
电子图书
信息技术的结晶
人类文明的载体
网络的基本资源

1952 年试题

数学试题分两部分

第一部分

注意:第一部分共二十题,均答在题纸上,每题的中间印着一道横线,将正确的答案就填写在横线上.

例题:若 $2x-1=x+3$,则 $x=$__4__.

本题的正确答案是 4,所以在横线上填写 4.

1.分解因式:$x^4-y^4=$__________________.

2.若 $\log_{10}2x=2\log_{10}x$,问 $x=$____________.

3.若方程式 $x^3+bx^2+cx+d=0$ 之三根为 $1,-1,\frac{1}{2}$,则 $c=$______.

4.若 $\sqrt{x^2+7}-4=0$,则 $x=$__________.

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=$_________.

6.两个圆的半径都是 4 寸,并且一个圆通过另一圆的圆心,则这两个圆的公共弦之长是__________寸.

7.三角形△ABC 的面积是 60 平方寸,M 是 AB 的中点,N 是 AC 的中点,则△AMN 的面积是_____________平方寸.

8.正十边形的一内角是____________度.

9.祖冲之的圆周率 π=________________.

10.球的面积等于大圆面积的_____________倍.

11.直圆锥之底之半径为 3 尺,斜高为 5 尺,则其体积为______立方尺.

12.正多面体有___________种,其名称为______________.

13.已知 $\sin\theta=\frac{1}{3}$,求 $\cos 2\theta=$____________.

14.方程式 $\tan 2x=1$ 的通解为 $x=$___________.

15.太阳仰角为 30°时塔影长 5 丈,求塔高=____________.

16.三角形△ABC 之 b 边为 3 寸,c 边为 4 寸,A 角为 30°,则△ABC 的面积为____________平方寸.

17.已知一直线经过点(2,-3),其斜率为-1,则此直线之方程式为________________________.

18.若原点在一圆上,而此圆的圆心为点(3,4),则此圆的方程式为____________________.

19.原点至 $3x+4y+1=0$ 之距离=_____________.

20.抛物线 $y^2-8x+6y+17=0$ 之顶点之坐标为_________.

第二部分

注意:第二部分共四题,均答在后面白纸上.

1.解方程式 $x^4+5x^3-7x^2-8x-12=0$.

2.△ABC 中,∠A 的外分角线与此三角形的外接圆相交于 D,求证:BD=CD.

3.设三角形的边长为 a=4,b=5,c=6,其对角依次为 A,B,C.(1)求 cosC.(2)求 sinC,sinB,sinA.(3)问 A,B,C 三个角各为锐角或钝角?

4.一椭圆通过(2,3)及(-1,4)两点,中心为原点,长短轴重合于坐标轴,试求其长短轴及焦点.

1952 年试题答案

第一部分

1. $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$.
2. 2.
3. -1.
4. ±3.
5. -24
6. $4\sqrt{3}$
7. 15.
8. 144°
9. $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$, 3.14159265.
10. 4.
11. 12π.
12. 5,正四面体,正六面体,正八面体,正十二面体,正二十面体.
13. $\frac{7}{9}$
14. $\frac{1}{2}(n\pi+\frac{\pi}{4})$.
15. $\frac{5}{3}\sqrt{3}$
16. 3.
17. $x+y+1=0$.
18. $x^2+y^2-6x-8y=0$
19. $\frac{1}{5}$
20. (1,-3)

第二部分

1. 2,-6,ω,ω^2.

3. $\cos C=\frac{1}{8}$, $\sin C=\frac{3}{8}\sqrt{7}$, $\sin B=\frac{5}{16}\sqrt{7}$, $\sin A=\frac{1}{4}\sqrt{7}$.

A,B,C 皆为锐角。

4. 长轴: $\frac{2}{3}\sqrt{165}$, 短轴: $\frac{2}{7}\sqrt{385}$　焦点: $(0,\pm\frac{2}{21}\sqrt{1155})$.

1953 年试题

一、下列十题顺次解答，不必抄题（但须写明题号：甲，乙，丙……），结果务须明确，过程可以简单。

甲、解 $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=\frac{10}{3}$

乙、若 $3x^2+kx+12=0$ 之二根相等，求 k.

丙、求 $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ 之值.

丁、求 $\log_{10}\frac{300}{7}+\log_{10}\frac{700}{3}+\log_{10}1$ 之值 .

戊、求 $\tan(870°)$

己、若 $\cos 2x=\frac{1}{2}$，求 x 之通值.

庚、两三角形相似之条件为何？（把你所知道的都写出来）

辛、长方体之长、宽、高为 12 寸，3 寸，4 寸，求对角线之长.

壬、垂直三棱柱之高为 6 寸，底面三边之长为 3 寸，4 寸，5 寸，求体积.

癸、球之表面积为 36π 方寸，求体积.

二、解 $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=9, \\ 4x^2-5xy+6y^2=30. \end{cases}$

三、(1)化简 $\sqrt{\frac{12}{25}}+\sqrt[4]{90000}+\sqrt[6]{\frac{64}{27}}$.

(2)求 $(2x^3+\frac{1}{x})^{12}$ 之展开式中之常数项.

四、锐角三角形 ABC 之三高线为 AD，BE，CF，垂心为 H；求证 HD 平分∠EDF.

五、已知三角形的两个角为 45°及 60°，而其夹边长 1 尺；求最小边之长及面积.

1953 年试题答案

一、下列十题顺次解答，不必抄题（但须写明题号：甲，乙，丙……），结果务须明确，过程可以简单。

甲、将原方程整化得 $6(x^2+1)=10(x^2-1)$，故 $4x^2=16$，$x=\pm 2$.

乙、原方程二根相等之条件为 $k^2-4\times 3\times 12=0$，

即 $k^2=12^2$，$k=\pm 12$.

丙、原行列式 $=3\times4\times5-6\times7-4\times7+2\times5$

$=60-42-28+10=0$.

丁、原式 $=\log_{10}(\frac{300}{7}\times\frac{700}{3}\times 1)=\log_{10}10000=4$.

戊、$\tan 870° = \tan(900° - 30°)$

$= \tan(-30°) = -\tan 30°$

$= -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

己、因 $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$，故 $2x = 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$，$x = n\pi \pm \dfrac{\pi}{6}$.

庚、(i)　∠A=∠A′，∠B=∠B′；

(ii)　∠A=∠A′，AB∶A′B′=AC∶A′C′；

(iii) AB∶A′B′=AC∶A′C′=BC∶B′C′；

三者各为△ABC∽△A′B′C′之条件.

辛、对角线 $=\sqrt{12^2+3^2+4^2}$ 寸 $=\sqrt{169}$ 寸 $=13$ 寸.

壬、因 $3^2+4^2=5^2$，故底面为直角三角形，

其面积为 $\dfrac{1}{2}\times 3\times 4$ 方寸 $=6$ 方寸.

（或用“底面积 $=\dfrac{1}{4}\sqrt{(3+4+5)(3+4-5)(3-4+5)(-3+4+5)}$

方寸 $=6$ 方寸”亦可）

棱柱体积=6×6 立方寸=36 立方寸.

癸、设球的半径为 R 寸，则 $4\pi R^2=36\pi$，∴ R=3.

球的体积为 $\dfrac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$（立方寸）.

二、解：原方程组消去常数项，得

$$2x^2+5xy-12y^2=0$$

将此方程左边分解因式，得

$$(x+4y)(2x-3y)=0,$$

即　$x+4y=0$，$2x-3y=0$.

由此有

(I) $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=9, \\ x+4y=0; \end{cases}$　　(II) $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=9, \\ 2x-3y=0. \end{cases}$

解方程组(Ⅰ)，得

$\begin{cases} x_1=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}, \\ y_1=-\dfrac{1}{3}\sqrt{3}; \end{cases}$　　$\begin{cases} x_2=-\dfrac{4}{3}\sqrt{3}, \\ y_2=\dfrac{1}{3}\sqrt{3}; \end{cases}$

解方程组(Ⅱ)，得

$\begin{cases} x_3=3, \\ y_3=2; \end{cases}$　　$\begin{cases} x_4=-3, \\ y_4=-2. \end{cases}$

三、解：(1)原式 $=\sqrt{\frac{3\times 2^{2}}{5^{2}}}+\sqrt[4]{3^{2}\times 10^{4}}+\sqrt[6]{\frac{2^{6}}{3^{3}}}$

$$=\frac{2}{5}\sqrt{3}+10\sqrt{3}+\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$=\frac{166}{15}\sqrt{3}$$

(2)由二项展开式的通项公式:

$$T_{r+1}=C_{12}^{r}(2x^{3})^{12-r}(\frac{1}{x})^{r}$$

$$=C_{12}^{r}\cdot 2^{12-r}\cdot x^{36-4r}$$

令　　36-4r=0,

∴　　r=9.

故常数项为

$$C_{12}^{9}\cdot 2^{12-9}=C_{12}^{3}\cdot 2^{3}=1760.$$

四、证明:由于 AD⊥BC,BE⊥CA,

∴　点 A,B,D,E 共圆.

故　∠ADE=∠ABE.

又因点 F,B,C,E 共圆,

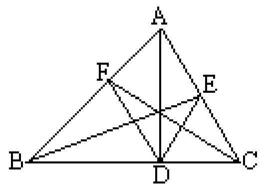
∴　∠FBE=∠FCE.

又因点 C,A,F,D 共圆,

∴　∠FCA=∠FDA.

综上可得∠ADE=∠FDA,

即 AD 平分∠EDF.



五、解:已知∠B=45°,∠C=60°,于是∠A=75°.

由正弦定理得

$$\frac{AC}{\sin 45°}=\frac{1}{\sin 75°},$$

∴　$AC=\frac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2})}=\sqrt{3}-1$(尺).

△ABC的面积 $S=\frac{1}{2}\times 1\times(\sqrt{3}-1)\cdot\sin 60°$

$$=\frac{1}{4}(3-\sqrt{3})\text{（平方尺）}.$$

1954 年试题

一、下列六题顺次解答，不必抄题（但须写明题号：甲，乙，丙，……）．结果务须明确，过程可以简单．

甲、化简 $[(a^{-\frac{3}{2}} \cdot b^{2})^{-1} \cdot (a \cdot b^{-3})^{\frac{1}{2}} \cdot (b^{\frac{1}{2}})^{7}]^{\frac{1}{3}}$

乙、解 $\frac{1}{6}\log x = \frac{1}{3}\log a + 2\log b + \log c$．

丙、用二项式定理计算 $(3 \cdot 02)^{4}$，使误差小于 $\frac{1}{1000}$．

丁、直角三角形弦上半圆的面积等于勾上半圆与股上半圆面积之和，试证明之．

戊、已知球的半径为 r，求内接正方体的体积．

己、已知三角形的一边之长为 a ，两邻角为β 及γ ，求计算边长 b 的计算公式．

二、描绘 $y=3x^2-7x-1$ 之图象，并按下列条件分别求 x 的值的范围：

(i) $y>0$；　(ii) $y<0$．

三、假设两圆互相外切，求证用连心线段为直径所作的圆必与前两圆的外公切线相切．

四、解 $\frac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x} = 1 + \sin 2x$，求x之通值．

五、有一直圆锥，全面积为 a；与之同底同高之直圆柱全面积为 a′．求该圆锥高与母线之比．

1954 年试题答案

一、下列六题顺次解答，不必抄题，结果务须明确，过程可以简单．

甲、解：原式 $= (a^{\frac{3}{2}}\, b^{-2}\, a^{\frac{1}{2}}\, b^{-\frac{3}{2}}{}_{h}\, b^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{3}}$

$$= (a^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}\, b^{-2-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}})^{\frac{1}{3}}$$

$$= (a^{2} \cdot b^{0})^{\frac{1}{3}}$$

$$= a^{\frac{2}{3}}$$

乙、解：原式可化为

$$\log x^{\frac{1}{6}} = \log a^{\frac{1}{3}} b^{2} c．$$

于是有

$$x^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{3}} b^{2} c$$

$$\therefore \quad x = (a^{\frac{1}{3}} b^{2} c)^{6} = a^{2} b^{12} c^{6}．$$

丙、解：由 $(3.02)^4=(3+0.02)^4$

$$=3^4+4\times3^3\times0.02+6\times3^2\times(0.02)^2$$

$+4\times3\times(0.02)^3+(0.02)^4$,

可知第4项的值已小于0.01,所以,计算可到第3项为止,其误差必小于千分之一.

$$(3.02)^4=3^4+4\times3^3\times0.02+6\times3^2\times(0.02)^2$$
$$=81+2.16+0.0216$$
$$=83.182$$

丁、证:设直角三角形的勾为a,股为b,弦为c,则有

$$c^2=a^2+b^2$$

所以弦上半圆的面积 $=\frac{1}{2}\pi(\frac{c}{2})^2=\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{c^2}{4}$

$$=\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{a^2+b^2}{4}$$
$$=\frac{1}{2}\pi(\frac{a}{2})^2+\frac{1}{2}\pi(\frac{b}{2})^2.$$

即弦上半圆面积=勾上半圆面积+股上半圆的面积.

戊、解:内接正方体的中心即该球的球心.正方体过中心的对角线为该球的直径,故其长为2r.若设正方体的边长为a,则有

$$3a^2=4r^2,$$
$$a=\frac{2}{3}\sqrt{3}r.$$

所以内接正方体的体积

$$V=a^3=(\frac{2}{3}\sqrt{3}r)^3$$
$$=\frac{8}{9}\sqrt{3}r^3$$

己、解:由正弦定理可知

$$\frac{a}{\sin[180°-(\beta+r)]}=\frac{b}{\sin\beta},$$
$$\therefore\quad b=\frac{a\sin\beta}{\sin[180°-(\beta+r)]}=\frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+r)}$$

二、解:将原方程变形,可得

$$(x-\frac{7}{6})^2=\frac{1}{3}(y+\frac{61}{12}).$$

于是,抛物线顶点为$(\frac{7}{6},-\frac{61}{12})$（如图）.

抛物线与x轴的交点为:

$$M(\frac{7}{6}-\frac{\sqrt{61}}{6},0),$$
$$N(\frac{7}{6}+\frac{\sqrt{61}}{6},0),$$

即 $M(\frac{7-\sqrt{61}}{6},0)$,

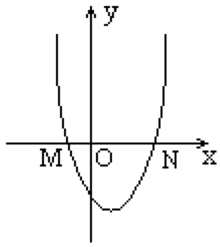
$$N(\frac{7+\sqrt{61}}{6},0).$$

当 y>0 时,x 的取值范围为:

$$(-\infty,\frac{7-\sqrt{61}}{6}),(\frac{7+\sqrt{61}}{6},+\infty).$$

当 y<0 时,x 的取值范围为:

$$(\frac{7-\sqrt{61}}{6},\frac{7+\sqrt{61}}{6}).$$

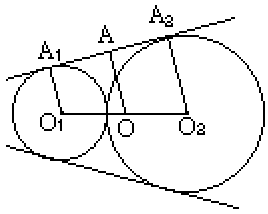


三、证明:设⊙O_1 及⊙O_2 为互相外切的二圆,其中一外公切线为 A_1A_2,切点 A_1 及 A_2(如图),令点 O 为连心线 O_1O_2 的中点,过 O 作 $OA\perp A_1A_2$.

∵ $OA=\frac{1}{2}(O_1A_1+O_2A_2)=\frac{1}{2}O_1O_2$

∴ **以 O_1O_2 为直径,即以 O 为圆心,OA 为半径的圆必与直线 A_1A_2 相切.**

同理可证,此圆必切于⊙O_1 及⊙O_2 的另外一条外公切线.



四、解: $\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=(\cos x+\sin x)^2$,

$\cos x+\sin x=(\cos x+\sin x)^2(\cos x-\sin x)$,

$(\cos x+\sin x)(1-\cos^2x+\sin x^2)=0$,

$2(\cos x+\sin x)\cdot\sin^2x=0$,

∴ $\cos x+\sin x=0,\sin^2x=0$.

由方程 $\cos x+\sin x=0$ **得**,$\mathrm{tg}x=-1$.

∴ $x=k\pi-\frac{\pi}{4}$ **(k为整数)**.

由方程 $\sin^2x=0$,**得**

$x=k\pi$ **(k 为整数)**.

由检验可知

$x=k\pi-\frac{\pi}{4},x=k\pi$ **(k为整数)均为方程的通解.**

五、解:设直圆锥的高为 h,底面半径为 R,母线长为 l,则

$$\frac{a}{a'}=\frac{\pi R(R+l)}{2\pi R(R+h)}=\frac{R+l}{2(R+h)},$$

∴ $2a(R+h)=a'(R+l)$.

由$R=\sqrt{l^2-h^2}$,代入可得

$$2a(\sqrt{l^2-h^2}+h)=a'(\sqrt{l^2-h^2}+l),$$

$$(2a-a')\sqrt{l^2-h^2}=a'l-2ah.$$

两边同乘以 l ,可得

$$(2a-a')\sqrt{l-(\frac{h}{l})^2}=a'l-2a\cdot\frac{h}{l}$$

等式两边平方,

$$(4a^2-4aa'+a'^2)\left[l-(\frac{h}{l})^2\right]=a'^2-4aa'\cdot\frac{h}{l}+4a^2(\frac{h}{l})^2,$$

$$(8a^2-4aa'+a'^2)(\frac{h}{l})^2-4aa'\cdot\frac{h}{l}+(4aa'-4a^2)=0.$$

这个关于 $\frac{h}{l}$ 的一元二次方程的判别式

$$\Delta=(-4aa')^2-4(8a^2-4aa'+a^2)(4aa'-4a^2)$$

$$=16a(2a-a')^3>0,$$

∴该一元二次方程有两个实根,解得

$$\frac{h}{l}=\frac{4aa'\pm\sqrt{16a(2a-a')^3}}{2(8a^2-4aa'+a'^2)}$$

$$=\frac{2aa'\pm2(2a-a')\sqrt{a(2a-a')}}{4a^2+(2a-a')^2}.$$

即为圆锥的高与母线的比.

1955 年试题

一、下列四题顺次解答,不必抄题（但须写明题号:甲,乙,丙,丁）.结果务须明确,过程可以简单.

甲、以二次方程 $x^2-3x-1=0$ 的两根的平方为两根作一二次方程.

乙、等腰三角形一腰的长是底边的 4 倍,求这三角形各角的余弦.

丙、已知正四棱锥底边的长为 a,侧棱与底面的交角为 45°,求这棱锥的高.

丁、写出:二面角的平面角的定义.

二、求 b,c,d 的值,使多项式 x^3+bx^2+cx+d 适合下列三条件:

(1)被 x-1 整除;

(2)被 x-3 除时余 2;

(3)被 x+2 除与被 x-2 除时余数相等.

三、由直角三角形勾上一点 D 作弦 AB 的垂线交弦于 E、股的延长线于 F、外接圆周于 Q,求证:EQ 为 EA 与 EB 的比例中项又为 ED 与 EF 的比例中项.

四、解方程 $\cos 2x=\cos x+\sin x$,求 x 的通值.

五、一三角形三边的长成等差级数,其周长为 12 尺,面积为 6 平方尺,求证这三角形为一直角三角形.

1955 年试题答案

一、甲、设方程 $x^2-3x-1=0$ 的二根为 α,β,

则 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-1$.

$\therefore$ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2(-1)=11$

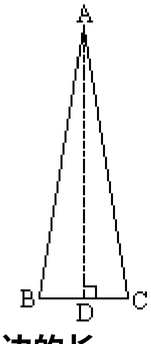
$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(-1)^2=1$

$\therefore$ 所求的二次方程为 $y^2-11y+1=0$.

乙、设△ABC 中 AB=AC=4BC,AD 为 BC 边上的高,则各角的余弦为:

$$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{16BC^2+16BC^2-BC^2}{2\cdot 4BC\cdot 4BC}=\frac{31}{32},$$

$$\cos B=\cos C=\frac{CD}{CA}=\frac{\frac{1}{2}BC}{4BC}=\frac{1}{8}.$$



丙、设 S-ABCD 为一正四棱锥,SH 为其高,底边的长为 a,∠SAH=45°,

则 △SHA 为一等腰直角三角形,

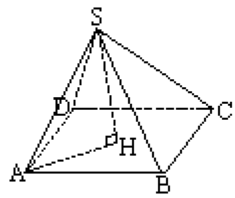
即　SH=AH.

但　AH 为其底的对角线的一半,且其底边的长为 a,

$\therefore\ AH=\frac{a}{2}\sqrt{2},$

$\therefore\ SH=\frac{a}{2}\sqrt{2}.$

丁、自二面角的棱上一点在其各面上作棱的垂线,此二垂线所夹的角叫做该二面角的平面角.



二、解:∵x^3+bx^2+cx+d 可被 x-1 整除.

∴ 1+b+c+d=0;　　　　　　①

∵ x^3+bx^2+cx+d 被 x-3 除余 2,

∴ 27+9b+3c+d=2;　　　　　②

∵ x^3+bx^2+cx+d 被 x+2 除与被 x-2 除时余数相等,

∴ -8+4b-2c+d=8+4b+2c+d,　　③

由③:　c=-4.

代入①和②:

b+d=3,　　　　　　④

9b+d=-13.　　　　⑤

由④和⑤:

8b=-16,

b=-2,

d=5.

三、证:连结 QA,QB,则∠AQB 为一直角,而 EQ 为直角三角形 AQB 弦上的高,

∴　EQ 为 EA,EB 的比例中项,

又　∵　∠1=∠2.(均与∠ABF 互余)

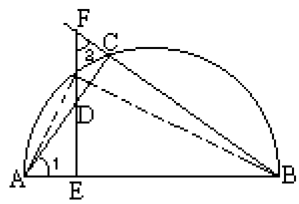
∴　△AED∽△FEB,

∴　EA∶EF=ED∶EB,

∴　EA·EB=EF·ED,

∴　EQ^2=EF·ED,

即　EQ 为 ED 与 EF 的比例中项.



四、解:cos2x=cosx+sinx.

$\cos^2x-\sin^2x=\cos x+\sin x.$

(cosx+sinx)(cosx-sinx-1)=0,

cosx+sinx=0,　①

cosx-sinx-1=0,②

由①： $\tan x = -1$.　$\therefore x = n\pi - \frac{\pi}{4}$.

由②： $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4}$,

$x + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$,

$\therefore x = 2n\pi$ 或 $2n\pi - \frac{\pi}{2}$.

五、证明:设△ABC 即此三角形,CA、AB、BC 各边的长为 x 尺,(x-y)尺,(x+y)尺.

则　$x+y+x+x-y=12$　①

$\sqrt{6[6-(x+y)](6-x)[6-(x-y)]} = 6$　②

由①得 x=4.　③

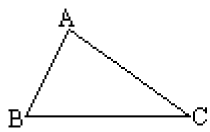
由②及③得 6(6-4-y)(6-4)(6-4+y)=36,

$12(2-y)(2+y)=36, 4-y^2=3, y^2=1, \therefore y=\pm 1$,

故此三角形各边的长为 3 尺,4 尺,5 尺.

∵　$3^2+4^2=5^2$

∴　△BAC 为一直角三角形.



1956年试题

下列各题顺次解答,不必抄题（但须写明题号,例如:Ⅰ$_{甲}$、Ⅰ$_{乙}$、Ⅱ、Ⅲ等）.

一、甲、利用对数性质,计算 $\lg^2 5+\lg 2\cdot\lg 50$.

（log 是以 10 为底的对数 $\log_{10}$ 的记号）

乙、设 m 是实数,求证方程 $2x^2-(4m-1)x-m^2-m=0$ 的两个根必定都是实数.

丙、设 M 是△ABC 的边 AC 的中点,过 M 作直线交 AB 直线于 E,过 B 作直线平行于 ME 交 AC 直线于 F.求证△AEF 的面积等于△ABC 的面积的一半.

丁、一个三角形三边的长分别是3尺,4尺及$\sqrt{37}$尺,求这个三角形的最大角的度数.

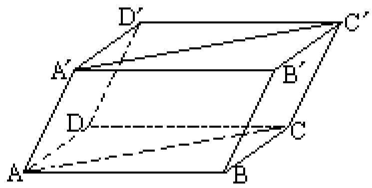
戊、设$\tan\alpha$与$\tan\beta$是方程$x^2+6x+7=0$的两个根,求证 $\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$.

二、解联立方程

$$\begin{cases} 7\sqrt{x+y}-x-y=12, \\ x^2+y^2=136. \end{cases}$$

三、设P是等边三角形ABC外接圆$\overset{\frown}{BC}$上的一点,求证 $PA^2=AB^2+PB\cdot PC$.

四、有一四棱柱体,底面 ABCD 为菱形,∠A'AB=∠A'AD（如右图）,求证平面 A'ACC'垂直于底面 ABCD.



五、若三角形的三个角成等差级数,则其中一定有一个角是 60°;若这样的三角形的三边又成等比级数,则三个角都是 60°,试证明之.

1956年试题答案

一 、甲、解: ∵$\lg 2=1-\lg 5,\lg 50=1+\lg 5$,

原式$=\lg^2 5+\lg 2\cdot\lg 50=\lg^2 5+(1-\lg 5)(1+\lg 5)=\lg^2 5+1-\lg^2 5=1$.

乙、解:方程的判别式$\Delta=(4m-1)^2+8(m^2+m)=24m^2+1$,

∵ $m^2\geq 0$,∴$\Delta>0$,

所以二个根全是实数.

丙、解:连 BM.

△AEF 的面积=△ABF 的面积+△BEF 的面积,

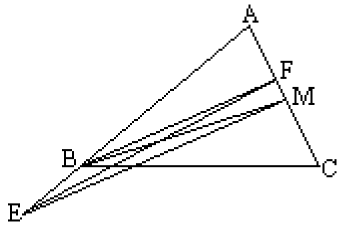
∵ BF∥MF,

∴ △BEF 的面积=△BFM 的面积,

∴ △AEF 的面积=△BAM 的面积.

$\because$ △BAM的面积 $=\dfrac{1}{2}$△ABC的面积,

$\therefore$ △AEF的面积 $=\dfrac{1}{2}$△ABC的面积.

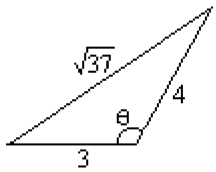


丁、解:最大角对最大边,由余弦定律得

$37=3^2+4^2-2\cdot 3\cdot 4\cos\theta$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{9+16-37}{24}=-\dfrac{1}{2}$,

$\therefore\ \theta=120°$.



戊、解:$\tan\alpha+\tan\beta=-6$, $\tan\alpha\cdot\tan\beta=7$;

$\therefore\ \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-6}{-6}=1$,

$\therefore\ \sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$.

二、解: $\begin{cases}7\sqrt{x+y}-x-y=12 & (1)\\ x^2+y^2=136 & (2)\end{cases}$

由(1)移项得 $(x+y)-7\sqrt{x+y}+12=0$,

即 $(\sqrt{x+y}-3)(\sqrt{x+y}-4)=0$,

$\therefore\ \sqrt{x+y}=3$, 或 $\sqrt{x+y})=4$.

两边分别平方, $x+y=9$, 或 $x+y=16$.

分别与(2)联立:

(Ⅰ) $\begin{cases}x+y=9,\\ x^2+y^2=136;\end{cases}$ (Ⅱ) $\begin{cases}x+y=16,\\ x^2+y^2=136.\end{cases}$

解方程组(Ⅰ),得

(Ⅰ) $\begin{cases}x+y=9,\\ x-y=\sqrt{191};\end{cases}$ (Ⅱ) $\begin{cases}x+y=9,\\ x-y=-\sqrt{191};\end{cases}$

$\begin{cases}x_1=\dfrac{9+\sqrt{191}}{2},\\ y_1=\dfrac{9-\sqrt{191}}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\dfrac{9-\sqrt{191}}{2},\\ y_2=\dfrac{9+\sqrt{191}}{2};\end{cases}$

解方程组(Ⅱ)得

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}x+y=16,\\x-y=4;\end{cases}\qquad(\text{Ⅱ})\begin{cases}x+y=16,\\x-y=-4;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_3=10,\\y_3=6;\end{cases}\qquad\begin{cases}x_4=6,\\y_4=10;\end{cases}$$

综上述,共得四组解:

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{9+\sqrt{191}}{2},\\y_1=\dfrac{9-\sqrt{191}}{2};\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=\dfrac{9-\sqrt{191}}{2},\\y_2=\dfrac{9+\sqrt{191}}{2};\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=10,\\y_2=6;\end{cases}\quad\begin{cases}x_4=6,\\y_4=10.\end{cases}$$

经检验,以上四组解均为原方程的解.

三、解:令 AP 与 BC 的交点是 M,

∵ ∠APB=∠ABM.

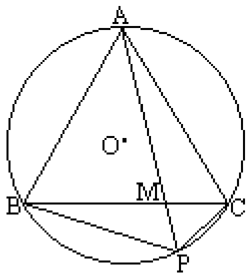
∴ △ABP∽△AMB,∴ AP·AM=AB^2,(1)

∵ ∠APC=∠BPM,∠PAC=∠PBM,

∴ △ACP∽△BMP,∴AP·MP=PB·PC, (2)

(1)+(2),得 AP·AM+AP·MP=AB^2+PB·PC,

即 AP^2=AB^2+PB·PC.



四、

解:∵AB = AD ∴AO⊥BD.

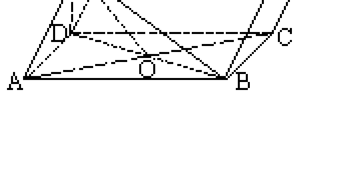
∵ ∠A'AB = ∠A'AD,

∴ △AAB≌△A'AD.

∴ A'B = A'D, ∴ A'O⊥BD,

∴ **平面**A'OA⊥BD,

故 平面 A'ACC'⊥ABCD.



五、解:令三角形的三个角是 A,B,C,

由 A-B=B-C,A+B+C=180°,

得 B=60°

设三边的长为 a, aq, aq^2,则长边 aq 的边所对的角即为 60°,

根据余弦定理,

$$(aq)^2=a^2+(aq^2)^2-2a\cdot aq^2\cos 60°,$$

$$a^2q^2=a^2+a^2q^4-a^2q^2.$$

∴ $q=\pm1$.但 $q=-1$ 不合题意,

于是此三角形边长各为 a 因而三个角都是 60°.