教育科学“十五”国家规划课题研究成果

理工数学实验

主编　魏贵民　郭　科

编委　周仲礼　王茂芝　王权峰　魏友华

袁　勇　陈国东　余海洋　白　林

高等教育出版社

内容提要

本书是教育科学“十五”国家规划课题研究成果，是编者总结多年来的教学经验，结合本校数学教学实际编写的。

全书按照高等理工科院校有关数学课程教学的先后顺序分为六章：一元微积分（含级数），多元微积分（含空间解析几何和常微分方程），线性代数，概率论与数理统计，综合实验，以及附录（包括专题实验参考答案和 Mathematica 软件操作指南）。前四章每章分为基础实验和专题实验，并为读者设计了与之对应、使用方便的实验报告以便填写。

本书紧密结合经典数学知识，选材广泛，既注重让学生学会用计算机解决经典数学中的问题，又注重训练学生灵活使用数学知识解决实际问题的能力。可作为大学低年级数学实验课程的教材，也可作为大学数学教师、工程技术人员、数学建模参赛人员的参考书。

总　　序

为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展需要，满足我国高校从精英教育向大众化教育的重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的各类要求，探索和建立我国高等学校应用型本科人才培养体系，全国高等学校教学研究中心（以下简称"教研中心"）在承担全国教育科学"十五"国家规划课题——"21 世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践"研究工作的基础上，组织全国 100 余所以培养应用型人才为主的高等院校，进行其子项目课题——"21 世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践"的研究与探索，在高等院校应用型人才培养的教学内容、课程体系研究等方面取得了标志性成果，并在高等教育出版社的支持和配合下，推出了一批适应应用型人才培养需要的立体化教材，冠以"教育科学"十五"国家规划课题研究成果"。

2002 年 11 月，教研中心在南京工程学院组织召开了"21 世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践"课题立项研讨会。会议确定由教研中心组织国家级课题立项，为参加立项研究的高等院校搭建高起点的研究平台，整体设计立项研究计划，明确目标。课题立项采用整体规划、分步实施、滚动立项的方式，分期分批启动立项研究计划。为了确保课题立项目标的实现，组建了"21 世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践"课题领导小组（亦为高校应用型人才立体化教材建设领导小组）。会后，教研中心组织了首批课题立项申报，有 63 所高校申报了近 450 项课题。2003 年 1 月，在黑龙江工程学院进行了项目评审，经过课题领导小组严格的把关，确定了首批 9 项子课题的牵头学校、主持学校和参加学校。2003 年 3 月至 4 月，各子课题相继召开了工作会议，交流了各校教学改革的情况和面临的具体问题，确定了项目分工，并全面开始研究工作。计划先集中力量，用两年时间形成一批有关人才培养模式、培养目标、教学内容和课程体系等理论研究成果报告和在研究报告基础上同步组织建设的反映应用型人才培养特色的立体化系列教材。

与过去立项研究不同的是，"21 世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践"课题研究在审视、选择、消化与吸收多年来已有应用型人才培养探索与实践成果基础上，紧密结合经济全球化时代高校应用型人才培养工作的实际需要，努力实践，大胆创新，采取边研究、边探索、边实践的方式，推进高校应用型本科人才培养工作，突出重点目标，并不断取得标志性的阶段成果。

教材建设作为保证和提高教学质量的重要支柱和基础，作为体现教学内容和教学方法的知识载体，在当前培养应用型人才中的作用是显而易见的。探索、建设适应新世纪我国高校应用型人才培养体系需要的教材体系已成为当前我国高校教学改革和教材建设工作面临的十分重要的任务。因此，在课题研究过程中，各课题组充分吸收已有的优秀教学改革成果，并和教学实际结合起来，认真讨论和研究教学内容和课程体系的改革，组织一批学术水平较高、教学经验较丰富、实践能力较强的教师，编写出一批以公共基础课和专业、技术基础课为主的有特色、适用性强的教材及相应的教学辅导书、电子教案，以满足高等学校应用型人才培养的需要。

我们相信，随着我国高等教育的发展和高校教学改革的不断深入，特别是随着教育部‘高等学校教学质量和教学改革工程’的启动和实施，具有示范性和适应应用型人才培养的精品课程教材必将进一步促进我国高校教学质量的提高。

全国高等学校教学研究中心

2003 年 4 月

序

在我国大学中开设‘ 数学实验 ’课虽然不过十年，但经过广大教师的努力，这方面的教材已出版了一批，它们都是在计算机及其数学平台日益迅速发展的背景下，训练学生自己动手，培养在某种数学软件平台上进行一些基本数学运算、建模及求解的能力，由于侧重点和学习者条件的不同，它们也就显得各具特色。这是一种可喜的现象。

这本《理工数学实验》是编者结合理工科数学教学改革的实际，经过大量的教学实践编写而成。内容分为‘ 基础实验 ’和‘ 专题实验 ’两大部分，前者着重于基本的数学运算，后者主要以建模为主。通过这本教材，希望由同学自己动手，用他们熟悉的、喜欢‘ 玩 ’的计算机解决经过简化的实际问题，让学生亲身体会到用数学解决实际问题的酸甜苦辣。用而后知不足，在培养学生独立解决问题的同时，激发他们进一步学好数学的愿望，使学生从建模和求解过程中不仅能体会到理论与实践之间的相互作用，而且还能从结果的实际意义中看到数学的应用价值。

“ 数学实验 ’是一门新课，没有现成的、固定的模式，希望编者继续努力探索，在这方面作出更多创造性的成果。

萧树铁 2002年12月

前　　言

数学实验是理工科院校十多年来的数学教学改革成果.它将经典数学知识,数学建模与计算机应用三者融为一体,使学生深入理解数学基本概念,基本理论,熟悉常用数学软件,既培养了学生进行数值计算和数据处理的能力,也培养了学生应用数学知识建立数学模型,解决实际问题的能力.同时还可以激发学生学习数学的兴趣.

本书内容分为六章.前四章是按照理工科院校数学教学的先后顺序安排的,分别为:第一章一元微积分(含级数),第二章多元微积分(含空间解析几何和常微分方程),第三章线性代数,第四章概率论与数理统计,各章又分为基础实验和专题实验.基础实验主要让学生学会如何用 Mathematica 软件解决经典数学中的一些问题,专题实验主要让学生体会怎样用该部分的数学知识去建立数学模型,解决实际问题.在专题实验后面一般附有思考与练习,可供学生自己动手完成.第五章是综合实验,具有一定的灵活性和难度,供学有余力的学生学习.附录为专题实验参考答案和 Mathematica 软件操作指南,供读者在使用本书的过程中查阅.

本书实验安排层次分明,紧密结合大学数学知识,易教易学.同时在专题实验中有适当的超前性,但其内容也是学生今后要学到用到的,并且很容易接受和掌握的.实验课题选材广泛,论述清楚,具有一定的实用价值和趣味性.

本书的主要读者为大学一、二年级的学生.数学实验是与一元微积分、多元微积分、线性代数、概率论与数理统计四门课程同步开设的.学生应在教师的指导下完成全部的基础实验.对于专题实验,可根据时间的多少灵活安排,可由学生在教师的指导下完成,也可由学生在课外单独完成;可以完成全部实验,也可以选择完成部分实验.

本书由魏贵民教授,郭科教授组织编写.各实验的编写情况(按照实验的先后顺序排列)如下:

袁　勇:第一章基础实验 1,2,3,4,专题实验 1,2,3,4,5,综合实验 3.

魏友华:第二章基础实验 1,2,3,4,专题实验 1,2,3,4,5,7,8,9,10,综合实验 1.

王权峰:第三章基础实验 1,2,3,4,5,专题实验 1,2,3,4.

周仲礼:第四章基础实验 1,2,3,4,5,专题实验 1,3,4,6,综合实验 2.

王茂芝:综合实验 4,9,10,11,12.

郭　科：第二章专题实验 11，12，第四章专题实验 2.

魏贵民：第二章专题实验 6，第四章专题实验 5.

陈国东：第四章专题实验 8，综合实验 5，6.

余海洋：第四章专题实验 7，综合实验 7，8.

白　林：Mathematica 软件操作指南.

成都理工大学应用数学系胥泽银教授不辞辛劳完成了本书的主审工作，并提出了许多建设性的建议，在此编者向他表示衷心的感谢！

在本书的编写过程中参阅了许多专家和学者的论著文献，并引用了部分文献中的实例，恕不一一指明出处，在此一并向有关作者致谢！

本书在编写过程中得到了成都理工大学和信息管理学院的大力支持，在此表示衷心感谢！

由于水平及时间有限，误漏之处在所难免，敬请读者批评指正.

编　者

2003 年 3 月于成都理工大学

目　　录

第一章　一元微积分

基础实验1　函数与极限

一、实验内容

函数图形的显示，极限的运算，极值的计算.

二、实验目的

1. 熟悉 Mathematica 软件的基本操作.
2. 掌握函数与极限的有关操作命令.
3. 学会利用 Mathematica 软件对函数进行分析研究.

三、预备知识

1. Plot[f[x], {x,min,max},选项]

功能：画出函数 $f(x)$ 随 x 从 min 到 max 间的图形，选项可缺省（下同，详见附录）.

2. Plot[{f1,f2,…}, {x,min,max},选项]

功能：在同一坐标系下画出函数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，…的图形，当 x 从 min 到 max.

3. ParametricPlot[{x[t],y[t]}, {t,min,max},选项]

功能：画出参数方程 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 当 t 从 min 到 max 的图形.

4. Show[pic]

功能：显示图形 pic.

5. Show[pic,选项 -> 选项值]

功能：修改图形 pic 的各种选项并显示图形.

6. Show[pic1,pic2,…,picn]

功能：将 $pic1$，$pic2$，…，$picn$ 在同一个坐标系中显示.

7. Show[%n,%m]

功能：将第 n 及第 m 个函数图形在同一坐标系中显示.

8. Limit[f[n],n -> Infinity]

功能：求函数 $f(n)$ 在 n 趋于∞时的极限值.

9．Limit[f[x],x->x_0,Direction->±1]

功能 求函数 $f(x)$在 x_0 处的左、右极限.

10．FindMinimum[f[x]，{x,x_0}]

功能：从点 x_0 开始求函数 $f(x)$的局部极小值.

四、实验步骤

1．**利用图形显示命令画出下列函数的图形并分析其性质：**

(1) $f(x)=(x^2-x)\sin x$，$x\in[0,16]$

(2) $f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x^2}$，$x\in[-5,5]$

(3) $f_1(x)=\sin x$　　$f_2(x)=\sin 2x$，$x\in[0,2\pi]$

(4) $\begin{cases}x=\sin t\\ y=\sin 2t\end{cases}$，$t\in[0,2\pi]$

2．**计算下列极限：**

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{1}{n}$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n+1}\sin\dfrac{n+1}{n^2}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{2n}$　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)n^n}$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$　　(6) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{x}$

(7) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{x}$　　(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

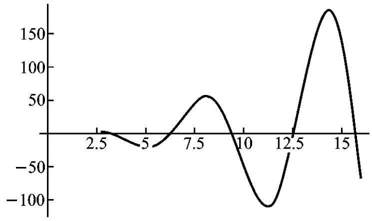
(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{6x^2-12x+1}$　　(10) $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$　　(11) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}$

3．**求函数** $f(x)=x\sin 4x$ **在** $x=2.3$ **附近的极小值,并根据图形对照**.

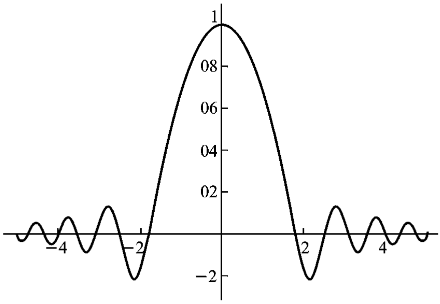
五、实验简单操作过程

1．(1) In[1]:=Plot[(x^2-x)Sin[x]，{x,0,16}]

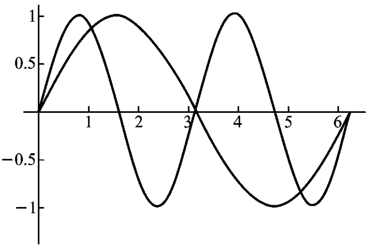
Out[1]:= -Graphics-



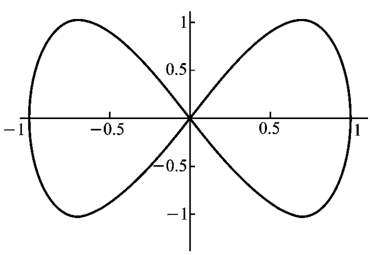
(2) In[2] := Plot[Sin[x ˆ 2]/x ˆ 2, {x, −5,5}]
Out[2] := −Graphics−



(3) In[3] := Plot[{Sin[x],Sin[2x]}, {x,0,2Pi}]
Out[3] := −Graphics−



(4) In[4] := ParametricPlot[{Sin[t],Sin[2t]}, {t,0,2Pi}]
Out[4] := −Graphics−



2. (1) In[5] := Limit[n * Sin[1/n],n −> Infinity]

Out[5] := 1

(2) In[6] := Limit[n^2/(n+1) * Sin[(n+1)/n^2], n->Infinity]

Out[6] := 1

(3) In[7] := Limit[((-1)^2)^n, n->Infinity]

Out[7] := 1

注 这里若输入 Limit[(-1)^(2n), n->Infinity] **从结果可以看出** Mathematica **什么都没做. 这是因为** Mathematica **并不能从式子中知道其中的** n **代表整数,所以在输入时需处理一下. 事实上,在许多情况下,我们都需要对表达式作变形处理,才能求出结果.**

(4) In[8] := Limit[((n+1)/n)^(n+1)n/(n+2), n->Infinity]

Out[8] := e

(5) In[9] := Limit[Sin[x]/x, x->0]

Out[9] := 1

(6) In[10] := Limit[Sin[x]/x, x->0, Direction->-1]

Out[10] := 1

(7) In[11] := Limit[Sin[x]/x, x->0, Direction->+1]

Out[11] := 1

(8) In[12] := Limit[(Tan[x]-Sin[x])/x^3, x->0]

Out[12] := 1/2

(9) In[13] := Limit[(x^2-1)/(6x^2-12x+1), x->Infinity]

Out[13] := 1/6

(10) In[14] := Limit[Sin[1/x], x->0]

Out[14] := Interval[{-1, 1}]

(11) In[15] := Limit[1/x, x->0, Direction->-1]

Out[15] := ∞

3. In[16] := FindMinimum[x * Sin[4x], {x, 2.3}]

Out[16] := {-2.76018, {x->2.77138}}

六、思考与提高

1. **怎样对隐函数的图形进行显示？**
2. **怎样利用软件对函数极限存在性进行判断？**
3. **如何利用软件对函数的连续性进行判断？**
4. **如何求函数的最大(小)值？**

七、练习内容

1．**画出下列函数的图形：**

(1) $y=\cos 3x$　(2) $f(x)=x^5+3e^x+\log_3(3-x)$, $x\in[-2,2]$

(3) $\begin{cases} x=\sin t+2t \\ y=t \end{cases}$　(4) $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$

2．**求下列极限：**

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1000n}{n^2+1}$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$　(4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$

(5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3}{x+1}$　(6) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x}\arctan x$

(7) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^2-1}{6x^2-5x+1}$　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\sin x\right)$

3．**讨论函数** $f(x)=2x^3-6x^2-18x+7$ **在点** 2.8 **附近的极值**.

基础实验 2　微分及其应用

一、实验内容

导数的运算法则,复合函数求导法及参数方程求导法等.

二、实验目的

1．**进一步理解导数及其几何应用**.

2．**学习** Mathematica **的求导命令与求导法**.

三、预备知识

1．D[f,x]

功能　对函数 f **求关于变量** x **的导数**.

2．D[f, {x,n}]

功能　对函数 f **求关于变量** x **的** n **阶导数**.

3．Dt[f]

功能　求函数 f **的全微分**.

4. Dt[f,x]

功能 求函数 f 对于变量 x 的全微分.

5. ImplyD[f _,x _,y _]

功能 求 $f(x,y)=0$ 所确定的隐函数的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. [注] 将 y 看成关于变量 x 的函数时,需明确地将 y 写成 y[x].

6. Parametric D[y _,x _,t _]

功能 求参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$所确定函数 $y=y(x)$的一阶导数,即 D[y,t]/D[x,t].

7. Simplify[D[D[y[t],t]/D[x[t],t],t]/D[x[t],t]]

功能 求参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$确定的函数 $y=y(x)$的二阶导数.

8. D[f, {x,n}, {y,m}…]

功能 求函她 f 对 x 的 n 阶,对 y 的 m 阶的混合偏导.

四、实验分析与步骤

1. **求下列函数的导数:**

(1) $y=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$　　(2) $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$

(3) $y=\mathrm{e}^{\sin^3 x}$　　(4) $y=\sin^2\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}$

(5) $y=\ln^3(x^2)$　　(6) $y=x^2\sin\frac{1}{x}$

2. **求下列函数的二阶导数:**

(1) $y=5x^4-3x+1$　　(2) $y=\frac{1}{x^2-1}$

(3) $y=x\cos x$　　(4) $y=\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x$

(5) $\begin{cases}x=t^2\\y=4t\end{cases}$　　(6) $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\y=a\sin^3 t\end{cases}$

3. **求下列方程所确定的函数 $y=y(x)$导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:**

(1) $x^2+y^2=R^2$　　(2) $x^2+xy+y^2=a^2$

(3) $x\cos y=\sin(x+y)$　　(4) $y=x+\ln y$

(5) $\begin{cases}x=\frac{6t}{1+t^3}\\y=\frac{6t^2}{1+t^2}\end{cases}$　　(6) $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$

4. **求下列函数的全微分：**

(1) $y = \ln\sin x + x\sin 2^x$　　(2) $u = \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z$

(3) $z = x\sin(x+y) + \dfrac{\cos x^2}{y}$

五、实验简单操作过程

1. (1) In[1] := D[1/Sqrt[a^2 - x^2],x]

Out[1] := $\dfrac{x}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$

(2) In[2] := D[x^2/Sqrt[x^2 + a^2],x]

Out[2] := $-\dfrac{x^3}{(a^2 + x^2)^{3/2}} + \dfrac{2x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

(3) In[3] := D[E^(Sin[x])^3,x]

Out[3] := $3e^{\mathrm{Sin}[x]^3}$Cos[x]Sin[x]^2

(4) In[4] := D[(Sin[x/2])^2Cot[x/2],x]

Out[4] := $\dfrac{1}{2}$Cos[$\dfrac{x}{2}$]^2 − $\dfrac{1}{2}$Sin[$\dfrac{x}{2}$]^2

(5) In[5] := D[(Log[x^2])^3,x]

Out[5] := $\dfrac{6\mathrm{Log}[x^2]^2}{x}$

(6) In[6] := D[x^2 * Sin[1/x],x]

Out[6] := − Cos[$\dfrac{1}{x}$] + 2xSin[$\dfrac{1}{x}$]

2. (1) In[7] := D[5x^4 − 3x + 1, {x,2}]

Out[7] := $60x^2$

(2) In[8] := D[1/(x^2 − 1), {x,2}]

Out[8] := $\dfrac{8x^2}{(-1 + x^2)^3} - \dfrac{2}{(-1 + x^2)^2}$

(3) In[9] := D[x * Cos[x], {x,2}]

Out[9] := − xCos[x] − 2Sin[x]

(4) In[10] := D[Sin[x]Sin[2x]Sin[3x],x]

Out[10] := 3Cos[3x]Sin[x]Sin[2x] + 2Cos[2x]Sin[x]Sin[3x]
+ Cos[x]Sin[2x]Sin[3x]

(5) In[11] := Simplify[D[D[4t,t]/D[t^2,t],t]/D[t^2,t]]

Out[11] := $-\dfrac{1}{t^3}$

(6) In[12] := Simplify[D[D[a(Sin[t])^3,t]/D[a(Cos[t])^3,t],t]

/D[a(Cos[t])^3,t]]

Out[12]:= $\dfrac{\mathrm{Csc}[t]\,\mathrm{Sec}[t]^4}{3a}$

3. In[13]:= ImplyD[f_,x_,y_]:= Solve[D[f,x]==0,D[y[x],x]];

(1) In[14]:= ImplyD[x^2+(y[x])^2−R^2,x,y]

Out[14]:= $\{\{y'[x] \to -\dfrac{x}{y[x]}\}\}$

(2) In[15]:= ImplyD[x^2+x*y[x]+(y[x])^2−a^2,x,y]

Out[15]:= $\{\{y'[x] \to -\dfrac{2x+y[x]}{x+2y[x]}\}\}$

(3) In[16]:= ImplyD[x*Cos[y[x]]−Sin[x+y[x]],x,y]

Out[16]:= $\{\{y'[x] \to -\dfrac{-\mathrm{Cos}[y[x]]+\mathrm{Cos}[x+y[x]]}{\mathrm{Cos}[x+y[x]]+x\mathrm{Sin}[y[x]]}\}\}$

(4) In[17]:= ImplyD[y[x]−x−Log[y[x]],x,y]

Out[17]:= $\{\{y'[x] \to \dfrac{y[x]}{-1+y[x]}\}\}$

(5) In[18]:= ParametricD[y_,x_,t_]:= −D[y,t]/D[x,t];

In[19]:= ParametricD[6t^2/(1+t^2),6t/(1+t^3),t]

Out[19]:= $\dfrac{\dfrac{12t^3}{(1+t^2)^2}-\dfrac{12t}{1+t^2}}{-\dfrac{18t^3}{(1+t^3)^2}+\dfrac{6}{1+t^3}}$

(6) In[20]:= ParametricD[a(1−Cos[t]),a(t−Sin[t]),t]

Out[20]:= $-\dfrac{\mathrm{Sin}[t]}{1-\mathrm{Cos}[t]}$

4. (1) In[21]:= Dt[Log[Sin[x]]+x*Sin[2^x]]

Out[21]:= $\mathrm{Cot}[x]\,\mathrm{Dt}[x]+2^x x\mathrm{Cos}[2^x]\,\mathrm{Dt}[x]\,\mathrm{Log}[2]+\mathrm{Dt}[x]\,\mathrm{Sin}[2^x]$

(2) In[22]:= Dt[(Sin[x])^2+(Sin[y])^2+(Sin[z])^2]

Out[22]:= 2Cos[x]Dt[x]Sin[x]+2Cos[y]Dt[y]Sin[y]+2Cos[z]Dt[z]Sin[z]

(3) In[23]:= Dt[x*Sin[x+y]+Cos[x^2]/y]

Out[23]:= $-\dfrac{\mathrm{Cos}[x^2]\,\mathrm{Dt}[y]}{y^2}+x\mathrm{Cos}[x+y](\mathrm{Dt}[x]+\mathrm{Dt}[y])-\dfrac{2x\mathrm{Dt}[x]\,\mathrm{Sin}[x^2]}{y}+\mathrm{Dt}[x]\,\mathrm{Sin}[x+y]$

六、思考与提高

1. 如何利用函数的导数判定函数的单调性、凹凸性？