square ABCD$ 的周长及 $\square ABCD$ 的面积.

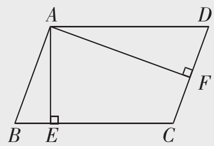


图 1-1-7

[分析] 从已知条件$\angle EAF=60°$，$AE\perp BC$，$AF\perp CD$，可得$\angle C=120°$，从而可知$\angle B=\angle D=60°$，所以$\angle BAE=\angle DAF=30°$，在直角三角形 ABE 和直角三角形 AFD 中，借助“30°角所对直角边等于斜边的一半”及勾股定理，可分别求出 AB、AD 之长和 AE、AF 之长，则问题获解.

[解答] ∵ $AE\perp BC$ 于 E，$AF\perp CD$ 于 F，

∴ $\angle AEC=\angle AFC=90°$，

在四边形 $AECF$ 中，又知$\angle EAF=60°$，

∴ $\angle C=360°-\angle AEC-\angle AFC-\angle EAF=120°$.

四边形的内角和为 360°

∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴ $AB/\!/CD$，$AD/\!/BC$，

∴ $\angle B+\angle C=180°$，$\angle D+\angle C=180°$.

∴ $\angle B=\angle D=60°$.

∴ $\angle BAE=\angle DAF=30°$.

∴ $AB=2BE=2\times2=4$ cm， 直角三角形中 30°角所对直角边等于斜边的一半

$AD=2DF=2\times3=6$ cm.

∴ $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ cm，

运用勾股定理求▱$ABCD$ 的高是常见的方法

$AF=\sqrt{AD^2-DF^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$ cm.

∴ ▱$ABCD$ 的周长$=2(AB+AD)=2\times(4+6)=20$ cm.

∴ $S_{▱ABCD}=BC\times AE=6\times2\sqrt{3}=12\sqrt{3}$ cm².

（或 $S_{▱ABCD}=CD\times AF=4\times3\sqrt{3}=12\sqrt{3}$ cm².）

[总结] 在解答平行四边形中线段和面积的计算问题时，常构造直角三角形、借助勾股定理来予以解决.

考查知识点：利用平行四边形的性质证明线段、角相等或其他证明问题.

可能题型：证明题（或说理题）.

解题思路：通常去证明两线段（或两角）所在的三角形全等.

[例 4] （2005·福建南安）如图 1-1-8，在▱$ABCD$ 中，点 E、F 在对角线 BD 上，且 $BE=DF$.

求证：$AE=CF$.

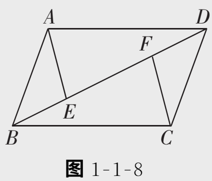


图 1-1-8

[分析]　观察图形可知，线段 AE 可放在 $\triangle ABE$ 或 $\triangle DAE$ 中，而线段 CF 在 $\triangle CDF$ 或 $\triangle BCF$ 中，只需证明 $\triangle ABE\cong\triangle CDF$（或 $\triangle DAE\cong\triangle BCF$）即可，这由平行四边形的性质很容易证得.

[证明]　∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB/\!/CD$，$AB=CD$.

∴ $\angle ABE=\angle CDF$.

在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle CDF$ 中，

$$\begin{cases}AB=CD,\\ \angle ABE=\angle CDF,\\ BE=DF,\end{cases}$$

∴ $\triangle ABE\cong\triangle CDF$(SAS)，

试试证明 $\triangle ADE\cong\triangle CBF$

∴ $AE=CF$.

[总结]　凡证明线段（或角）相等的问题时，要善于总结、归纳已知条件与相关性质的关系. 如本例涉及到边的问题，因此必定启用与边相关的性质，即“平行四边形的两组对边分别平行且相等”.

[例 5]　如图 1-1-9，在 $\square ABCD$ 中，过对角线 AC 的中点 O 的直线交 AD、CB 的延长线于 E、F. 试问：DE 与 BF 的大小关系如何？请证明你的结论.

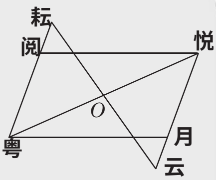


图 1-1-9

[分析]　可以猜想到 DE 与 BF 相等. 由于 O 为 AC 的中点，且 $AE/\!/CF$，易知 $\triangle AOE\cong\triangle COF$，从而 $AE=CF$，再借助 $AD=CB$ 可得出结论.

必须先写出猜想的结论

[解答]　$DE=BF$. 证明如下：

∵ O 为 AC 的中点，∴ $OA=OC$.

又 $AE/\!/CF$，∴ $\angle EAO=\angle FCO$.

故在 $\triangle AOE$ 与 $\triangle COF$ 中，

$$\begin{cases}\angle EAO=\angle FCO,\\ AO=CO,\\ \angle AOE=\angle COF（对顶角相等）,\end{cases}$$

∴ $\triangle AOE\cong\triangle COF$(ASA)，

可用 AAS 的方法证明 $\triangle AOE\cong\triangle COF$ 吗？

∴ $AE=CF$.

又∵ $AD=CB$(平行四边形的对边相等),

∴ $AE-AD=CF-CB$,即 $DE=BF$.

[总结]　通过本例可以发现:(1)证明线段相等的问题时,借助三角形全等的识别方法来获得是行之有效的一种思路;(2)过平行四边形对角线中点的直线如果与一组对边(或延长线)相交时,必然存在着更多相等的线段(如题中 $OE=OF$, $DE=BF$ 等).

基础达标演练

1. 在▱$ABCD$ 中,$\angle A=35°$,则 $\angle B=$______,$\angle C=$______.

2. 平行四边形的周长为 20 cm,一条对角线把它分成的两个三角形的周长都是 18 cm,则这条对角线长为______.

3. (2006·枣庄市课标卷)如图 1-1-10,在△MBN 中,$BM=6$,点 A、C、D 分别在 MB、BN、NM 上,四边形 $ABCD$ 为平行四边形,$\angle NDC=\angle MDA$,▱$ABCD$ 的周长是______.

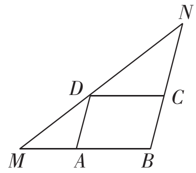


图 1-1-10

4. 在▱$ABCD$ 中,对角线 AC、BD 相交于点 O,且△AOD 的周长比△AOB 的周长小 3 cm,如果▱$ABCD$ 的周长为 22 cm,则 $AB=$______,$AD=$______.

5. 在▱$ABCD$ 中,$\angle A:\angle B:\angle C:\angle D$ 的值可能是　　(　　)

A. 1∶2∶3∶4　　B. 1∶2∶2∶1

C. 2∶1∶2∶1　　D. 2∶2∶1∶1

6. (2005·江苏苏州)如图 1-1-11,在▱$ABCD$ 中,下列各式不一定正确的是　　(　　)

A. $\angle 1+\angle 2=180°$　　B. $\angle 2+\angle 3=180°$

C. $\angle 3+\angle 4=180°$　　D. $\angle 2+\angle 4=180°$

7. (2005·山东东营)如图 1-1-12,在▱$ABCD$ 中,对角线 AC、BD 交于点 O,将△AOD 平移至△BEC 的位置,则图中与 OA 相等的线段有　　(　　)

A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 4 条

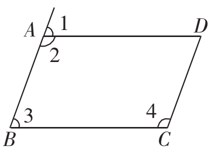


图 1-1-11

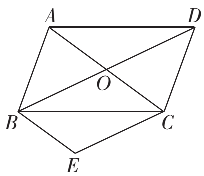


图 1-1-12

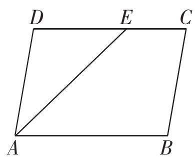


图 1-1-13

8. (2004・绍兴市)如图 1-1-13,▱$ABCD$ 中,AE 平分$\angle DAB$,$\angle B=100^\circ$,则$\angle DAE$ 等于 (　　)

A. 100°　　B. 80°　　C. 60°　　D. 40°

9. 如图 1-1-14,点 E 是▱$ABCD$ 内任一点,若 $S_{\square ABCD}=6\ \text{cm}^2$,则图中阴影部分的面积为 (　　)

A. $5\ \text{cm}^2$　　B. $4\ \text{cm}^2$　　C. $3\ \text{cm}^2$　　D. 以上都不对

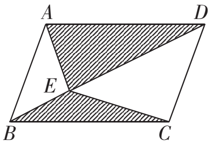


图 1-1-14

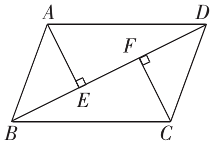


图 1-1-15

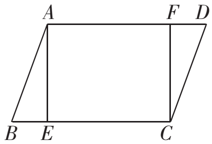


图 1-1-16

10. (2005・重庆市)如图 1-1-15,在▱$ABCD$ 中,$AE\perp BD$,$CF\perp BD$,垂足分别为 E、F,

求证:$\angle BAE=\angle DCF$.

11. (2005・江苏无锡)如图 1-1-16,在▱$ABCD$ 中,E、F 分别是 BC、AD 边上的点,且 $BE=DF$.

求证:$AE=CF$.

12. (2005・山西临汾)如图 1-1-17,已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形,E、F 分别是 AB、CD 的中点,AF、CE 分别交 BD 于 G、H.

(1)写出图中三对你认为全等的三角形;

(2)选择其中一对全等三角形进行证明.

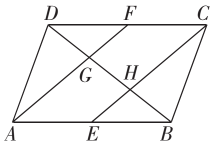


图 1-1-17

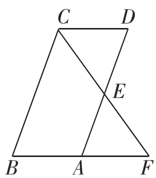


图 1-1-18

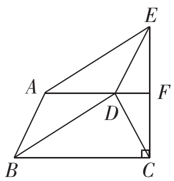


图 1-1-19

13. (2005・山东济南)如图 1-1-18,在▱$ABCD$ 中,E 为 AD 的中点,CE 的延长线交 BA 的延长线于点 F.

(1)求证:$CD=FA$;

(2)若使$\angle F=\angle BCF$,▱$ABCD$ 的边长之间还需再添加一个什么条件?请你补上这个条件,并进行证明(不要再增添辅助线).

14. 如图 1-1-19,是某城市部分街道示意图,$AF\parallel BC$,$EC\perp BC$,$BA\parallel DE$,

$BD /\!/ AE$. 甲、乙两人同时从 B 站乘车到 F 站，甲乘 1 路车，路线是 $B \to A \to E \to F$；乙乘 2 路车，路线是 $B \to D \to C \to F$. 假设两车速度相同，途中耽误时间相同，那么谁先到达 F 站？请说明理由.

答案与提示

1. $145°$；$35°$　提示：由▱$ABCD$，得 $\angle A=\angle C$，$\angle A+\angle B=180°$.

2. 8 cm　提示：可用两个三角形周长之和减去平行四边形的周长，它恰为该对角线长的 2 倍.

3. 12　提示：由四边形 $ABCD$ 为平行四边形，得 $CD \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} AB$，知 $\angle NDC=\angle M$，又 $\angle NDA=\angle MDA$，有 $\angle M=\angle MDA$，得 $AD=AM$，由此得▱$ABCD$ 周长是 12.

4. 7 cm；4 cm　提示：由题意，应有 $AB-AD=3$ cm，$AB+AD=11$ cm，由此可得 AB、AD.

5. C　提示：可由平行四边形的对角相等来作出判断.

6. D　提示：根据平行四边形对角相等，可知 D 不正确.

7. B　提示：由平移的性质知，平移不会改变图形的形状和大小，从而观察可得出结论.

8. D　提示：由▱$ABCD$ 知，$\angle B+\angle BAD=180°$，再由 AE 平分 $\angle DAB$ 即可解决.

9. C　提示：过点 E 作直线 $MN /\!/ BC$，作直线 $GH /\!/ AB$，把原四边形 $ABCD$ 分成 8 个小三角形，再观察它们每两个之间面积的关系即可解决.

10. ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $AB /\!/ CD$，$AB=CD$，∴ $\angle ABE=\angle CDF$，又 $AE \perp BD$ 于 E，$CF \perp BD$ 于 F，∴ $\angle BEA=\angle DFC=90°$，易证 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$(AAS)，∴ $\angle BAE=\angle DCF$.

11. 由▱$ABCD$ 知，$AB=CD$，$\angle B=\angle D$，又 $BE=DF$，从而 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$(SAS)，∴ $AE=CF$.

12. (1) 图中全等三角形有：$\triangle ABD \cong \triangle CDB$、$\triangle BAG \cong \triangle DCH$、$\triangle EBH \cong \triangle FDG$、$\triangle ADG \cong \triangle CBH$、$\triangle ADF \cong \triangle CBE$；

(2) 答案不唯一. 如：证明 $\triangle ABD \cong \triangle CDB$. ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $AB=CD$，$AD=CB$，在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CDB$ 中，$\begin{cases} AB=CD, \\ AD=CB, \\ BD=BD, \end{cases}$ ∴ $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.

13. (1) ∵ 四边形是平行四边形，∴ $CD /\!/ BF$，∴ $\angle F=\angle DCE$，$\angle FAE=$

$\angle D$，∵ $ED=EA$，∴ $\triangle DCE\cong\triangle AFE$，∴ $CD=FA$；

(2)在▱$ABCD$ 中，只要 $BC=2AB$，就能使 $\angle F=\angle BCF$. 证明：∵ $AB=CD=FA$，$BC=2AB$，∴ $BC=AB+AF=BF$，∴ $\angle F=\angle BCF$.

14. 同时到达. 理由：∵ $BA\parallel DE$，$BD\parallel AE$，∴ 四边形 $ABDE$ 是平行四边形(平行四边形的定义)，∴ $AB=DE$，$BD=AE$　①，且 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle DEA}$. ∵ $AF\parallel BC$，$EC\perp BC$，∴ $EC\perp AF$，∴ EF 为$\triangle ADE$ 边 AD 上的高，CF 为$\triangle ABD$ 边 AD 上的高，∴ $EF=CF$　②，∴ AF 为 EC 的垂直平分线，∴ $DC=DE$，故 $DC=AB$　③，由①、②、③，得 $BA+AE+EF=BD+DC+CF$，故同时到达.

视野拓展

难点指津

平行四边形的概念和性质是中考的必考内容，在学习和应用时，常出现下列问题：

1. 以偏概全，出现漏解. 这类问题常由于题中没有给出图形，解题时，思考不周全而导致. 在解这种题型时，一定要依题意画好图形，考虑可能出现的情形，认真分析，即可防止出错.

[例]　平行四边形的一角的平分线分对边为 3 和 4 两部分，求平行四边形的周长.

错解：如图 1-1-20，∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $AB\parallel CD$，∴ $\angle 2=\angle 3$，又 AE 是 $\angle BAD$ 的平分线，∴ $\angle 1=\angle 2$，∴ $\angle 1=\angle 3$，∴ $AD=DE=3$，∴ ▱$ABCD$ 的周长$=AD+AB+BC+CD=3+7+3+7=20$.

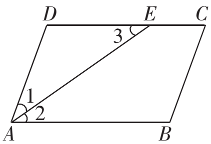


图 1-1-20

错解原因：解题时只看到两部分，但没有弄清哪一部分为 3，哪一部分为 4，忽略了多解的情况.

正确解法：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $AB\parallel CD$，∴ $\angle 2=\angle 3$，又 AE 平分$\angle BAD$，∴ $\angle 1=\angle 2$，∴ $\angle 1=\angle 3$，∴ $AD=DE$. 当 $AD=DE=3$ 时，▱$ABCD$ 的周长$=AD+AB+BC+CD=3+7+3+7=20$；当 $AD=DE=4$ 时，▱$ABCD$ 的周长$=AD+AB+BC+CD=4+7+4+7=22$.

2. 学习平行四边形的面积公式和同底(或等底)同高(或等高)的平行四边形面积相等这些知识时，还不能很好地利用等积变换来解题，而这类题往往与三角形的面积联系在一起，观察图形、善于转化是解决有关面积问题的关键

综 合 延 伸

题型一:探索题

解题思路:根据已知条件,结合图形特点,经过探索、归纳、猜想,然后对其猜想进行证明.

[例 6] 如图 1-1-21,在▱$ABCD$ 中,AQ、BN、CN、DQ 分别是$\angle DAB$、$\angle ABC$、$\angle BCD$、$\angle CDA$ 的平分线,AQ 与 BN 交于 P,DQ 与 CN 交于 M.在不添加其他条件的情况下,试写出一个由上述条件推出来的结论,并给出证明过程(要求推理过程中要用到“平行四边形”和“角平分线”这两个条件).

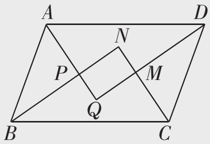


图 1-1-21

[分析] 这是一道结论探索性问题,它要求答题者开动脑筋,将已知条件和图形特点及探求的要求联系起来,寻找出最适合自己证明的结论,同时应兼顾“平行四边形”及“角平分线”的应用,根据本题条件及图形特征,可得到$AQ\perp BN$或$AQ\perp DQ$、$\triangle APB\cong\triangle CMD$ 等多个结论.

[解答] 由已知条件可得出 $AQ\perp DQ$. 应先写出探索出的结论啊

证明如下:

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AB/\!/CD$.

∴ $\angle BAD+\angle ADC=180^\circ$.

又∵ AQ、DQ 分别平分$\angle BAD$、$\angle ADC$,

∴ $\angle QAD=\frac{1}{2}\angle BAD$,$\angle QDA=\frac{1}{2}\angle ADC$.

∴ $\angle QAD+\angle QDA=\frac{1}{2}\angle BAD+\frac{1}{2}\angle ADC=90^\circ$.

∴ $\angle AQD=90^\circ$, 由三角形内角和定理获得

∴ $AQ\perp DQ$.

[总结] 对于结论探索性问题的解题,一般规律是:从所给条件出发,探索、归纳、猜想出结论,然后对猜想出的结论进行论证.这类题目的答案多不唯一,在众多符合要求的结论中,尽量选择自己熟悉,能轻松获得论证的结论为好.

题型二:应用题

解题思路:先将实际问题抽象成几何图形,再利用几何知识去求解.

[例 7]　“宏运”物流公司在收取了一客户 2600 元运费后，需将货物从 A 地济南发出，分别运到 B 地郑州，C 地武汉，D 地合肥，最后回到济南，所走路线如图 1-1-22 所示，已知四边形 $ABCD$ 可近似地看成平行四边形，当司机驾车从济南赶到郑州时，发现里程表显示跑了 375 km，从郑州到武汉时，发现比从济南到郑州的路程多 125 km. 若该车每 100 km 平均耗油 14 L，每升汽油3.8 元，车辆磨损和司机工资，以及上路费等共计 800 元，那么该公司这一次出车是盈利还是亏损？若盈利能盈多少？若亏损会亏多少？

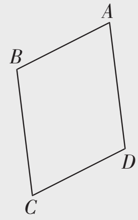


图 1-1-22

[分析]　要判断该公司这次出车是盈利还是亏损，必先求出总的花费. 由于每 100 km 的耗油量已知，因此需先求总的里程，因此只需求出平行四边形的周长即可，而由平行四边形性质知对边相等，故只需求出其一组邻边之长问题即可解决.

[解答]　由题意知 $AB=375$.

$\because$ $BC=AB+125$，

$\therefore$ $BC=375+125=500$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

$\therefore$ $AB=CD$，$BC=AD$，

$\therefore$ $\square ABCD$ 的周长为：$2(BC+AB)=2(375+500)=1750$.

$\therefore$ 总共耗油量为：$1750\times\frac{14}{100}=245(\text{L})$.

知道为什么乘以$\frac{14}{100}$吗？

$\therefore$ 耗油的总费用为 $245\times3.8=931$(元).

$\therefore$ 这一次所花总费用为 $931+800=1731$(元)，

$\because$ $1731<2600$，

$\therefore$ 该公司盈利，盈利为 $2600-1731=869$(元).

[总结]　解几何应用题的技巧在于转化，把实际问题转化为数学模型，利用数学的相关知识通过计算或证明来达到解决问题的目的. 本题主要是运用平行四边形的对边相等这一性质求出总里程，进而求出所花总费用，然后和支付运费 2600 比较. 在求解时注意题目中告诉我们的是 100 km 耗油 14 L，而不是每 1 km 耗油 14 L.

题型三：综合探究题

解题思路：这类题的特点是题中反映出来的知识点较多，解题时，应在众多的

知识点中，寻找出解决问题的关键所在，要善于联想，找准切入点.

[例 8]　(2005·陕西省)已知：直线 $a/\!/b$，P、Q 是直线 a 上的两点，M、N 是直线 b 上的两点.

(1)如图 1-1-23，线段 PM、QN 夹在平行直线 a 和 b 之间，四边形 $PMNQ$ 是等腰梯形，其两腰 $PM=QN$.

请你参照图 1-1-23，在图 1-1-24 中画出异于图 1-1-23 的一种图形，使夹在平行线 a 和 b 之间的两条线段相等；

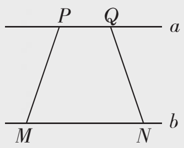


图 1-1-23

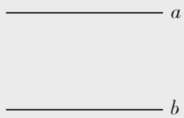


图 1-1-24

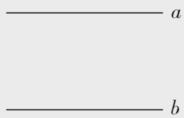


图 1-1-25

(2)我们继续探究，发现用两条平行线 a、b 去截一些我们学过的图形，会有两条“曲线段相等”(曲线上两点和它们之间的部分叫做“曲线段”. 把经过全等变换后能重合的两条曲线段叫做“相等曲线段”).

请你在图 1-1-25 中画出一种图形，使夹在平行线 a 和 b 之间的两条曲线段相等.

[分析]　我们知道，夹在两条平行线间的平行线段相等，因而可轻松获得(1)的图形. 而要使夹在两条平行线间的曲线段相等，则需要我们从所了解过的几何图形中发现曲线段的情形，此时圆是最佳选择.

[解答]　(1)符合题设要求的直线段可画出许多，如图 1-1-26 所示就是一例；

(2)符合题设要求的相等曲线段也可画出许多，如图 1-1-27 所示.

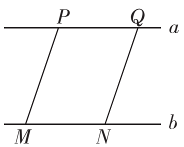


图 1-1-26

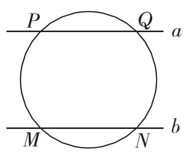
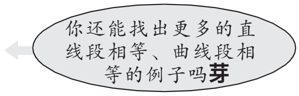


图 1-1-27



[总结]　解这类题，首先要认真读题，从题中所给的条件(或范例)出发，联想已学知识，来进行分析、思考，如本例范例中给出的图形是等腰梯形，而想到平行线间的平行线段相等，将图形变为平行四边形的形状，问题(1)就轻松获解.

思维拓展测试

1. 如图 1-1-28，在▱$ABCD$ 中，E、F 是对角线 BD 上两点，要使△ADF≌△CBE，还需添加一个条件是______（只需写出一种即可）.

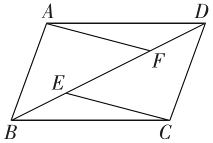
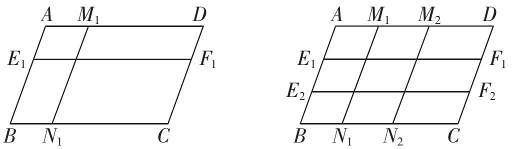


图 1-1-28

2.（1）如图 1-1-29（1），在▱$ABCD$ 中，$E_1F_1 \parallel AD$，$M_1N_1 \parallel AB$，那么图中共有______个平行四边形；

（2）如图 1-1-29（2），在▱$ABCD$ 中，又有 $E_2F_2 \parallel AD$，$M_2N_2 \parallel AB$，那么图中共有______个平行四边形；

（3）一般地，在▱$ABCD$ 中，如果有 $E_1F_1 \parallel AD$，$E_2F_2 \parallel AD$，…，$E_nF_n \parallel AD$，$M_1N_1 \parallel AB$，$M_2N_2 \parallel AB$，…，$M_nN_n \parallel AB$，你能猜测出图中共有多少个平行四边形吗？说说你的理由.



(1)　(2)

图 1-1-29

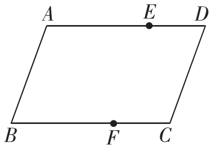
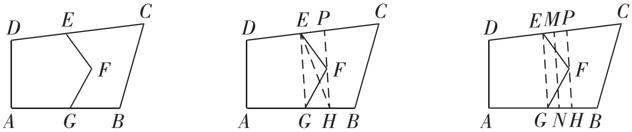


图 1-1-30

3. 如图 1-1-30，在▱$ABCD$ 中，E、F 分别是边 AD、BC 上的点，请你自行规定 E、F 在边 AD、BC 上的位置，然后补充题设，提出结论并证明（要求：至少编出两个正确命题，且补充题设不能相同）.

4. 如图 1-1-31(1)所示，$ABCD$ 是一块四边形土地示意图，其中 $AD \neq BC$，EFG 是流经这块土地的水渠（水渠的宽度不计），水渠左边属于张庄的土地，水渠右边属于李庄的土地. 现乡政府决定在田块规划中需将流经这块土地的水渠取直，并且要求张、李两庄的原土地面积不变，现有两个设计方案：



(1)　(2)　(3)

图 1-1-31

方案甲：如图 1-1-31(2)所示，连结 EG，过 F 作 EG 的平行线 PH，分别交 DC 于 P，交 AB 于 H，连 EH（或 PG），则 EH（或 PG）为新水渠.

方案乙：如图1-1-31(3)所示，连结EG，过F作EG的平行线PH，分别交DC于P，交AB于H，取EP的中点M，取GH的中点N，连结MN，则MN为新水渠.

请你判断哪种方案正确，并说明它的正确性.

5.(2005·绵阳)如图1-1-32，在平行四边形$ABCD$中，$AD=4$ cm，$\angle A=60°$，$BD\perp AD$，一动点P从A出发以每秒1 cm的速度沿$A\to B\to C$的路线匀速运动，过点P作直线PM，使$PM\perp AD$于点E.

(1)当点P运动2秒时，设直线PM与AD相交于点E，求$\triangle APE$的面积；

(2)当点P运动2秒时，另一动点Q也从A出发沿$A\to B\to C$的路线运动，且在AB上以每秒1 cm的速度匀速运动，在BC上以每秒2 cm的速度匀速运动.过Q作直线QN，使$QN\parallel PM$.设点Q运动的时间为t秒$(0\leqslant t\leqslant 10)$，直线$PM$与$QN$截平行四边形$ABCD$所得图形的面积为$S$ cm²，试用t的代数式表示S.

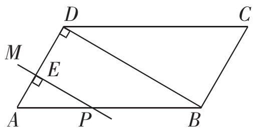


图1-1-32

答案与提示

1.$BE=DF$或$BF=DE$或$\angle BCE=\angle DAF$或$AF\parallel EC$等

2.(1)9　(2)36　(3)$[1+2+3+\cdots+(n+1)]^2=\dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$；理由：由(1)知，$AD$边上共有$AM_1$，$DM_1$，$AD$三条线段，在$AB$边上同样有三条线段，即$n=1$时，有9个平行四边形；由(2)知，在边$AD$上有6条线段，在$AB$边上也有6条线段，它们恰好为$1+2+3$，故共有$(1+2+3)^2$个平行四边形，即共有36个平行四边形；故当在$AD$边上有$M_1,M_2,\cdots,M_n$时，共有$[1+2+3+\cdots+(n+1)]$条线段，同样$AB$边上有$E_1,E_2,\cdots,E_n$时，也有$[1+2+3+\cdots+(n+1)]$条线段，故应共有$[1+2+3+\cdots+(n+1)]^2$个平行四边形，即$\dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$个平行四边形.

3.(1)取$AE=CF$，如图(1)所示，从而可得$BE=DF$(或$BE\parallel DF$)，证明过程略；

(2)取$AE=BF$，可得结论四边形$ABFE$(或$FCDE$)是平行四边形，证明略.

4.方案甲正确.理由：根据设计方案可知，$PH\parallel EG$.

∵ 平行线PH与EG之间的距离处处相等，可设为h，

∴ $S_{\triangle EFG}=\dfrac{1}{2}EG\cdot h$，$S_{\triangle EHG}=\dfrac{1}{2}EG\cdot h$，