
图书在版编目(CIP)数据

中学教材全面讲解:人教A版.高中数学.1:必修/李艳飞主编.—长春:吉林人民出版社,2007.4

(零失误)

ISBN 978 - 7 - 206 - 05242 - 2

I. 中…II. 李…III. 数学课—高中—教学参考资料IV. G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第046271号

策 划:吉林人民出版社综合编辑部策划室

执行策划:唐晓明 曲 喆

零失误·中学教材全面讲解·高中数学必修1(配人教A版新课标)

吉林人民出版社出版发行(中国·长春人民大街7548号 邮政编码:130022)

网址:www.zgjf.com.cn 电话:0431-85378008

主 编 李艳飞

本册主编 王青春 战秀梅

责任编辑 张长平 王胜利

封面设计 薛雯丹 蒋 津

责任校对 刘丽名 张 莹

版式设计 邢 程

印刷:北京市梓耕印刷有限公司

开本:880×1230 1/32

印张:257.5 字数:9000千字

标准书号:ISBN 978 - 7 - 206 - 05242 - 2

2007年7月第1版 2007年7月第1次印刷

全套定价:347.00元

如发现印装质量问题,影响阅读,请与印刷厂联系调换。联系电话:(010)89579201

2.2 对数函数

2.2.1 对数与对数运算

有效预习能力

..... 课前预习

1 相关知识回顾

指数函数 $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$); 指数式, 例如 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $5^{\sqrt{3}}$, $\sqrt[3]{(a-b)^2}$; 指数不等式, 例如 $3^x>3^y\Leftrightarrow x>y$; $\left(\frac{1}{3}\right)^x>\left(\frac{1}{3}\right)^y\Leftrightarrow x<y$; 指数方程, 例如 $3^x=9\Leftrightarrow 3^x=3^2\Leftrightarrow x=2$; $\left(\frac{1}{2}\right)^x=64\Leftrightarrow 2^{-x}=2^6\Leftrightarrow x=-6$.

2 预习指南



预习关键词	预习指标	预习检测
对数的概念	(1)理解对数的概念. (2)掌握指、对数之间的互化. (3)了解两种特殊类型的对数, 常用对数和自然对数.	1. 对数式 $\log_2 16 = 4$ 化为指数式为 _____.
对数的基本性质	(1)掌握底的对数及1的对数. (2)掌握对数恒等式及简单应用. (3)了解零和负数没有对数.	2. (1) $\log_a 1$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) = _____; (2) $2^{\log_2 7}$ = _____.
对数的运算性质	(1)掌握对数的运算性质. (2)能利用对数的性质进行计算.	3. 若 $a>0$ 且 $a\neq 1$, $M>0$, $N>0$, 则 $\log_a (MN) = \log_a M$ _____ $\log_a N$; $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M$ _____ $\log_a N$; $\log_a M^n =$ _____ ($n\in\mathbf{R}$).
对数的换底公式	(1)掌握对数的换底公式. (2)灵活运用换底公式进行对数的计算.	4. 将下列对数化成常用对数的形式: (1) $\log_4 25 =$ _____; (2) $\log_2 \frac{15}{8} =$ _____.

3 预习效果反馈

1. $2^4 = 16$ 2. (1) 0 (2) 7 3. $+$ $-$ $n \log_a M$ 4. (1) $\frac{\lg 5}{\lg 2}$ (2) $\frac{\lg 15}{\lg 2} - 3$

预习遗留问题:



035-1 对数的概念

一般地,如果 $a^b = N (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$, 那么数 b 叫做以 a 为底 N 的对数,记作 $b = \log_a N$, 其中 a 叫做对数的底数, N 叫做真数.

记忆要点

$x = \log_a N$, x 是以 a 为底 N 的对数.

推敲·诠释 若 $a < 0$, 则 N 为某些值时, b 不存在, 如 $b = \log_{-2} 8$ 不存在; 若 $a = 0$, N 不为 0 时, b 不存在, $\log_0 2$ 不存在; N 为 0 时, b 可以是任意正数, 是不唯一的, 即 $\log_0 0$ 有无数个值; 若 $a = 1$, N 不为 1, b 不存在, 如 $\log_1 3$ 不存在; N 为 1 时, b 可以为任何数, 是不唯一的, 即 $\log_1 1$ 有无数多个值. 因此规定 $a > 0$ 且 $a \neq 1$. 要记住此范围.

由于正数的任何次幂都是正数, 即 $a^b > 0 (a > 0)$, 所以 $N = a^b > 0$; 在规定了 $a > 0$ 且 $a \neq 1, N > 0$ 后, 对数 $\log_a N$ 唯一确定, 此时 $a^b = N \Leftrightarrow b = \log_a N$.

拓展·迁移 (1) 通常将以 10 为底的对数叫常用对数, 简记为 $\lg N$; 将以 e 为底的对数叫做自然对数, 简记为 $\ln N$, 其中 e 为无理数且 $e = 2.71828 \dots$.

(2) 对数式与指数式之间的关系如下表:

	式子	名称		
		a	b	N
指数式	$a^b = N$	底数	指数	幂
对数式	$\log_a N = b$	底数	对数	真数

例1 将下列指数式写成对数式.

(1) $2^{10} = 1024$; (2) $10^{-3} = \frac{1}{1000}$; (3) $0.3^3 = 0.027$; (4) $e^0 = 1$.

【点拨】 由于 $\log_a N = b$ 与 $a^b = N (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1, N > 0)$ 是等价的, 表示 a, b, N 三者之间的同一种关系, 通过等价性可将指数式问题化为代数式问题.

解: (1) $\log_2 1024 = 10$. (2) $\log_{10} \frac{1}{1000} = -3$. (3) $\log_{0.3} 0.027 = 3$. (4) $\log_e 1 = 0$.

【针对性训练】 见 173 页

1. 1000 的常用对数记为 a , e 的自然对数记为 b , 则 a, b 的大小关系是 ()

- A. $a > b$ B. $a < b$
C. $a \leq b$ D. 不能确定

【例2】 求下列各式中 x 的取值范围.

- (1) $\log_{(x-1)}(x+2)$;
(2) $\log_{(1-2x)}(3x+2)$;
(3) $\log_{(x+1)}(x-1)^2$.

【点拨】 在 $\log_a N = b$ 中, 必须 $a > 0, a \neq 1, N > 0$, 由此可以列出不等式组, 求出字母的取值范围.

$$\text{解: (1) 令 } \begin{cases} x-1 > 0, \\ x-1 \neq 1, \\ x+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x \neq 2, \\ x > -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

故 x 的取值范围是 $x > 1$ 且 $x \neq 2$.

$$(2) \text{ 令 } \begin{cases} 1-2x > 0, \\ 1-2x \neq 1, \\ 3x+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2}, \\ x \neq 0, \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3} < x < \frac{1}{2}, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

故 x 的取值范围是 $-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{2}$ 且 $x \neq 0$.

$$(3) \text{ 令 } \begin{cases} x+1 > 0, \\ x+1 \neq 1, \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0, \\ x \neq 1. \end{cases} \text{ 故 } x \text{ 的取值范围是 } x > -1 \text{ 且 } x \neq 0, x \neq 1.$$

【针对性训练】 见 173 页

2. 在 $b = \log_{(a-2)}(5-a)$ 中, 实数 a 的取值范围是 ()

- A. $a > 5$ 或 $a < 2$ B. $2 < a < 5$
C. $2 < a < 3$ 或 $3 < a < 5$ D. $3 < a < 4$

036-2 对数的基本性质

由对数的定义, 可得如下性质:

- (1) 负数和零没有对数.
(2) 1 的对数是 0, 即 $\log_a 1 = 0$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).
(3) 底数的对数是 1, 即 $\log_a a = 1$ ($a > 0$ 且

$a \neq 1$).

(4) 对数恒等式 $a^{\log_a N} = N$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$). 因为由 $b = \log_a N$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 可得 $a^b = N$, 所以将 $b = \log_a N$ 代入上式可得 $a^{\log_a N} = N$.

(5) $\log_a a^b = b$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$). 因为 $a^b = N \Leftrightarrow \log_a N = b$, 所以 $\log_a a^b = b$ ($a > 0$ 且

易错点扫描

(1) 底数、真数的范围限定不准确或不全面导致求解出错. (2) 解不等式组时, 解集确定不准确.

易错点警示

(1) 对数 $\log_a N = b$ 中, 限定条件为 $a > 0, a \neq 1, N > 0$. (2) 不等式组的解集是各个不等式的解的交集.

$a \neq 1$).

推敲·诠释 利用对数的基本性质时,要注意其成立的前提条件.要记清性质的具体内容,防止应用时出现错误.

- 例3** (1) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{3} =$ _____;
 (2) 若 $\log_2 [\log_3 (\log_5 x)] = 0$, 则 $x =$ _____;
 (3) $\log_{2.5} 6.25 + \lg \frac{1}{100} + \ln \sqrt{e} + 2^{1+\log_2 3} =$ _____.

【点拨】 对第(1)小题,先把对数式化为指数式,再用指数函数的性质求解.对第(2)小题,可将整个等式看作一个对数式,则此对数式是以2为底, $\log_3 (\log_5 x)$ 为真数的对数等于0,再将对数式转化为指数式来解.对第(3)小题,应用对数的定义及基本性质求解即可. (1) 令 $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{3} = b$, 则 $(\frac{1}{3})^b = \sqrt[3]{3}$, 即 $(\frac{1}{3})^b = 3^{\frac{1}{3}} = (\frac{1}{3})^{-\frac{1}{3}}$, 所以 $b = -\frac{1}{3}$. (2) 令 $\log_3 (\log_5 x) = t_1$, 则原式可化为 $\log_2 t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 2^0 = 1$, 所以 $\log_3 (\log_5 x) = 1$, 再令 $\log_5 x = t_2$, 则 $\log_3 t_2 = 1$, 所以 $3^1 = t_2$, 故 $\log_5 x = 3$, 所以 $x = 5^3 = 125$. (3) 原式 $= \log_{2.5} 2.5^2 + \lg 10^{-2} + \ln e^{\frac{1}{2}} + 2 \times 2^{\log_2 3} = 2 + (-2) + \frac{1}{2} + 2 \times 3 = \frac{13}{2}$.

【答案】 (1) $-\frac{1}{3}$ (2) 125 (3) $\frac{13}{2}$

针对性训练 见 173 页

3. 已知 $\log_7 [\log_3 (\log_2 x)] = 0$, 那么 $x^{-\frac{1}{2}}$ 等于 ()
 A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ C. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ D. $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

170

037-3 对数的运算性质

若 $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$, 则有下列性质:

- (1) $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$.
 (2) $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$.
 (3) $\log_a M^n = n \log_a M (n \in \mathbf{R})$.

记忆要点 积变加; 商变减; 幂变乘.

推敲·诠释 对数运算可看作指数运算的逆运算, 对数运算性质的证明, 可利用定义将对数问题转化为指数问题, 利用指数的性质进行证明. 运用对数运算的法则时, 要注意各个字母的取值范围, 只有等式两边都有意义时, 等式才成立.

例4 (1) 已知 $a = \log_3 2, 3^b = 5$, 用 a, b 表示 $\log_3 \sqrt{30}$;

(2) 已知 $3^{2x} = 6^6, 4^{3y} = 6^6$, 求 $\frac{3}{x} + \frac{1}{y}$ 的值.

【点拨】 正确地运用对数的运算性质求解是解决此题的关键.

解: (1) 由 $3^b = 5$ 得, $\log_3 5 = b$,

所以 $\log_3 \sqrt{30} = \frac{1}{2} \log_3 (3 \times 2 \times 5) = \frac{1}{2} (\log_3 3 + \log_3 2 + \log_3 5) = \frac{1}{2} (1 + a + b)$.

(2) 因为 $3^{2x} = 6^6$, 所以 $\log_3 3^{2x} = \log_3 6^6$,

即 $2x = 6(1 + \log_3 2)$, $\log_3 2 = \frac{x}{3} - 1$,

因为 $4^{3y} = 6^6$, 所以 $6y \log_3 2 = 6(1 + \log_3 2)$, 所以 $y\left(\frac{x}{3} - 1\right) = 1 + \frac{x}{3} - 1$,

所以 $xy = x + 3y$, 所以 $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 1$.

【针对性训练】 见 173 页

4. 若 $2^{6x} = 3^{3y} = 6^{2z}$, 求证 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{3}{z}$.

【例5】 求下列各式的值.

$$(1) \log_5 35 + 2\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} - \log_5 \frac{1}{50} - \log_5 14;$$

$$(2) (\lg 2)^3 + (\lg 5)^3 + 3\lg 2 \cdot \lg 5;$$

$$(3) [(1 - \log_6 3)^2 + \log_6 2 \cdot \log_6 18] \div \log_6 4.$$

【点拨】 利用对数的运算性质求解即可.

$$\text{解: (1) 原式} = \log_5 \frac{35 \times 50}{14} + 2\log_{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}} = \log_5 5^3 - 1 = 2.$$

$$\begin{aligned} (2) \text{原式} &= (\lg 2 + \lg 5)[(\lg 2)^2 - \lg 2 \cdot \lg 5 + (\lg 5)^2] + 3\lg 2 \cdot \lg 5 \\ &= (\lg 2)^2 + (\lg 5)^2 + 2\lg 2 \cdot \lg 5 = (\lg 2 + \lg 5)^2 = (\lg 10)^2 = 1. \end{aligned}$$

$$(3) \text{原式} = [(\log_6 6 - \log_6 3)^2 + \log_6 2 \cdot \log_6 (2 \cdot 3^2)] \div \log_6 4$$

$$\begin{aligned} &= \left[\left(\log_6 \frac{6}{3} \right)^2 + \log_6 2 (\log_6 2 + \log_6 3^2) \right] \div \log_6 2^2 \\ &= [(\log_6 2)^2 + (\log_6 2)^2 + 2\log_6 2 \cdot \log_6 3] \div 2\log_6 2 \\ &= \log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 (2 \cdot 3) = \log_6 6 = 1. \end{aligned}$$

【针对性训练】 见 173 页

5. 若 $a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0, x > y$, 则下列式子中正确的个数是 ()

① $\log_a x \cdot \log_a y = \log_a (x + y)$; ② $\log_a x - \log_a y = \log_a (x - y)$; ③ $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x \div \log_a y$; ④ $\log_a xy = \log_a x \cdot \log_a y$.

A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

038-4 对数的换底公式

(1) 换底公式 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ ($a > 0, a \neq 1, c > 0, c \neq 1, b > 0$).

(2) 推论 1: $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$.

(3) 推论 2: $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$.

易错点扫描

在计算中易出现下列错误:

$$(1) \log_a (M \pm N) = \log_a M \pm \log_a N.$$

$$(2) \log_a (M \cdot N) = \log_a M \cdot \log_a N.$$

$$(3) \log_a \frac{M}{N} = \frac{\log_a M}{\log_a N}. \quad (4) \log_a M^n = (\log_a M)^n.$$

易错点警示

熟练掌握对数的运算性质:

$$(1) \log_a MN = \log_a M + \log_a N.$$

$$(2) \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N.$$

$$(3) \log_a M^n = n \log_a M. \text{ 另外, 还应注意 } \log_2 (-3) \cdot (-5) \neq \log_2 (-3) + \log_2 (-5).$$

(4)推论3: $\log_a^m b^n = \frac{n}{m} \log_a b$.

证明如下:(1)若 $a^x = b(a > 0, \text{且 } a \neq 1)$, 则 $\log_a b = x$, 当 $c > 0$ 且 $c \neq 1$ 时有 $\log_c a^x = \log_c b$, 即 $x \log_c a = \log_c b$, 所以 $x = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, 故 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

(2)由换底公式, 得 $\log_a c = \frac{\log_c c}{\log_c a} = \frac{1}{\log_c a}$, 即 $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$.

(3)由换底公式, 得 $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = \frac{\lg b}{\lg a} \cdot \frac{\lg c}{\lg b} \cdot \frac{\lg a}{\lg c} = 1$.

即 $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$.

(4)由换底公式, 得 $\log_a^m b^n = \frac{\log_a b^n}{\log_a a^m} = \frac{n \log_a b}{m \log_a a} = \frac{n}{m} \log_a b$, 即 $\log_a^m b^n = \frac{n}{m} \log_a b$.

推敲·诠释 在运用对数运算性质进行计算时, 必须先把不同底的对数化为同底的对数, 换底公式的作用就是把不同底的对数化为同底的对数.

拓展·迁移 应用换底公式还可以推得如下常用恒等式: $\log_a a^k = k(a > 0, a \neq 1)$; $a^{\log_a N} = N(a > 0, a \neq 1, N > 0)$; $\log_a^p N^p = \log_a N(a > 0, a \neq 1, N > 0, p \in \mathbf{R})$; $\log_{\sqrt[n]{a}} \sqrt[n]{a} = \log_a N(a > 0, a \neq 1, N > 0, n \in \mathbf{N}^+)$; $\log_{\frac{1}{a}} N = -\log_a N(a > 0, a \neq 1, N > 0)$ 等.

例6 (1) 计算 $\log_2 \frac{1}{25} \cdot \log_3 \frac{1}{8} \cdot$

$\log_5 \frac{1}{9}$;

(2) 设 $\lg 2 = a, \lg 3 = b$, 求 $\log_5 12$;

(3) 求 $(\log_2 3 + \log_8 9)(\log_3 4 + \log_9 8 + \log_5 2)$ 的值.

【点拨】 利用换底公式及其推论解题.

解: (1) $\log_2 \frac{1}{25} \cdot \log_3 \frac{1}{8} \cdot \log_5 \frac{1}{9}$

$$= \log_2 5^{-2} \log_3 2^{-3} \log_5 3^{-2}$$

$$= -12 \log_2 5 \log_3 2 \log_5 3 = -12.$$

(2) $\log_5 12 = \log_5 (3 \times 4) = \log_5 3 + 2 \log_5 2$

$$= \frac{\lg 3}{\lg 5} + 2 \frac{\lg 2}{\lg 5} = \frac{\lg 3}{\lg \frac{10}{2}} + 2 \frac{\lg 2}{\lg \frac{10}{2}}$$

$$= \frac{\lg 3}{\lg 10 - \lg 2} + 2 \frac{\lg 2}{\lg 10 - \lg 2}.$$

$$\text{因为 } \lg 2 = a, \lg 3 = b, \text{ 所以 } \log_5 12 = \frac{b}{1-a} + 2 \frac{a}{1-a} = \frac{2a+b}{1-a}.$$

(3) 原式 $= (\log_2 3 + \log_2 3^2)(\log_3 2^2 + \log_3 2^3 + \log_3 2)$

$$= \left(\frac{5}{3} \log_2 3 \right) \left(\frac{9}{2} \log_3 2 \right) = \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 2} \cdot \log_3 2 = \frac{15}{2}.$$

【针对性训练】 见 173 页

6. (1) 化简 $(\log_4 3 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 2)$;

易错点扫描

(1) 思路混乱, 换底公式运用不熟练. (2) 换底方向不明确.

易错点警示

运用换底公式的方法有两种:
(1) 若条件给出对数, 则方向明确, 换底以条件对数的底为准. (2) 若条件或所求式中的对数不同底, 为了便于计算, 则统一换成同一底的对数(一般换成以 10 为底的对数).

(2) 已知 $2^x = 3^y = 6^z$, 求 x, y, z 之间的关系.

针对性训练答案速查 1. A [提示: 应用常用对数(以 10 为底的对数)及自然对数(以 e 为底的对数)的定义先求值, 后比较大小. 由题意知, $a = \lg 1000 = \lg 10^3 = 3$, $b = \ln e = 1$.

显然 $a > b$, 故选 A.] 2. C [提示: 满足本题的条件是 $\begin{cases} 5-a > 0, \\ a-2 > 0, \\ a-2 \neq 1, \end{cases}$ 解得 $2 < a < 3$ 或 $3 < a < 5$, 故选 C.]

3. C [提示: 由 $\log_7 [\log_3 (\log_2 x)] = 0 \Rightarrow \log_3 (\log_2 x) = 1 \Rightarrow \log_2 x = 3 \Rightarrow x = 2^3 = 8 \Rightarrow x^{-\frac{1}{2}} = 8^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, 故选 C.] 4. 证明: 设 $2^{6x} = 3^{3y} = 6^{2z} = k$, 则 $\frac{1}{6x} = \log_k 2$,

$\log_k 3 = \frac{1}{3y}$, $\log_k 6 = \frac{1}{2z}$, 因为 $\log_k 2 + \log_k 3 = \log_k 6$, 所以 $\frac{1}{6x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{2z}$, 整理, 得 $3xy - 2xz - yz = 0$, 所以 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{3}{z}$.

5. A [提示: 对数的运算实质是把积、商、幂的对数运算分别转化为对数的加、减、乘的运算. 在运算中要注意不能把对数符号当作表示数的字母参与运算. 如 $\log_a x \neq \log_a \cdot x$, $\log_a x$ 是不可分开的一个整体. 四个选项都把对数符号当作字母参与运算, 因而都是错误的, 所以应选 A.] 6. 解: (1) 原式 $= (\log_2 3 + \log_2 3) (\log_3 2 + \log_3 2) = \left(\frac{1}{2} \log_2 3 + \frac{1}{3} \log_2 3\right) \left(\log_3 2 + \frac{1}{2} \log_3 2\right) = \frac{5}{6} \log_2 3 \cdot \frac{3}{2} \log_3 2 = \frac{5}{4}$.

(2) 设 $2^x = 3^y = 6^z = k$, 则 $x = \log_2 k$, $y = \log_3 k$, $z = \log_6 k$. 当 $k=1$ 时, $x=y=z=0$. 当 $k \neq 1$ 时, 利用换底公式得 $\log_k 2 = \frac{1}{x}$, $\log_k 3 = \frac{1}{y}$, $\log_k 6 = \frac{1}{z}$, 因为 $\log_k 6 = \log_k 2 + \log_k 3$, 所以 $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. 故 x, y, z 之间的关系是 $x=y=z=0$ 或 $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

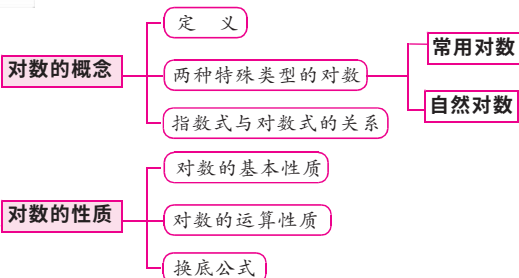
知识整合能力

... 知识归纳·例析 ...

1

知识思维导图

对数与对数运算



在什么情况下 $1+1>2$

2 类型题剖析

题型1 有关指、对数式之间的关系问题

例1 设 $\log_a 2 = m, \log_a 3 = n$, 求 a^{2m+n} .

【考查内容】 本题考查对数的概念、指数式与对数式的互化及指数的运算性质等内容.

【解题关键】 先将已知中的对数式化为指数式, 再利用指数的运算性质求解.

解: $\because \log_a 2 = m, \therefore a^m = 2. \therefore a^{2m} = 4.$

又 $\because \log_a 3 = n, \therefore a^n = 3.$

$\therefore a^{2m+n} = a^{2m} \cdot a^n = 4 \times 3 = 12.$

反思

利用指数式与对数式的互化关系, 可将对数运算关系转化为指数运算关系, 利用已学的指数运算性质即可讨论对数之间的运算性质.

【针对性训练】 见 179 页

1. 设 $\log_2 x = a, \log_2 y = b$, 求证 $xy = 2^{a+b}$.

题型2 有关对数的运算问题

这一类问题主要考查: (1) 运用对数的基本性质、对数的运算性质、对数的换底公式进行计算; (2) 有关对数与集合的结合、对数与方程的结合及指对数互化的内容的综合运用.

(1) 运用对数的基本性质、对数的运算性质、对数的换底公式进行计算

例2 (1) $2(\lg \sqrt{2})^2 + \lg \sqrt{2} \cdot \lg 5 + \sqrt{(\lg \sqrt{2})^2 - \lg 2 + 1}$;

(2) $2\log_3 2 - \log_3 \frac{32}{9} + \log_3 8 - 5^{2\log_5 3}$;

(3) 若 $f(\log_2 x) = x$, 求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 的值;

(4) 若 $\log_2 [\log_3 (\log_4 x)] = 0, \log_3 [\log_4 (\log_2 y)] = 0$, 求 $x+y$ 的值.

【考查内容】 本题考查对数的基本性质、对数的运算性质、换底公式的应用和计算能力及等价转化的数学思想.

【解题关键】 对数性质的灵活运用.

解: (1) 原式 $= \lg \sqrt{2} (2\lg \sqrt{2} + \lg 5) + \sqrt{(\lg \sqrt{2})^2 - \lg 2 + 1}$
 $= \lg \sqrt{2} (\lg 2 + \lg 5) + 1 - \lg \sqrt{2}$
 $= \lg \sqrt{2} + 1 - \lg \sqrt{2} = 1.$

(2) 原式 $= 2\log_3 2 - (\log_3 2^5 - \log_3 9) + 3\log_3 2 - 5^{\log_5 3^2}$
 $= 2\log_3 2 - 5\log_3 2 + 2\log_3 3 + 3\log_3 2 - 9$
 $= 2 - 9 = -7.$

(3) 令 $\log_2 x = t$, 因为 $f(\log_2 x) = x$, 所以 $f(t) = 2^t$, 所以 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$

(4) 因为 $\log_2[\log_3(\log_4 x)] = 0$, 所以 $\log_3(\log_4 x) = 1$,
 所以 $\log_4 x = 3$, 所以 $x = 4^3 = 64$.
 又因为 $\log_3[\log_4(\log_2 y)] = 0$, 所以 $\log_4(\log_2 y) = 1$,
 所以 $\log_2 y = 4$, 所以 $y = 2^4 = 16$,
 所以 $x + y = 64 + 16 = 80$.

反思

利用对数的性质求值, 其解题目标是化异为同, 即使各项底数相同, 再找真数间的联系; 对于复杂的真数, 可先化简再计算.

针对性训练 见 179 页

2. (1) 计算 $\log_a \sqrt[n]{a} + \log_a \frac{1}{a^n} + \log_a \frac{1}{\sqrt[n]{a}} (a > 0, a \neq 1)$;

(2) 已知 $\log_a 27 = \sqrt{2}$, 求 $\log_{\sqrt{a}} \sqrt[n]{a}$ 的值;

(3) 已知 $\lg 2 = 0.3010, \lg 3 = 0.4771$, 求 $\log_6 \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ 的值;

(4) 已知 $3^x = 4^y = 36$, 求 $\frac{2y+x}{xy}$ 的值.

(2) 有关对数与集合的结合、对数与方程的结合及指对数互化的内容的综合运用

例 3 已知 $A = \{x | 9^x - 10 \times 3^x + 9 \leq 0\}$, $B = \left\{y \mid y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2, x \in A\right\}$, $C = \{x | \log_2(3x+1) - 2\log_2(x-1) = 0\}$, $D = \{y | y \geq \log_{\sqrt{e}} x - 1, x \in C\}$, 求 $B \cap D$.

【考查内容】 本题考查元素与集合之间的关系、集合与集合之间的关系及有关集合的知识.

【解题关键】 集合 B 由集合 A 限定, 集合 D 由集合 C 限定, 因此求集合 B 和集合 D , 必须先解出集合 A, C .

解: $\because 9^x - 10 \times 3^x + 9 \leq 0, (3^x - 1)(3^x - 9) \leq 0$,

$\therefore 1 \leq 3^x \leq 9, \therefore 3^0 \leq 3^x \leq 3^2$,

即 $0 \leq x \leq 2$,

$\therefore A = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$.

由 $\log_2(3x+1) - 2\log_2(x-1) = 0$,

$\therefore \log_2(3x+1) = \log_2(x-1)^2$,

$\therefore \begin{cases} 3x+1 = (x-1)^2, \\ 3x+1 > 0, \\ x-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x = 0, \\ x > -\frac{1}{3}, \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ 或 } x=5, \\ x > 1, \end{cases}$

$\therefore x = 5$, 即 $C = \{5\}$.

$\therefore x \in A, \therefore 0 \leq x \leq 2$.

$$\begin{aligned}\therefore y &= \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 = 4\left(\frac{1}{4}\right)^x - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 \\ &= 4\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 = 4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{1}{2}\right]^2 + 1,\end{aligned}$$

$$\text{由 } 0 \leq x \leq 2, \therefore \frac{1}{4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 1,$$

$$\therefore 1 \leq y \leq 2, \text{ 即 } B = \{y | 1 \leq y \leq 2\}.$$

$$\because x \in C, \text{ 即 } x = 5 \text{ 时},$$

$$y \geq \log_{\sqrt{5}} x - 1 = \log_{\sqrt{5}} 5 - 1 = 2\log_5 5 - 1 = 1,$$

$$\therefore D = \{y | y \geq 1\},$$

$$\therefore B \cap D = \{y | 1 \leq y \leq 2\} \cap \{y | y \geq 1\} = \{y | 1 \leq y \leq 2\}.$$

反思

本题表面是集合问题,实际上是在解方程和不等式,集合A是在解不等式且是关于 3^x 的二次不等式,而后化归到指数式中确定范围.集合C解的是方程,且是对数方程.解对数方程一定要注意定义域,这一点不能大意.

针对性训练

见 179 页

3. 设 $M = \{0, 1\}$, $N = \{\lg a, 2^a, a, 11-a\}$, 是否存在 a 的值使 $M \cap N = \{1\}$?

例4 设 $f(x) = (\lg x)^2 - 2\lg x + 3p = 0$ 有两个大于1的实数根 α, β .

(1) 求实数 p 的取值范围;

(2) 若 $q = \log_a \beta + \log_\beta \alpha$, 求 q 的取值范围.

【考查内容】 本题考查方程、不等式的有关知识以及应用等价转化的思想和换元法解决问题.

【解题关键】 通过换元解不等式组求得 p, q 的取值范围.

解: (1) 设 $\lg x = t$, 则 $t^2 - 2t + 3p = 0$ 有两个正根,

$$\text{所以 } \begin{cases} (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3p \geq 0, \\ 3p > 0, \end{cases} \text{ 解得 } 0 < p \leq \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned}(2) q &= \log_a \beta + \log_\beta \alpha = \frac{\lg^2 \beta + \lg^2 \alpha}{\lg \alpha \lg \beta} \\ &= \frac{(\lg \alpha + \lg \beta)^2 - 2\lg \alpha \lg \beta}{\lg \alpha \lg \beta} \\ &= \frac{(\lg \alpha + \lg \beta)^2}{\lg \alpha \cdot \lg \beta} - 2 = \frac{2^2}{3p} - 2 = \frac{4}{3p} - 2.\end{aligned}$$

因为 $0 < p \leq \frac{1}{3}$, 所以 $\frac{1}{p} \geq 3$, 即 $q \geq 2$.

故 q 的取值范围是 $[2, +\infty)$.

反思

解答本题应准确地应用对数的运算性质对所求的式子灵活变形, 正确地应用韦达定理.

【针对性训练】 见 179 页

4. (1) $\lg a, \lg b$ 是方程 $2x^2 - 4x + 1 = 0$ 的两个实根, 求 $\lg(ab) \cdot \lg^2\left(\frac{a}{b}\right)$;(2) 已知 a, b, x 为正数, 且 $\lg(bx) \cdot \lg(ax) + 1 = 0$, 求 $\frac{a}{b}$ 的取值范围.【例 5】 (1) 已知正实数 x, y, z 满足 $3^x = 4^y = 6^z$, 试比较 $3x, 4y, 6z$ 的大小;(2) 已知 $x = a^{\frac{1}{1-\lg_a y}}, y = a^{\frac{1}{1-\lg_a z}}, z = a^{\frac{1}{1-\lg_a x}}$.

【考查内容】 本题考查指对数的互化、比较大小及证明的有关知识.

【解题关键】 对(1)题, 令 $3^x = 4^y = 6^z = t$, 有 $x = \log_3 t, y = \log_4 t, z = \log_6 t$, 这样可实现指数式到对数式的转化, 可将 x, y, z 从已知式子中分离出来, 然后比较. 对(2)题, 可通过指数式与对数式的转化来证明.解: (1) 设 $3^x = 4^y = 6^z = t$, 则 $t > 1$.

$$\begin{aligned} \text{因为 } 3x - 4y &= 3\log_3 t - 4\log_4 t = \frac{3\lg t}{\lg 3} - \frac{4\lg t}{\lg 4} \\ &= \lg t \left(\frac{3\lg 4 - 4\lg 3}{\lg 3 \times \lg 4} \right) = \frac{\lg t}{\lg 3 \times \lg 4} (\lg 4^3 - \lg 3^4), \end{aligned}$$

而 $\lg t > 0, \lg 3 > 0, \lg 4 > 0, \lg 4^3 < \lg 3^4$, 所以 $3x < 4y$.

$$\begin{aligned} \text{又因为 } 4y - 6z &= 2(2\log_4 t - 3\log_6 t) = 2 \left(\frac{2\lg t}{\lg 4} - \frac{3\lg t}{\lg 6} \right) \\ &= \frac{2\lg t (2\lg 6 - 3\lg 4)}{\lg 4 \times \lg 6} = \frac{2\lg t (\lg 6^2 - \lg 4^3)}{\lg 4 \times \lg 6}, \end{aligned}$$

而 $\lg t > 0, \lg 4 > 0, \lg 6 > 0, \lg 6^2 < \lg 4^3$, 所以 $4y < 6z$.故有 $3x < 4y < 6z$.证明: (2) 由 $x = a^{\frac{1}{1-\lg_a y}}$, 得 $\log_a x = \frac{1}{1-\lg_a y}$, ① 同理, $\log_a y = \frac{1}{1-\lg_a z}$,将其代入①式, 消去 $\log_a y$ 得, $\log_a x = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-\lg_a z}}$, 即 $\log_a x = 1 - \frac{1}{\log_a z}$,即 $\log_a z = \frac{1}{1-\log_a x}$, 从而 $z = a^{\frac{1}{1-\log_a x}}$.

反思

本题是指、对数互化的一道综合题目, 要解决此题目需要对指、对数知识有很好地掌握, 且有较灵活的解决问题的能力.

【针对性训练】 见 180 页

5. 设 A, B, C 的常用对数分别为 a, b, c 且 $a + b + c = 0$, 求证 $A^{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \cdot B^{\frac{1}{c} + \frac{1}{a}} \cdot C^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{1}{1000}$.

题型3 有关对数知识的创新应用问题

【例 6】 已知 $2^y \cdot \log_y 4 - 2^{y-1} = 0, \sqrt{\log_x \sqrt{5x}} \cdot \log_5 x = -1$, 那么是否存在一个

正整数 P , 使得 $P = \sqrt{\frac{1}{x} - y}$?

【考查内容】 本题考查对数方程的解法及对数的运算.

【解题关键】 运用方程确定 x, y 的值, 求出 x, y 即可.

解: $\because 2^y \cdot \log_y 4 - 2^{y-1} = 0, \therefore 2^y \left(\log_y 4 - \frac{1}{2} \right) = 0$, 而 $2^y > 0, \therefore \log_y 4 = \frac{1}{2}, \therefore y = 16$.

由 $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} \cdot \log_5 x = -1$, 得 $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5$ 且 $\log_x 5 < 0$,

$\therefore \log_x \sqrt{5x} = (\log_x 5)^2, \therefore \frac{1}{2} \log_x (5x) = (\log_x 5)^2$.

即 $2(\log_x 5)^2 - \log_x 5 - 1 = 0, (2\log_x 5 + 1)(\log_x 5 - 1) = 0$,

$\therefore \log_x 5 = -\frac{1}{2}$ 或 $\log_x 5 = 1 > 0$,

$\therefore \log_x 5 = 1$ (舍), $\therefore \log_x 5 = -\frac{1}{2}, x^{-\frac{1}{2}} = 5, x = \frac{1}{25}, \therefore \frac{1}{x} = 25$.

$\therefore P = \sqrt{\frac{1}{x} - y} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$.

即存在正整数 P , 使得 $P = \sqrt{\frac{1}{x} - y}$.

反思

解方程过程中要注意定义域, 如解题中的 $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5$ 时隐藏的一个定义域, 即 $\log_x 5 < 0$, 容易在解题中被忽视.

【针对性训练】 见 180 页

6. 设 a, b, c 是直角三角形的三边长, 其中 c 为斜边, 且 $c \neq 1$, 求证 $\log_{(c+b)} a + \log_{(c-b)} a = 2\log_{(c+b)} a \cdot \log_{(c-b)} a$.

题型4 有关对数知识的实际应用问题

例7 要测定古植物的年代, 可用放射性碳法, 在幼植物内部含有微量的放射性元素 ^{14}C , 幼植物死亡后, 停止了新陈代谢, ^{14}C 不再产生, 且原有的 ^{14}C 会自动衰变, 经过 5570 年 (叫做 ^{14}C 的半衰期), 它们的残余量只有原始含量的 $\frac{1}{2}$, 经过科学测定, 若 ^{14}C 的原始含量为 a , 则经过 t 年后的残余量 a' 与 a 之间满足 $a' = a \cdot e^{-kt}$. 现有一出土古植物中 ^{14}C 的残余量占原质量的 87.9%, 试推算出古植物生活的年代.

【考查内容】 本题考查对数在实际问题中的应用.

【解题关键】 对于应用题首先应仔细审题, 清楚各个数据的关系, 再列出相应的方程最后计算, 求出原问题的解.

解: 因为 $a' = a \cdot e^{-kt}$, 所以 $\frac{a'}{a} = e^{-kt}$.

两边取以 10 为底的对数 $\lg \frac{a'}{a} = -kt \lg e$.

因为 ^{14}C 的半衰期是5570年,即 $t=5570$ 时, $\frac{a'}{a}=\frac{1}{2}$.

所以 $\lg \frac{1}{2} = -5570 k \lg e$.

所以 $k \lg e = \frac{\lg 2}{5570}$,所以 $t = -\frac{5570}{\lg 2} \cdot \lg \frac{a'}{a}$ 就是计算古生物年代的公式.

因为 $\frac{a'}{a} = 0.879$,所以 $t = -\frac{5570}{\lg 2} \cdot \lg 0.879 \approx 1037$ (年).

答:这个古植物约是1037年前的遗物.

针对性训练 见180页

7. 把物体放在空气中冷却,如果物体原来的温度是 Q_1 ,空气的温度是 Q_0 , t 分钟后物体的温度是 Q ,可由公式 $Q = Q_0 + (Q_1 - Q_0)e^{-kt}$ 求得,现在将 60°C 的物体在 15°C 的空气中冷却,当物体温度为 35°C 时,冷却时间 $t =$ _____.

针对性训练答案速查 1. 证明: $\because \log_2 x = a, \log_2 y = b, \therefore x = 2^a, y = 2^b. \therefore xy = 2^a \cdot 2^b =$

2^{a+b} . 2. (1) 解法1: 原式 $= \frac{1}{n} \log_a a + (-n) \log_a a - \frac{1}{n} \log_a a = \frac{1}{n} - n - \frac{1}{n} = -n$. 解

法2: 原式 $= \log_a \left(\sqrt[n]{a} \cdot \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \right) = \log_a \frac{1}{a^n} = \log_a a^{-n} = -n$. (2) 解: $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[6]{a} =$

$\frac{1}{6} \log_{27} a^6 = \log_{27} a = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. (3) $\log_6 \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \log_6 \left(6 \times \frac{\sqrt{10}}{5} \right) = \log_6 6 + \log_6 \frac{\sqrt{10}}{5} =$

$1 + \frac{\lg \frac{\sqrt{10}}{5}}{\lg 6} = 1 + \frac{\lg \sqrt{10} - \lg 5}{\lg 6} = 1 + \frac{\frac{1}{2} \lg 10 - (\lg 10 - \lg 2)}{\lg 2 + \lg 3} = \frac{\lg 2 - \frac{1}{2}}{\lg 2 + \lg 3} + 1 =$

$\frac{0.3010 - \frac{1}{2}}{0.3010 + 0.4771} + 1 = 0.7442$. (4) $\because 3^x = 4^y = 36, \therefore \log_3 36 = x, \log_4 36 = y$, 则

$\frac{2y+x}{xy} = \frac{2\log_4 36 + \log_3 36}{\log_3 36 \log_4 36} = \frac{2}{\log_3 36} + \frac{1}{\log_4 36} = 2\log_{36} 3 + \log_{36} 4 = \log_{36} 9 + \log_{36} 4 =$

$\log_{36} 36 = 1$. 3. 解: 假设存在 a 的值满足条件,于是有如下情况:若 $\lg a = 1$,则 $a = 10$,此时 $11 - a = 1$,从而 $11 - a = \lg a = 1$,与集合元素的互异性矛盾;若 $2^a = 1$,则 $a = 0$,此时 $\lg a$ 无意义;若 $a = 1$,此时 $\lg a = 0$,从而 $M \cap N = \{0, 1\}$,与条件不符;若 $11 - a = 1$,则 $a = 10$,从而 $\lg a = 1$ 与集合元素的互异性矛盾. 综上,不存在 a 的值使 $M \cap$

$N = \{1\}$ 成立. 4. 解: (1) 由韦达定理得 $\begin{cases} \lg a + \lg b = 2, \\ \lg a \cdot \lg b = \frac{1}{2}. \end{cases}$ $\lg(ab) \cdot \lg^2 \left(\frac{a}{b} \right) = (\lg a +$

$\lg b)(\lg a - \lg b)^2 = (\lg a + \lg b) \cdot [(\lg a + \lg b)^2 - 4\lg a \cdot \lg b] = 2 \times$

$\left(2^2 - 4 \times \frac{1}{2} \right) = 4$. (2) 由 $\lg(ax) \cdot \lg(bx) + 1 = 0$ 得 $\lg \left[\frac{a}{b}(bx) \right] \cdot \lg(bx) + 1 = 0$,

$\therefore \left[\lg \left(\frac{a}{b} \right) + \lg(bx) \right] \lg(bx) + 1 = 0, \therefore \lg^2(bx) + \lg \left(\frac{a}{b} \right) \lg(bx) + 1 = 0$, 由于 a, b, x

为正数, $\therefore bx > 0$, 则 $\lg(bx)$ 为实数, $\therefore$ 方程有实根, $\therefore \Delta \geq 0$, 即 $\Delta = \left[\lg \left(\frac{a}{b} \right) \right]^2 - 4 \geq$

0, 解得 $\lg\left(\frac{a}{b}\right) \geq 2$ 或 $\lg\left(\frac{a}{b}\right) \leq -2$, $\therefore \frac{a}{b} \geq 100$ 或 $\frac{a}{b} \leq \frac{1}{100}$, 故 $\frac{a}{b}$ 的取值范围为 $\left(0, \frac{1}{100}\right] \cup [100, +\infty)$.

5. 证明: 令 $M = A^{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \cdot B^{\frac{1}{c} + \frac{1}{a}} \cdot C^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, 取常用对数, $\lg M = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \lg A + \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) \lg B + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \lg C$, 由已知得 $\lg A = a, \lg B = b, \lg C = c$, 所以 $\lg M = a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c}$, 因为 $a+b+c=0$, 所以 $b+c=-a, a+c=-b, a+b=-c$, 所以 $\lg M = \frac{-a}{a} + \frac{-b}{b} + \frac{-c}{c} = -3$, 于是 $M = \frac{1}{1000}$, 故 $A^{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \cdot B^{\frac{1}{c} + \frac{1}{a}} \cdot C^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{1}{1000}$.

6. 证明: 由勾股定理, 得 $a^2 + b^2 = c^2$. $\log_{(c+b)} a + \log_{(c-b)} a = \frac{1}{\log_a(c+b)} + \frac{1}{\log_a(c-b)} = \frac{\log_a(c-b) + \log_a(c+b)}{\log_a(c+b) \log_a(c-b)} = \frac{\log_a(c^2 - b^2)}{\log_a(c+b) \log_a(c-b)} = \frac{\log_a a^2}{\log_a(c+b) \log_a(c-b)} = 2 \log_{(c+b)} a \cdot \log_{(c-b)} a$. 所以原等式成立.

7. 2分钟 [提示: 对公式两边取对数有 $\ln(Q - Q_0) = \ln(Q_1 - Q_0) - t \ln \frac{3}{2}$, 所以 $t = \frac{\ln(Q_1 - Q_0) - \ln(Q - Q_0)}{\ln \frac{3}{2}}$, 把条件代入, 则 $t = \frac{\ln 45 - \ln 20}{\ln 1.5} = \frac{\ln 2.25}{\ln 1.5} = 2$ (分钟).]



知识整理	常见误区	常用方法
对数的概念(重点;理解)	易在指数对数互化上出错	定义法
对数的性质(重点;掌握)	对数的运算性质在应用上易出错	转化思想方法
对数的换底公式(重点;灵活运用)	盲目套用、不灵活	转化思想方法
有关指、对数式之间的关系问题	对对数的定义掌握不准确	转化思想方法
有关对数的运算问题	对对数的运算性质掌握不扎实, 不能灵活运用	换元法 转化思想方法
有关对数的创新应用问题	思维不灵活、综合应用能力差成为解题的障碍	转化思想方法
有关对数知识的实际应用问题	审题不清导致错误	转化思想方法

作业管理能力

..... 课后练习



纠错反思限时训练(30 分钟)

1. (考查知识点 2) 计算 $2\log_5 25 + 3\log_2 64 - 8\log_7 1$ 等于 ()

- A. 14 B. 220
C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 22

2. (考查知识点 3) 下列各式用 $\log_a x, \log_a y, \log_a z$ 表示:

- ① $\log_a (xy^2) = 2\log_a x \cdot \log_a y$; ② $\log_a (x\sqrt{y}) = \log_a x + 2\log_a y$; ③ $\log_a \frac{xy}{z^3} = \log_a x + \log_a y + \frac{1}{3}\log_a z$; ④ $\log_a \sqrt[3]{\frac{x}{yz^2}} = \frac{1}{3}(\log_a x - \log_a y - 2\log_a z)$.

其中表示正确的是

- A. ①② B. ①③ C. ③ D. ④

3. (考查知识点 1) 若 a, b, c 都是正数, 且 $2^{a+c} \cdot 3^c = 3^{b+c} \cdot 2^c = 1$, 则 ()

- A. $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ B. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$
C. $\frac{4}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 0$ D. $\frac{4}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

4. (考查知识点 3) 若方程 $(\lg x)^2 + (\lg 2 + \lg 3)\lg x + \lg 2 \cdot \lg 3 = 0$ 的两根为 x_1, x_2 , 则 $x_1 \cdot x_2$ 的值 ()

- A. $\lg 2 \cdot \lg 3$ B. $\lg 2 + \lg 3$
C. $\frac{1}{6}$ D. 6

5. (考查知识点 2) 若 $a = \frac{1}{3}(\lg 16 + \log_5 25 - \lg \frac{1}{5}) - \lg 0.2$, $b = (\lg 2)^2 + \lg 2 \cdot \lg 50 + \lg 25$, 则 $a - b$ 等于 ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

6. (考查知识点 3) 已知 $\log_2 9 = a, \log_2 5 = b$, 用 a, b 表示 $\log_2 75$ 为 _____.7. (考查知识点 3) 已知二次函数 $f(x) = (\lg a)x^2 + 2x + 4\lg a$ 的最大值为 -3, 则 $a =$ _____.8. (考查知识点 2) 若 $\log_2 (\log_3 \log_4 x) = \log_3 (\log_4 \log_2 y) = \log_4 (\log_2 \log_3 z) = 0$, 则 $x + y + z =$ _____.9. (考查知识点 3) 已知集合 $M = \{x, xy, \lg(xy)\}$, $P = \{0, |x|, y\}$, 且满足 $M = P$, 求实数 x, y 的值.10. (考查知识点 4) 已知 a, b 是正数, 且 $a^2 + b^2 = 7ab$, 试证明 $\lg \frac{1}{3}(a+b) = \frac{1}{2}(\lg a$

$+\lg b$).

11. (考查知识点 1,3) 已知 $f(x)=a^{x-\frac{1}{2}}$, 且 $f(\lg a)=\sqrt{10}$, 求 $f(x)$ 的表达式.

12. (考查题型 4,5) 若实数 x 满足 $\log_2(2^x-1) \cdot \log_2(2^{x+2}-4)=3$, 求 x 的值.

答案与提示 1. D[提示: 原式 $=2\log_5 5^2 + 3\log_2 2^5 - 8\log_7 1 = 4 + 18 - 0 = 22$.] 2. D[提示: 利用运算性质, 注意符号. 只有④正确.] 3. B[提示: 因为 $2^{a+c} \cdot 3^c = 1$, 所以 $2^a \cdot 2^c \cdot 3^c = 1$, 所以 $2^a \cdot 6^c = 1$, 所以 $2^a = 6^{-c}$, 同理 $3^{b+c} \cdot 2^c = 1$, 所以 $3^b \cdot 3^c \cdot 2^c = 1$, 所以 $3^b \cdot 6^c = 1$, 所以 $3^b = 6^{-c}$. 所以 $a = \log_2 6^{-c} = -c\log_2 6$, 所以 $\frac{1}{a} = -\frac{1}{c}\log_6 2$, $\frac{1}{b} = -\frac{1}{c}\log_6 3$. 所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{c}(\log_6 2 + \log_6 3) = -\frac{1}{c}$, 所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.] 4. C

[提示: $\lg x_1 + \lg x_2 = -(\lg 2 + \lg 3) = -\lg 6$, 所以 $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{6}$, 故选 C.] 5. B[提示: 注意利用性质 $\lg 2 + \lg 5 = \lg 10 = 1$.]

6. $\frac{a}{2} + 2b$ [提示: 因为 $\log_2 9 = 2\log_2 3 = a$, 所以 $\log_2 75 = \log_2(3 \times 25) = \log_2 3 + 2\log_2 5 = \frac{a}{2} + 2b$.] 7. $\frac{1}{10}$ [提示: 原函数可化为

$f(x) = (\lg a) \left(x + \frac{1}{\lg a}\right)^2 - \frac{1}{\lg a} + 4\lg a$, 由已知 $f(x)$ 有最大值为 -3 , 所以 $\lg a < 0$, 并且 $-\frac{1}{\lg a} + 4\lg a = -3$, 整理得 $4(\lg a)^2 + 3\lg a - 1 = 0$, 解得 $\lg a = -1$ 或 $\lg a = \frac{1}{4}$,

因为 $\lg a < 0$, 故取 $\lg a = -1$, 所以 $a = 10^{-1} = \frac{1}{10}$.] 8. 89[提示: $\log_2 \log_3 \log_4 x = 0$, 所

以 $\log_3 \log_4 x = 1$, 所以 $\log_4 x = 3$, 所以 $x = 4^3 = 64$, 同理可得 $y = 16, z = 9$. 所以 $x + y + z = 64 + 16 + 9 = 89$.]

9. 解: 由 $M = P, 0 \in M$, 由于 $xy > 0$, 所以 $x \neq 0, y \neq 0$, 因此 $\lg(xy) = 0, xy = 1$, 若 $y = 1$, 则 $x = 1$, 这与集合元素的互异性相矛盾, 若 $|x| = 1$, 由于 $x \neq 1$, 所以 $x = -1$, 从而 $y = -1$. 故 $x = y = -1$.

10. 证明: 由 $a^2 + b^2 = 7ab$, 得 $(a+b)^2 = 9ab$, 所以 $\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = ab$, 两边取常用对数, 得 $2\lg \frac{a+b}{3} = \lg(ab)$, 即 $\lg \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$.

11. 解: 因为 $f(x) = a^{x-\frac{1}{2}}$, 所以 $f(\lg a) = a^{\lg a - \frac{1}{2}} = \sqrt{10}$. 即 $\lg a - \frac{1}{2} = \log_a \sqrt{10} = \frac{\lg \sqrt{10}}{\lg a} = \frac{\frac{1}{2}}{\lg a}$, 亦即 $2\lg^2 a - \lg a - 1 = 0$, 解得 $\lg a = 1$ 或 $\lg a = -\frac{1}{2}$,

所以 $a = 10$ 或 $a = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 所以 $f(x) = 10^{x-\frac{1}{2}}$ 或 $f(x) = \left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^{x-\frac{1}{2}}$.

12. 解: 由 $\log_2(2^x-1) \cdot \log_2(2^{x+2}-4) = 3$, 得 $\log_2(2^x-1) \cdot \log_2[4(2^x-1)] = 3$, 所以 $\log_2(2^x-1)[2 + \log_2(2^x-1)] = 3$, 即 $\log_2^2(2^x-1) + 2\log_2(2^x-1) - 3 = 0$. 解得 $\log_2(2^x-1) = 1$ 或 $\log_2(2^x-1) = -3$, 故有 $x = \log_2 3$ 或 $x = \log_2 \frac{9}{8}$.