一、力学典型试题剖析

【题 1】 如图 1－1，一根长为 L 的均匀细杆可以绕通过其一端的水平轴 O 在竖直平面内转动，杆最初处在水平位置，杆上距 O 为 a 处放有一小物体(可视为质点)，杆与其上小物体最初均处于静止状态，若此杆突然以匀角速 ω 绕 O 轴转动，问当 ω 取什么值时小物体与杆可能相碰？（一届·预·一）

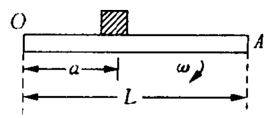

图 1－1

【解】 1. 对这一问题首先作如下分析：

当细杆以角速 ω 绕 O 轴转动时，B 的速度为零，杆上与 O 接触处则具有线速度 ωa，因而二者分离，B 作自由落体运动．由于 B 的速度不断增大，有可能追上细杆而与之碰撞，设碰撞时细杆与水平面夹角为 θ，则 θ 随 ω 的增大而增大，当 ω 超过某一数值时，B 就可能碰不上细杆而一直坠落，如果 ω 很大，细杆可能在转过一圈后从后面追上 B 而与之碰撞．所以本题要按这两种情况进行讨论．

2 求 B 追上细杆时 θ 与 ω 的关系．

设 B 经过时间 t 后与细杆在 D 处相碰(见图 1－2)，则有

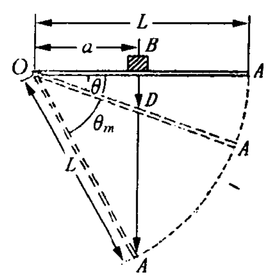

图 1－2

$$BD = a\tan\theta = \frac{1}{2}gt^2, \quad ①$$

$$\theta = \omega t. \quad ②$$

如给定 ω 的值，由此二式可求出相应的 θ 的值．

由于杆长 L 的限制，要发生碰撞，θ 值必须满足一定条件．由图 1－2 可知，此条件为

$$\theta \leqslant \theta_m = \cos^{-1}\frac{a}{L},$$

根据这一条件和 $\omega-\theta$ 曲线，可以求出相应的 ω 的取值应符合的条件．

由式①，②消去 t 得

$$\omega^2 = \frac{g}{2a}\frac{\theta^2}{\tan\theta} \quad 或 \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{2a}}\frac{\theta}{\sqrt{\tan\theta}},$$

从此方程可以看出

(1) $\theta = 0$ 时，$\omega = 0$；

(2) θ 很小时：$\tan\theta \approx \theta$，$\omega = \sqrt{\frac{g}{2a}}\sqrt{\theta}$，$\omega$ 随 θ 的增加而增加；

(3) 当 θ 值很大时，由于 $\tan\theta$ 增长极快，此时 ω 即随 θ 的增加而减少，所以 ω 有一极大值；

(4) 当 $\theta\to\pi/2$ 时，$\tan\theta\to\infty$，$\omega\to 0$.

下表是 θ 为特殊角时 ω 的值，由此可作出图 1－24 所示的 $\omega-\theta$ 曲线.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
ω	0	$\frac{\pi}{6}\sqrt[4]{3}\sqrt{\frac{g}{2a}}$ $0.69\sqrt{\frac{g}{2a}}$	$\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{g}{2a}}$ $=0.785\sqrt{\frac{g}{2a}}$	$\frac{\pi}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{g}{2a}}$ $=0.796\sqrt{\frac{g}{2a}}$	0

从此曲线可以看出，ω 达极大值（ω_M）时，θ 的值（θ_0）约在 $\pi/3$ 和 $\pi/4$ 之间，ω_M 约为 $0.8\sqrt{g/2a}$.

从图 1－3 可以看出：$\omega<\omega_M$ 时，对每一个 ω 值有两个 θ 值与之相应，即式④有两个解，θ_1 和 θ_2，$\theta_1<\theta_2$；$\omega=\omega_M$ 时，θ 只有一个解，即 θ_0，$\omega>\omega_M$ 时，θ 没有解.这些结果的物理意义是什么，我们可作如下分析（参阅图 1－4）

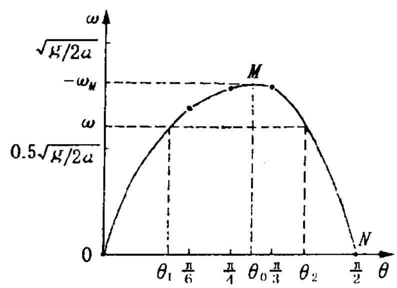

图 1－3

(1) B 作自由落体运动，何时到达何处是完全确定的，所以能否发生碰撞主要决定于细杆的角速度 ω 和 B 放在细杆的什么位置上.

(2) 开始时 B 落后于细杆，如果 ω 不是太大，B 可能赶上，当 $\theta=\theta_1$ 时 B 与细杆相遇.

(3) 假设 B 能无阻拦地穿过细杆，只要细杆很长，它一定会从后面追上 B 而与之相碰，此时的 θ 即为 θ_2.实际上 B 与细杆在 $\theta=\theta_1$ 处相碰后，它们的运动状态都发生了变化，θ_2 这个解没有实际意义，要回答本题只要考虑 θ_1 就可以了，但式④确有这个解.

(4) 如果 ω 的值增大，B 追上 OA 所需时间就增大，即图 1－4 中的 B_1 点下移，θ_1 增大；细杆从后面追上 B 所需时间则减少，即 B_2 点上移，θ_2 减小.所以 θ_1 和 θ_2 随 ω

的增大而靠拢,最后当 ω 等于某一值 ω_M 时,$\theta_1=\theta_2=\theta_0$.这就是图 1-4 所表示的物理过程.

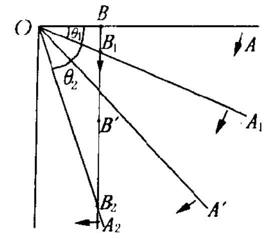

图 1-4

至于 θ_0 的值可以通过微积分求极大值的方法求出，也可以通过下面的分析求出.

如果 B_1 能穿过细杆，则 B_1 与细杆相遇时，它的速度(gt) 在垂直于细杆方向的分速度($v_r=gt\cos\theta$)必须大于此时接触点的切向速度($v_t=\omega r$),参阅图 1-5.当 $\theta=\theta_0$ 时 B 刚好能与细杆相遇而不穿过，此时 v_r 应等于v_t,即

$$gt\cos\theta_0=\omega r=\frac{\omega a}{\cos\theta_0}. \qquad ⑤$$

因此时 B 与细杆相遇,θ_0 符合式①和式②,故有

$$a\tan\theta_0=\frac{1}{2}gt^2, \qquad ⑥$$

$$\omega t=\theta_0. \qquad ⑦$$

将此三式相乘,再加以简化,得

$$\sin2\theta_0=\theta_0. \qquad ⑧$$

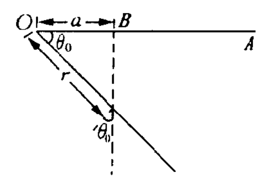

图 1-5

由式⑧可求得 θ_0 的数值（用作图法或三角函数表可求出 $\theta_0\sim 54.3°$）,相应的 ω_M 的值为$\sqrt{\frac{g}{2a}}\frac{\theta_0}{\sqrt{\tan\theta_0}}$,如果 ω 再增大一点，ωr 就大于 $gt\cos\theta_0$,B就碰不上 OA.

3. 在以上关于 $\omega-\theta$ 曲线的讨论中我们没有考虑杆的长度.如果考虑到杆长的限制,ω 取何值时 B 方能追上细杆？

如前所述,$\theta=\theta_1$ 时,B 追上细杆,由于杆长的限制,θ_1 必须满足下式

$$\theta_1\leqslant\theta_m=\cos^{-1}\frac{a}{L}.$$

下面分两种情况讨论.

(1)$\theta_m=\cos^{-1}\frac{a}{L}>\theta_0$,即 $\cos\theta_m<\cos\theta_0$ 或 $a<L\cos\theta_0$. 参阅图 1-6(a).

在此情形下,从图 1-6(a)可知,只要 ω 满足

$$\omega\leqslant\omega_M=\sqrt{\frac{g}{2a}}\frac{\theta_0}{\sqrt{\tan\theta_0}},$$

在 OM 曲线段上都可找到与之相应的 θ_1,其数值小于 θ_m,所以能发生碰撞.

(2)$\theta_m\leqslant\theta_0$,即 $a\geqslant L\cos\theta_0$,此时在OM 曲线段上有一与 $\theta=\theta_m=\cos^{-1}\frac{a}{L}$相应的 P 点,见图 1-6(b),与之相应的 ω 为

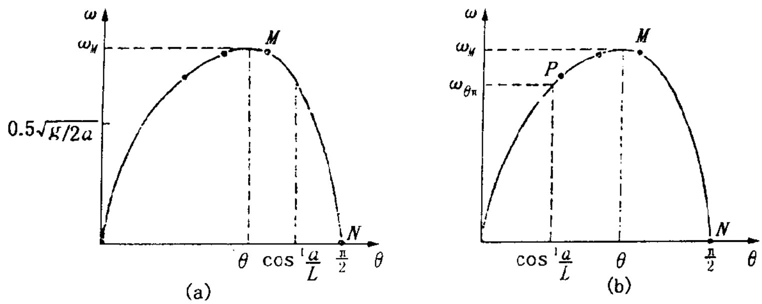

图 1-6

$$\omega_{\theta_m}=\sqrt{\frac{g}{2a}}=\frac{\theta_m}{\sqrt{\tan\theta_m}},$$

因为 $\cos\theta_m=a/L,\sin\theta_m=\sqrt{L^2-a^2}/L$,**上式变为**

$$\omega_{\theta_m}=\sqrt{\frac{g}{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{L^2-a^2}}\cos^{-1}\frac{a}{L},$$

只要 ω **满足** $\omega\leqslant\omega_\theta$ **,在** OP **曲线段上就能找到相应的** $\theta_1\leqslant\theta_m$.

表示 B **与细杆能发生碰撞.**

综上所述, B **追上细杆的条件是:**

(1) $a<L\cos\theta_0$ 时, $\omega<\omega_M=\sqrt{\frac{g}{2a}}\frac{\theta_0}{\sqrt{\tan\theta_0}}$;

(2) $a>L\cos\theta_0$ 时, $\omega\leqslant\sqrt{\frac{g}{2}}(L^2-a^2)^{-\frac{1}{4}}\cos^{-1}\frac{a}{L}$.

θ_0 **为** $\omega-\theta$ **曲线上** ω **达最大值时** θ **的值.**

4. ω **取何值时细杆转过一圈后追上** B?

此时相应的公式为

$$a\tan\theta=\frac{1}{2}gt^2,$$

$$2\pi+\theta=\omega t,$$

消去 t**,得**

$$\omega^2=\frac{g}{2a}\frac{(2\pi+\theta)^2}{\tan\theta},\text{或 }\omega=\sqrt{\frac{g}{2a}}\frac{2\pi+\theta}{\sqrt{\tan\theta}}.$$

在此式中,在 θ **从** $0\to\pi/2$ **的变化过程中** $\tan\theta$ **从** $0\to\infty$ **,而** $2\pi+\theta$**,仅从** 2π **变到** 2.5π. **所以,** $\tan\theta$ **对** ω **值的影响远大于** $2\pi+\theta$ **的影响.** ω **值随** $\tan\theta$ **的增加(相应于** θ **的增加)而减少,反之给定一** ω **值,与之相应的** θ **值随** ω **的增大而减小.**

当 $\theta=\theta_m=\cos^{-1}\frac{a}{L}$ **时,**

$$\omega_m = \sqrt{\frac{g}{2a}\frac{2\pi+\theta_m}{\sqrt{\tan\theta_m}}} = \sqrt{\frac{g}{2}}(L^2-a^2)^{-\frac{1}{4}}(2\pi+\cos^{-1}\frac{a}{L}),$$

此时细杆与 B 刚能碰上．如果 $\omega > \omega_m$，与之相对应 $\theta < \theta_m$，细杆能追上 B，$\omega < \omega_m$ 时与之相对应 $\theta > \theta_m$，细杆不能追上 B．所以细杆追上 B 的条件是

$$\omega \geqslant \sqrt{\frac{g}{2}}(L^2-a^2)^{-\frac{1}{4}}(2\pi+\cos^{-1}\frac{a}{L})$$

【分析】 本题考查学生全面分析问题的能力．①分情况讨论 B 追上细杆时，θ 与 ω 的关系，利用特殊值法作出 $\omega-\theta$ 曲线，采用假设法，在不考虑细杆长度时，全面分析 $\omega-\theta$ 曲线所表示的物理过程，得出小物体与杆可能相碰的条件．若考虑细杆的长度又分两种情况讨论得出 B 追上细杆的条件，即① $\theta_m > \theta_0$，② $\theta_m \leqslant \theta_0$，所对应的 ω 值．

②若 ω 很大，ω 为何值时转过一圈后追上 B，分情况 $\omega > \omega_m$、$\omega < \omega_m$ 讨论，关键是找到 ω_m．

此题实质是一个追值问题，可用解决此类问题的方法解决，解此题关键是 ω 很小、很大两种情况下物理过程的分析．

【题 2】有一只狐狸以不变速度 v_1 沿着直线 AB 逃跑，一猎犬以不变的速率 v_2 追击，其运动方向始终对准狐狸．某时刻狐狸在 F 处，猎犬在 D 处，$FD \perp AB$，且 $FD = L$（如图 1－7），试求此时猎犬的加速度的大小．（六届·预·七）

【解】猎犬作匀速率曲线运动，其加速度的大小与方向在不断改变．在所求时刻开始的一段很短的时间 Δt 内，猎犬运动的轨迹可近似看作是一段圆弧，设其半径为 R，则加速度是

$$a = v_2^2/R$$

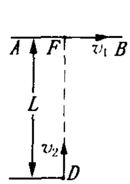

图 1－7

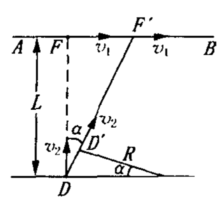

图 1－8

其方向与速度的方向垂直．如图 1－8 所示，在 Δt 时间内，设狐狸与猎犬分别到达 F' 与 D'，猎犬的速度方向转过的角度为

$$a = v_2\Delta t/R \qquad ②$$

而狐狸跑过的距离是 $v_1\Delta t \approx aL$（Δt 越小，此式越精确），因而 ③

$$v_2\Delta t/R = v_1\Delta t/L,$$

$$R = Lv_2/v_1,$$

$$a = v_2^2/R = v_1 v_2/L. \qquad ④$$

【分析】解题关键：通过分析，以小量($\Delta t \to 0$)法，($\Delta t \to 0$, $v_1 \Delta t \approx \alpha L$)，$\Delta t \to 0$ 时，猎犬的运动近似为匀速圆周运动，此题考查学生思维的灵活性，运用小量法和理想近似法解决物理问题的能力.

【题 3】 如图 1－9 所示，有两个质量相同的小球 1、2(视为质点)，在一光滑的水平直线滑槽 AB 内运动，滑槽两端有固定的墙壁.二球相遇时发生的碰撞及小球与墙壁之间的碰撞都是完全弹性的.开始时，1、2 两球分别位于将滑槽三等分的两分点处，两者运动方向相同，但速度的大小不一定相同.

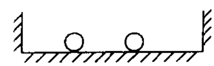

图 1－9

1. 如果两球之间的第 2 次碰撞是在滑槽中点迎面相碰，求两球初速的比值.

2. 如果两球之间的第 5 次碰撞是在滑槽中点迎面相碰，求两球初速的比值.能满足要求的解共有几种？

提示 可以先求出满足要求的一种解(即初速比值)，再求出满足要求的所有的可能解.

(六届·预·六)

【解】由于小球可视为质点且质量相同，碰撞又是完全弹性的，所以两球每次碰撞之后，相互"交换速度".因此，可以把两个小球的运动过程等效为两个彼此互不相碰的小球各自独立按自己的初速在两墙壁间运动.下面所说的两小球就是指这样的两个等效的小球.

对于这种情况，可使用如图 1－10 所示的 $t-x$ 图说明两小球各时刻的位置.A、B 为导轨的两端，设小球 1 的初速为 v_1，其在导轨中的单独运动如图中的实线所示，小球 2 的初速为 v_2，其单独运动如图中虚线所示，(设 $v_2 > v_1$).实线与虚线的每个交点都代表一次碰撞.

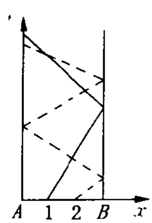

图 1－10

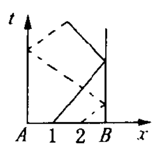

图 1－11

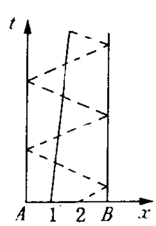

图 1－12

1. 如图 1－11 所示，设 AB 长为 l，则到第 2 次碰撞(为迎面相碰)时，小球 1、2 走过的路程分别为

$$v_1 t = \frac{2}{3} l + \frac{1}{2} l = l + \frac{1}{6} l = \frac{7}{6} l,$$

$$v_2 t = \frac{1}{3} l + l + \frac{1}{2} l = l + \frac{5}{6} l = \frac{11}{6} l,$$

可得 $v_1/v_2=7/11$.

2. 一种解可参看图 1－12 求得.

此时

$$v_1 t=\frac{1}{2}l-\frac{1}{3}l=\frac{1}{6}l,$$

$$v_2 t=\frac{1}{3}l+4l+\frac{1}{2}l=4l+\frac{5}{6}l=\frac{29}{6}l,$$

所以 $r_1/r_2=1/29$.

下面考虑满足要求的所有可能解. 设在 t 时刻两小球在滑槽中点相碰，则小球 1、2 所经过的路程分别为

$$S_1=nl+\frac{1}{6}l=v_1 t、 \quad ①$$

$$S_2=kl+\frac{5}{6}l=v_2 t. \quad ②$$

式中 n 与 k 可为零或任何正整数. 由①. ②式得到

$$v_1/v_2=(6n+1)/(6k+5). \quad ③$$

按本题要求，两球在滑槽中点相碰前必须经过 4 次碰撞，两球在中点的碰撞为迎面相碰，则两球中必须至少有一小球路程大于 $4l$ 小于 $5l$，因而 n、k 中必须至少有一个为 4，另一个的取值则可为 0、1、2、3、4. 又当 n 为奇数时，小球 1 在 t 时刻的运动方向为由 B 向 A，n 为偶数时为由 A 向 B. 反之，k 为奇数时，小球 2 在 t 时刻的运动方向为由 A 向 B，k 为偶数时为由 B 向 A，若要两球在 t 时刻迎面相碰，必须 $n+k$ 为偶数，而(n、k)取值只能是(4、0)，(4、2)，(4、4)，(2、4)，(0、4)五种. 代入③式得

$n=4, k=0$ 时，$v_1/v_2=25/5=5$，

$n=4, k=2$ 时，$v_1/v_2=25/17$，

$n=4, k=4$ 时，$v_1/v_2=25/29$，

$n=2, k=4$ 时，$v_1/v_2=13/29$，

$n=0, k=4$ 时，$v_1/v_2=1/29$，

共五种.

【分析】 解题关键：小球可视为质点，碰撞是完全弹性碰撞、动量守恒、动能守恒，所以小球碰撞之后，相互“交换速度”，因此把小球运动过程等效为两个彼此互不相碰的小球各自独立按自己的初速在两墙壁间运动. 此题训练学生建立理想模型，运用等效法解决物理问题的能力，同时也培养了学生运用数学的穷举法解决物理问题.

【题 4】 从离地面的高度为 h 的固定点 A，将甲球以速度 v_0 抛出. 抛射角为 α，$0<\alpha<\pi/2$，若在 A 点前方适当的地方放一质量非常大的平板 OG，让甲球与平板作完全弹性碰撞，并使碰撞点与 A 点等高，如图 1－13 所示，则当平板的倾角 θ 为恰当值

时($0<\theta<\frac{\pi}{2}$),甲球恰好能回到 A 点.另有一小球乙,在甲球自 A 点抛出的同时，从 A 点自由落下，与地面作完全弹性碰撞.试讨论 v_0、α、θ 应满足怎样的一些条件，才能使乙球与地面碰撞一次后与甲球同时回到 A 点. （十三届·预·七）

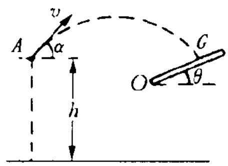

图 1－13

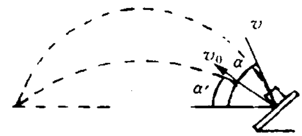

图 1－14

【解】甲球从 A 点抛出时的抛射角为 α ,速度为 v_0 ,因为碰撞点与 A 点等高,球与板的碰撞是弹性的，板的质量又很大，根据机械能守恒定律可知，球与板碰撞前的速度与碰撞后的速度都等于 v_0 ，设碰撞后甲球从板弹回时的抛射角为 α' ,如图 1－14 所示 . A 点与碰撞点之间的距离即为射程 L,若甲球又回到 A 点 ,则有

$$L=v_0^2\sin2\alpha/g=v_0^2\sin2\alpha'/g, \quad ①$$

即 $\sin2\alpha'=\sin2\alpha$.

由此得 $\alpha'=\alpha$, ②

$\alpha'=(\pi/2)-\alpha$. ③

$\alpha'=\alpha$ ，表示甲球射到平板时速度的方向与它从平板反弹出时速度的方向相反，故甲球必沿板的法线方向射向平板，反弹后，甲球沿原来的路径返回 A 点,因此有

$\alpha+\theta=\pi/2$,

$\theta=(\pi/2)-\alpha$. ④

$\alpha'=(\pi/2)-\alpha$ ，表示甲球沿与平板的法线成某一角度的方向射向平板，沿位于法线另一侧与法线成相同角度的方向弹出，然后甲球沿另一条路径回到 A 点 . 由图 13－13 中的几何关系可知

$$\alpha'+(\alpha-\alpha')/2+\theta=\pi/2, \quad ⑤$$

由③、⑤两式,得 $\theta=\pi/4$. ⑥

下面分别讨论以上两种情况下，甲球乙球同时回到 A 点应满足的条件 .

1. $\alpha'=\alpha$, $\theta=(\pi/2)-\alpha$,即 A 球沿原路径回到 A 点的情形 .

设甲球从 A 点抛出、与 OG 板碰撞，到沿原路径回到 A 点共经历的时间为 t_1 ,则有

$$t_1=2v_0\sin\alpha/g+2v_0\sin\alpha'/g=4v_0\sin\alpha/g. \quad ⑦$$

设乙球从 A 点自由落下,与地面发生一次碰撞、再回到 A 点共经历的时间为 t_2 ,则有

$$t_2=2\sqrt{2h/g}.$$

两球在 A 点相遇,要求 $t_1=t_2$,则 $4v_0\sin\alpha/g=2\sqrt{2h/g}$,

即　$\sin\alpha = (1/v_0)\sqrt{gh/2}$,　⑨

或　$\alpha = \sin^{-1}[(1 - v_0)\sqrt{gh/2}]$,　⑩

因 $\sin\alpha < 1$,由⑨式得　$v_0 > \sqrt{gh/2}$,　⑪

当 v_0 满足⑪式,甲球的抛射角 α 满足⑩式,平板的倾角 θ 满足①式,甲球才能沿原路返回 A 点并与乙球相遇.

2. $\alpha' = (\pi/2) - \alpha, 0 = \pi/4$,即甲球与 OG 板碰撞后，沿另一条路径回到 A 点的情形,设甲球自 A 点抛出，经与平板碰撞又回到 A 点经历的总时间为 t_1',则有

$t_1' = 2v_0\sin\alpha/g + 2v_0\sin\alpha'/g = 2v_0(\sin\alpha + \cos\alpha)/g$.　⑫

设乙球自 A 点下落后回到 A 点经历的总时间为 t_2'则有

$t_2' = 2\sqrt{2h/g}$,　⑬

两球在 A 点相遇,要求 $t_1' = t_2'$.

$2v_0(\sin\alpha + \cos\alpha)/g = 2\sqrt{2h/g}$,

或　$\sin(\alpha + \pi/4) = (1/v_0)\sqrt{gh}$,　⑭

因 $1 < \alpha < \pi/2$,故有　$1 \geqslant \sin(\alpha + \pi/4) > \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$,　⑯

结合⑭式,得　$\sqrt{2gh} > v_0 \geqslant \sqrt{gh}$　⑰

当 v_0 满足⑰式,甲球的抛射角 α 满足⑮式,平板的倾角 θ 满足⑥式,甲球将沿另一条路径回到 A 点，同时与乙球相遇.

综合以上讨论，结论为：

当 $v_0 > \sqrt{gh/2}$, 且当 $\alpha = \sin^{-1}[(1/v_0)\sqrt{gh/2}], \theta = (\pi/2) - \alpha$, 甲球沿原路径返回 A 点的同时,乙球也回到 A 点；

当$\sqrt{2gh} > v_0 > \sqrt{gh}$,且 $\alpha = \sin^{-1}[(1/v_0)\sqrt{gh}] - \pi/4, \theta = \pi/4$, 甲球还可沿另一路径回到 A 点,这时乙球也正好回到 A 点.

【分析】 此题应分步考虑,甲球满足什么条件时,才能回到 A 点,再分析怎样才能保证甲球和乙球同时回到 A 点,而乙球回到 A 点所需的时间是一个确定值.解题关键是要抓住甲球与平板做弹性碰撞后，其速度大小不会改变.能培养学生沉着、冷静、有条不紊地分析问题的能力.

【题 5】 (1)三个质量皆为 m 的质点 A, B, C 组成一边长为 a 的等边三角形,如图 1-15 质点之间有万有引力作用.为使此三角形保持不变，三个质点应皆以角速度 ω 绕通过它们的质心 O 并垂直于三角形平面的轴旋转.试求此角速度的大小（将结果用 m, a 以及万有引力常数 G 表示）.

(2) 现将上述三个质量相同的质点换成质量分别为 m_A、m_B、m_C ($m_A \neq m_B \neq m_C$) 的质点.如仍欲保持上述等边三角形不变，此时三质点应皆以角速度 ω' 绕通过新的

质心 O' 并垂直于三角形平面的轴旋转．试求此角速度的大小．

（二届·决·五）

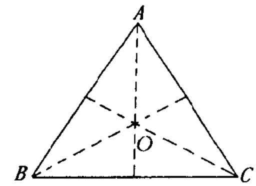

图 1－15

【解】 (1)质点 B 对质点 A 的万有引力为 $F_{AB}=G\frac{m^2}{a^2}$，方向由 A 指向 B，质点 C 对质点 A 的万有引力为 $F_{AC}=G\frac{m^2}{a^2}$，方向由 A 指向 C，质点 A 受到的总作用力为

$$F_A=F_{AB}\cos30°+F_{AC}\cos30°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}G\frac{m^2}{a^2}=\sqrt{3}G\frac{m^2}{a^2},$$

方向沿 AO．质点 A 绕 O 旋转，所需的向心力即由 F_A 提供

$$\sqrt{3}G\frac{m^2}{a^2}=\omega^2R_{AO}$$

由于三者质量相同，它们的质心即位于 $\triangle ABC$ 的重心处，故有

$$R_{AO}=\frac{2}{3}a\cos30°=\frac{1}{\sqrt{3}}a,$$

代入上式得 $\sqrt{3}G\frac{m^2}{a^2}=m\omega^2\frac{a}{\sqrt{3}}$，

$$\therefore\quad \omega^2=G\frac{3m}{a^3},\quad \omega=\sqrt{G\frac{3m}{a^3}}.$$

对其他两质点也得出相同的 ω．

(2)如图 1－16 以 D 表示 m_B 和 m_C 的质心，则

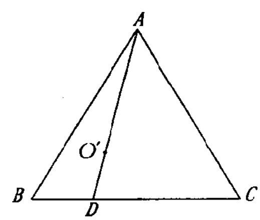

图 1－16

$$\overline{BD}=\frac{m_C}{m_B+m_C}a,$$

$$\overline{DC}=\frac{m_Ba}{m_B+m_C}a,$$

$$\therefore\quad \overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2AB\cdot\overline{BD}\cos60°$$

$$=a^2+\left(\frac{m^C}{m^B+m^C}\right)^2a^2-\frac{m_C}{m_B+m_C}a^2=\frac{m_B^2+m_C^2+m_Bm_C}{(m_B+m_C)^2}a^2.$$

又以 O' 表示三个质点．m_A,m_B,m_C 的质心，则 O' 点在 AD 上，且有

$$r_A=AO'=\frac{m_B+m_C}{m_A+m_B+m_C}\cdot\overline{AD}=\frac{m_B+m_C}{m_a+m_B+m_C}\times$$

$$\frac{\sqrt{m_B^2+m_C^2+m_Bm_C}}{m_B+m_C}a=\frac{\sqrt{m_B^2+m_C^2+m_Bm_C}}{m_A+m_B+m_C}a.$$

同理可得，

$$r_B=\overline{BO'}=\frac{\sqrt{m_C^2+m_A^2+m_Cm_A}}{m_A+m_B+m_C}a$$

另一方面 m_C 对 m_A 的作用力是

$$f_{AC}=km_Am_C,k=\frac{C}{a^2}.$$

同理可得

$$f_{AB}=km_Am_B.$$

如图 1－17,由于 $f_{AB}/f_{AC}=m_B/m_C=\overline{DC}/\overline{BD}=\overline{AE}/\overline{AF}$,即 f_{AC} 和 f_{AB} 的合力 f_A 的作用线通过质心 O',其大小

$$f_A=\sqrt{f_{AB}^2+f_{AC}^2+2f_{AB}f_{AC}\cos60^\circ}$$

$$=km_A\sqrt{m_B^2+m_C^2+m_Bm_C}.$$

同理可证,f_B 的作用线也通过质心 O',且

$$f_B=km_B\sqrt{m_C^2+m_A^2+m_Cm_A} \quad ④$$

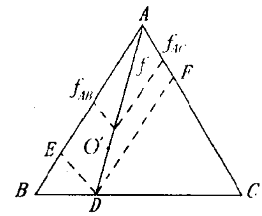

图 1－17

由①、②、③和④式得

$$\frac{f_A}{m_Ar_A}=\frac{f_B}{m_Br_B}=\frac{k}{a}(m_A+m_B+m_C)=\frac{G}{a^3}(m_A+m_B+m_C).$$

同理可得

$$\frac{f_B}{m_Br_B}=\frac{f_C}{m_Cr_C}=\frac{G}{a^3}(m_A+m_B+m_C).$$

⑤⑥两式说明,m_A、m_B、m_C 可在三个质点的初位置所决定的平面内保持相对位置不变地绕质心 O'作匀速圆周运动,作圆周运动的角速度 ω'亦可由(5)、(6)两式得出为

$$\omega'=\sqrt{\frac{G}{a^3}(m_A+m_B+m_C)}.$$

【分析】解此题必须明确：①质点 A、B、C 以角速 ω 做圆周运动的向心力是另外两个质点作用在它上的万有引力的合力提供的. ②关键是求出 A、B、C 三个质点做圆周运动的新的质心 O'的位置. O'与 A、B、C 三个质点的距离不同，即每个质点做圆周运动的半径 R'_A、R'_B、R'_C 各不相同,故求 R'_A,R'_B,R'_C 是至关重要的.

此题除了培养了学生分析问题、逻辑思维能力外，更重要的是培养了学生运用数学方法解决问题的能力.

【题 6】 一个质量 $m=20$ 千克的钢件,架在两根完全相同的、平行的长直圆柱上(如图 1－18 所示). 钢件的重心与两柱等距. 两柱的轴线面在同一水平面内. 圆柱的半径 $r=0.025$ 米,钢件与圆柱间的滑动摩擦系数 $\mu=0.20$. 两圆柱各绕自己的轴线作转向相反的转动，角速度 $\omega=40$ 弧度/秒. 若沿平行于柱轴的方向施力推着钢件作速度

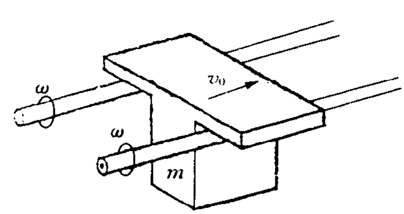

图 1－18

为 $v_0=0.050$ 米／秒的匀速运动，推力是多大？设钢件左右受光滑导槽限制（图中未画出），不发生横向运动．

（二届·预·六）

【解】因为钢件与圆柱之间有相对运动，所以摩擦力等于摩擦系数与正压力的乘积．因为钢件与圆柱接触处的法线是竖直的，且钢件的重心与两圆柱等距，所以每根圆柱所受正压力 $N=\frac{1}{2}mg$，每根圆柱给钢件的摩擦力的大小为

$$f=\mu N=\frac{1}{2}\mu mg, \quad ①$$

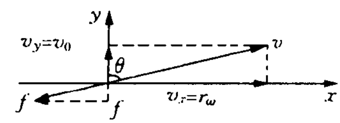

图 1－19

要使钢件沿平行于柱轴的方向做匀速运动，则推力的大小应等于摩擦力 f 在这个方向上的分力的两倍．作用在钢件上的摩擦力的方向与接触处钢件相对于圆柱的速度方向相反．以图 1－19 中前面那个圆柱为例，在接触处，钢件相对于圆柱一方面有向前的速度 v_0，取此方向为 y 轴的正方向；另一方面因为圆柱向里旋转，所以接触处钢件相对于圆柱还有水平向外且垂直于 y 轴的速度 $r\omega$，取此方向为 x 轴的正方向．合速度的方向则如图 1－19 所示，它与 y 轴之间的夹角 θ 应满足

$$\tan\theta=\frac{v_x}{v_y}=\frac{r\omega}{v_0}, \quad ②$$

摩擦力的方向与合速度的方向相反，如图 1－19 中 f 箭头所示．由前面的分析可知，推力

$$F=2f_y=2f\cos\theta, \quad ③$$

由(1)、(2)、(3)三式可求得

$$F=\frac{\mu mg}{\sqrt{1+\left(\frac{r\omega}{v_0}\right)^2}},$$

代入数值，得 $F\approx2.0$ 牛顿．

【分析】解本题的关键：首先要能够正确求出摩擦力的大小，其次确定钢件相对于圆柱的相对运动方向从而得出相反方向即为摩擦力的方向，即摩擦力沿平行于圆柱方向的分力．

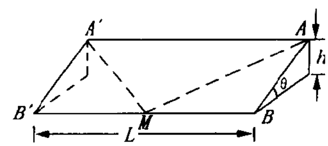

图 1－20

【题 7】在某自行车赛场直行跑道的一侧有一外高内低、倾角为 θ 的斜面，直行跑道长度为 L，斜面上端高度为 h，如图 1－20 所示．运动员由 A 点出发，终点为 A'．运动员可以选行直线 AA' 行进、或沿对称折线 AMA' 行进的路线．若出发时自行车的速度均为 V_0，且在行进途中运动员蹬车时的驱动力等于所受的阻力，

又设车轮与地面间的侧向摩擦足以阻止车轮侧滑,若要取得较好的成绩,运动员应采用哪种路线？

（十二届·决·四）

【解】分析运动员沿对称折线 AMA' 的运动,令 $\angle AMB=\omega$. 由于驱动力和阻力相等.它们相互抵消,运动员所受的力为重力 $W=mg$,斜面支持力 N 和阻止车轮侧滑的侧向摩擦力 F_f.重力可分解为与斜面垂直的分力 $W_\perp$ 与 N 平衡,而 $W_{/\!/}$ 又可分解为沿 AM 的方向的分力 $F_{滑}=mg\cdot\sin\theta\sin\omega$ 和与 AM 方向垂直的分力 $F_{侧}=mg\cdot\sin\theta\cos\omega$. $F_{侧}$ 与 F_f 平衡,而 $F_{滑}$ 使运动员作匀加速运动，加速度的大小为

$$a=g\cdot\sin\theta\sin\omega \qquad ①$$

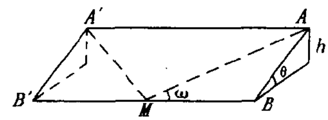

图 1－21

运动员到达 M 点时的速度为 V',则有

$$V'^2-V_0^2=2a\,\overline{AM}.$$

由运动轨道的几何关系,可知

$$\overline{AB}=h/\sin\theta=\overline{AM}\cdot\sin\omega,$$

代入上式并用①式,有

$$V'^2-V_0^2=2(g\sin\theta\sin\omega)\cdot h/(\sin\theta\cdot\sin\omega)=2gh.$$

因此,不论 ω 取何值, V' 的值总是

$$V'=\sqrt{V_0^2+2gh} \qquad ②$$

实际上，由于驱动力和阻力平衡,②式也是机械能守恒的必然结果.运动员由 A 到 M 的平均速度是

$$\bar{V}=(V_0+V')/2 \qquad ③$$

运动员若沿 AA' 直线行进,则为一等速直线运动,速度为 V_0. 而沿斜线 AM 行进时,其沿 AA' 方向分速度的平均值是 $V\cdot\cos\omega$,故运动员走 AM 线而有优势的条件是

$$\bar{V}\cdot\cos\omega>v_0 \qquad ④$$

MA' 段与 AM 段对称,运动员在 MA' 段所用时间与 AM 段相同，故优势条件不变，将③式代入④式,有

$$\cos\omega>\frac{V_0}{V}=\frac{2V_0}{V'+V_0}=\frac{2V_0}{\sqrt{V_0^2+2gh}+V_0}, \qquad ⑤$$

⑤式右边小于 1,故 ω 有解,即存在一临界角 ω_0

$$\cos\omega_0=\frac{2V_0}{\sqrt{V_0^2+2gh}+V_0}, \qquad ⑥$$

当 $\omega<\omega_0$ 时,走对称折线有利.

将优势条件换算成场地条件,若要能满足⑤式,则必需

$$\frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2+h^2\csc^2\theta}}>\frac{2V_0}{\sqrt{V_0^2+2gh}+V_0}, \qquad ⑦$$

$$\frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2+h^2\csc^2\theta}}>\frac{2V_0^2}{V_0^2+gh+V_0\sqrt{V_0^2+2gh}}$$

$$\frac{(L/2)^2}{h^2\csc^2\theta} > \frac{2V_0^2}{V_0\sqrt{V_0^2+2gh+gh-V_0^2}} \approx \frac{gh}{V_0^2}, \qquad ⑧$$

最后得到场地判据为

$$L > (V_0/\sqrt{gh})\cdot 2h\csc\theta.$$

若赛道参数 $L\cdot h\cdot\theta$ 满足⑨式条件,则运动员采用 AMA' 折线有利,若⑨式条件不能满足,运动员应选行 AA' 直线.

【分析】此题首先要求解题者正确理解“驱动力等于阻力”“侧向摩擦阻止车轮侧滑”这些物理术语的含义，在对运动员沿折线运动的受力进行分析时，还需要学生有一定的空间想象能力，此题的关键在于得出用速度表示的优势条件后，能转换成用场地条件来表示，对思维能力和数学能力有较高要求.

【题8】如图 1-22所示,有两条位于同一竖直平面内的水平轨道，相距为 h.轨道上有两个物体 A 和 B,它们通过一根绕过定滑轮 O 的不可伸长的轻绳相连接.物体 A 在下面的轨道上以匀速率 v 运动.在轨道间的绳子与轨道成30°角的瞬间,绳子 BO 段的中点处有一与绳相对静止的小水滴 P 与绳子分离，设绳长 BO 远大于滑轮直径，求：

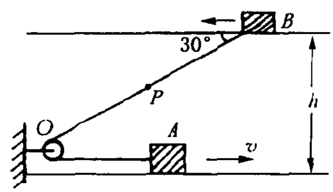

图 1-22

(1)小水滴 P 脱离绳子时速度的大小和方向.

(2)小水滴 P 离开绳子落到下面轨道所需要的时间　　（十五届·复·二）

【解】 1.物体 B 在上轨道的运动可以看成是沿绳子的运动和垂直于绳子的运动(即绳子绕 O 点的转动)的合成.

B 沿绳子运动的分速度 $v_{B//}=v$,因而垂直于绳子的分速度 $v_{B\perp}=v\tan\theta$(θ 为 BO 与轨道夹角,这里 $\theta=30°$) ,如图 1-23所示.

绳子中点小水滴 P 的速度也可分解成沿着绳子的分速度和垂直绳子的分速度，即

$v_{P//}=v$, $v_{P\perp}=v\tan\alpha$

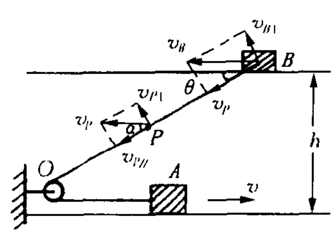

图 1-23

小水滴 P 垂直绳子的分速度可看做绳子绕 O 点转动，设该时刻绳子转动的角速度为 ω ,则有

$$\omega = v_{P\perp}/(\overline{BO}/2) = v_{B\perp}/\overline{BO}, \qquad ①$$

从而有 $$v_{P\perp} = v_{B\perp}/2 = v\tan\theta/2, \qquad ②$$

于是有 $$\tan\alpha = \tan\theta/2 = \sqrt{3}/6, \qquad ③$$

则 $$\alpha = \arctan(\sqrt{3}/6), \qquad ④$$

α 角是 v_P 与$\overline{BO}$的夹角,v_P 与水平方向的夹角为 $30°-\theta$.

水滴离开绳子的速度大小为

$$v_P = \sqrt{v_{P/\!/}^2 + v_{P\perp}^2} = \sqrt{v^2 + (v\tan\theta/2)^2}$$
$$= v\sqrt{1+\tan^2\theta/4} = v\sqrt{13/12}. \quad ⑤$$

2. 由 $\alpha < 30°$ 可知，水滴 P 做斜向下抛运动，P 在竖直方向的分运动为初速度 v_{Py0}、加速度为 g 的匀加速直线运动，则有

$$v_{Py0} = v\sin\theta - v_{P\perp}\cos\theta = v(\sin\theta - \tan\theta\cos\theta/2) = v/4, \quad ⑥$$

因而 $\frac{1}{2}h = \frac{1}{4}vt + \frac{1}{2}gt^2$. ⑦

由此方程可解出 t，取 t 为正值的解，得

$$t = \frac{1}{4g}(\sqrt{v^2 + 16gh} - v). \quad ⑧$$

【分析】 本题关键在绳上各点沿绳速度相同．注意速度分解不要与速度的合成混淆．如 B 的速度可分解为沿绳方向和垂直于绳的方向，组合速度一定是水平向左的．

【题 9】一固定的斜面，倾角 $\theta = 45°$，斜面长 $L = 2.00$m．在斜面下端有一与斜面垂直的挡板．一质量为 m 的质点，从斜面的最高点沿斜面下滑，初速度为零．质点沿斜面下滑到斜面最低端与挡板发生弹性碰撞．已知质点与斜面间的滑动摩擦因数 $\mu = 0.20$．试求此质点从开始运动到与挡板发生第 11 次碰撞的过程中运动的总路程．

（十五届·预·二）

【解】质点在沿斜面滑动的过程中，受到摩擦力 f 的大小为

$f = \mu mg\cos\theta$

若质点从斜面最高点第一次到达斜面最低端时的速度为 v_1，则有

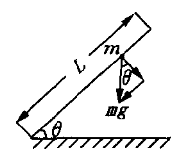

图 1－24

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgL\sin\theta - \mu mgL\cos\theta \quad ①$$

质点与斜面挡板发生弹性碰撞后，以速度 v_1 开始沿斜面上滑．若上滑的最大路程为 L_1，则有

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \mu mgL_1\cos\theta + mgL_1\sin\theta, \quad ②$$

由①、②两式得

$$mgL\sin\theta - \mu mgL\cos\theta = \mu mgL_1\cos\theta + mgL_1\sin\theta$$

$$\frac{L_1}{L} = \frac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\sin\theta + \mu\cos\theta}$$

用 α 代表上式等号右边的数值，并以 $\theta = 45°$，$\mu = 0.20$ 代入，则有

$$L_1 = \alpha L, \alpha = \frac{1-0.20}{1+0.20} = \frac{2}{3}, \quad ③$$

按同样的推理可知质点在第 2 次碰撞后上滑的距离为

$$L_2 = \alpha L_1 = \alpha^2 L.$$

同理可知，在第 10 次碰撞后上滑的距离为

$$L_{10} = \alpha^{10} L.$$

第 1 次碰撞前质点运动的路程为

$$s_1 = L.$$

第 2 次碰撞前质点运动的总路程为

$$s_2 = L + 2L_1 = L + 2\alpha L,$$

同理可知，在第 11 次碰撞前即从开始到发生第 11 次碰撞期间，质点运动的总路程为

$$s_{10} = L + 2\alpha L + 2\alpha^2 L + \quad + 2\alpha^{10} L, \qquad ④$$

由等比级数的知识可知

$$s_{10} = L(1 + 2\alpha \cdot \frac{\alpha^{10} - 1}{\alpha - 1}), \qquad ⑤$$

$$s_{10} = 9.86\text{m}.$$

【分析】这是一道牛顿运动定律与动能定理的综合题，在数学上用到了等比数列.

【题 10】 有三个质量相等的粒子，粒子 1 与粒子 2 中间夹置一个被充分压缩了的轻质短弹簧，并用轻质细线缚在一起(可视为一个小物体)，静止地放置在光滑水平面上. 另一个粒子 3 沿该光滑水平面射向它们. 粒子 3 和粒子 1 相碰撞并粘连在一起运动. 后轻质细线自动崩断，使弹簧释放，三个粒子分成两部分：一部分为粒子 2，另一部分为粘在一起的粒子 1、3. 已知弹簧被充分压缩时的弹性势能是 E_P. 为了使被放出的粒子 2 的散射角保持在 30°之内，求粒子 3 入射时的动能应满足什么条件.

提示 此处散射角是指粒子 2 射出后的运动方向与粒子 3 入射时的运动方向之间的夹角.

(十六届·决·五)

【解】建立如图 1－25 所示的坐标系，以粒子 3 入射速度 v_0 为 x 轴正方向. 设每个粒子的质量为 m. 当粒子 3 与 1 相碰并粘在一起，而在细线断开之前，三个粒子是一起运动的，若其共同速度为 v，按照动量守恒定律有

$$mv_0 = 3mv \qquad ①$$

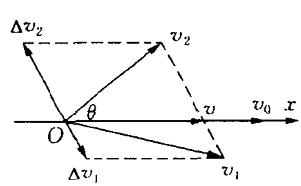

图 1－25

即 v 也沿 x 方向，其大小为 $v = \dfrac{v_0}{3}$

细线断开后弹簧释放，弹性力做功使弹性势能 E_P 转化为粒子 1、3 和粒子 2 的动能增量. 设粒子 1、3 最后的速度为 v_1，粒子 2 最后的速度为 v_2. 由机械能守恒和动量守恒定律可知

$$\frac{1}{2}(2m)v_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2=\frac{1}{2}(3m)v^2+E_P, \quad ②$$

$$(2m)v_1+mv_2=(3m)v=mv_0. \quad ③$$

因弹簧安置的方向不同等原因,粒子 2 将可能以不同的速度向各方向飞出，设 v_2 与 v_0 的夹角为 θ.在细线崩断过程中,粒子 2 和粒子 1、3 由于受到弹力的冲量作用，都将产生相应的动量的增量，从而有速度的增量.设其速度增量分别为 Δv_1 和 Δv_2 ,则有

$$\begin{array}{ll} v_1=v+\Delta v_1 & \\ v_2=v+\Delta v_2 & \end{array} \text{或} \begin{array}{l} \begin{cases} v_{1x}=v_x+\Delta v_{1x} \\ v_{1y}=v_y+\Delta v_{1y} \end{cases}, \\ \begin{cases} v_{2x}=v_x+\Delta v_{2x} \\ v_{2y}=v_y+\Delta v_{2y} \end{cases} \end{array} \quad ④$$

将④式代入③式,得

$$(2m)(v+\Delta v_1)+m(v+\Delta v_2)=3mv,$$

因而

$$\Delta v_1=-\frac{1}{2}\Delta v_2 \quad \text{或} \begin{cases} \Delta v_{1x}=-\frac{1}{2}\Delta v_{2x} \\ \Delta v_{1y}=-\frac{1}{2}\Delta v_{2y} \end{cases} \quad ⑤$$

②式可写成如下的形式

$$\frac{1}{2}(2m)(v_{1x}^2+v_{1y}^2)+\frac{1}{2}m(v_{2x}^2+v_{2y}^2)=\frac{1}{2}(3m)(v_x^2+v_y^2)+E_P,$$

将④、⑤两式代入上式并化简有,

$$\frac{1}{2}(2m)[(v_x+\Delta v_{1x})^2+(v_y+\Delta v_{1y})^2]+\frac{1}{2}m[(v_x+\Delta v_{2x})^2+(v_y+\Delta v_{2y})^2]$$

$$=\frac{1}{2}(3m)(v_x^2+v_y^2)+\frac{3}{4}m(\Delta v_{2x}^2+\Delta v_{2y}^2)$$

$$=\frac{1}{2}(3m)(v_x^2+v_y^2)+E_P,$$

得到 $$E_P=\frac{3}{4}m(\Delta v_2)^2, \quad ⑥$$

⑥式表明,在 E_P 给定的条件下，Δv_2 的大小是一定的，v_2 的大小和方向与 Δv_2 的方向有关,即与弹簧安置的方向有关,如图 1－26所示.若 v 和 v_2 的大小一定，即图中圆的半径和 P点到圆心的距离一定,当 v_2 与 Δv_2 垂直时,θ 角最大,这时 v_2 的方向沿圆的切线方向，所以在弹簧各种可能的安置方向中，以图 1－26所示的沿 Δv_2 的方向安置时,粒子 2有最大散射角,要求粒子 2 的散射角保持在 30°以内,必须要求

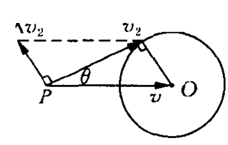

图 1－26