《快乐奥赛丛书·天天练奥赛系列》

核心理念

课堂提升　奥赛阶梯 二合一

引导学生从课堂走向奥赛

快乐奥赛教练宣言

《快乐奥赛》方案，新内容新形式，

助你脱颖而出，成为尖子生！

《快乐奥赛》方案，新思维新方法，事半功倍，

助你顺利升入名牌初中，重点高中！

《快乐奥赛》金牌导师组

（主审按姓氏笔划排序）

叶　军（中国数学奥林匹克高级教练，所指导的湖南师大附中学生获国际数学奥赛2金1银）

肖鹏飞（湖南师大附中化学特级教师，享受国务院特殊津贴，所指导的湖南师大附中学生获国际化学奥赛2金1银）

彭大斌（长沙市一中物理特级教师，浙江师大兼职教授，所指导的长沙市一中学生获国际物理奥赛1金2铜）

《快乐奥赛》金牌策划组

（编委按单位、姓氏笔划排序）

长沙市教育科学研究所	李　辉 杨爱吾 宫　健 戴国良
永州市教育科学研究所	向秋莲
怀化市教育科学研究所	彭绍雄
邵阳市教育科学研究所	欧阳叙学
岳阳市教育科学研究所	余志辉 易柏林
张家界市教育科学研究所	张华忠
娄底市教育科学研究所	孙水英 吴国贤 龚东平 蔡礼初
郴州市教育科学研究所	李中日
益阳市教育科学研究所	龙浪滨 张子林 周鹏来
株洲市教育科学研究所	李钟南 吴海昆
常德市教育科学研究所	张国平 郭环球 黄利华 傅广生
湘潭市教育科学研究所	尹本初 李建新 周大明 林向荣
湘西州教育科学研究所	童民才
衡阳市教育科学研究所	陈湘平 罗任元 贺才田
湖南省教育科学研究院	黄泽成

课堂提升 奥赛阶梯

二合一

天天练 奥赛

TIANTIANLIAN AOSAI

全年级使用

初中三年级 数学

主审 叶军（中国数学奥林匹克高级教练，所指导的湖南师大附中学生获国际奥林匹克数学竞赛2枚金牌、1枚银牌）

主编 戴国良（长沙市教科所中学数学教研员）

编著 戴国良 柳 闽 莫 方 王 红 周利辉

湖南大学出版社

快乐奥赛教练宣言

国际奥赛金牌，湖南名冠全国

中学学科国际奥林匹克竞赛，湖南金牌总数稳居全国第一。五星级奥赛金牌学校，全国共五所湖南有其二：湖南师大附中、长沙市一中。2002年，湖南学子勇夺数学、物理、化学、生物、信息所有学科金牌，全国绝无仅有。金牌选手上清华，读北大，令人称羡。湖南奥赛培养模式，国内教育界公认为成功典范。

百名金牌教练揭秘湖南模式：课堂提升、奥赛阶梯二合一

历时两年，湖南大学出版社、三愚策划室会同湖南省各级教研部门归纳了30所金牌小学、30所金牌中学百名奥赛金牌教练秘诀：

——小学起步，初中巩固，延绵不断；

——以新课程标准为经线，以竞赛大纲为纬线，从课堂起步，使尖子生脱颖而出；

——奥赛训练，梯度提升是核心方法。先易后难，循序渐进，给学生台阶，给学生楼梯；

——传授一种解题方法，比做一百题更重要；

——开启思维，使学生乐于探索奥赛之谜；点拨关键，助学生认识自我，树立信心。

百名金牌教练共同构思策划《快乐奥赛丛书·天天练奥赛系列》：湖南奥赛密卷，新思维新方案

万丈高楼平地起，金牌选手宜早练。当我们羡慕别人凭借奥赛成绩顺利地升入名牌初中、重点高中，为什么自己不从现在开始呢？

这套丛书作为完整的湖南奥赛培训方案，知识范围限定在各年级新课程标准范围内，能力要求与各年级竞赛大纲要求相适应。每周安排3次学习与演练，每次约半小时，“学而时习之，不亦悦乎。”天天练奥赛，才能消化巩固，才能透彻理解；快乐练奥赛，才能融会贯通，才能创新运用。

《快乐奥赛》金牌教练组积多年奥赛培训成功经验，设计的《天天练奥赛系列》独特的梯层性及可操作性体例，引导学生从课堂提升走向奥赛阶梯，能充分满足学生自学、老师教学、家长辅导的需求。

学生自学 ←— 支持 —— 学练结合及梯层设计

老师教学 ←— 支持 —— 讲练结合及随堂设计

家长辅导 ←— 支持 —— 思路点拨及详解设计

编写特色

［趣味性］重观察、重动手、重应用，激发学生学习热情。

［生活性］强调生活的直观性，知识的应用性。

［同步性］严格与各年级新课标知识点同步，与各年级奥赛大纲能力要求同步。

［梯层性］从课堂提升到奥赛阶梯，分层设计，循序渐进。

［发散性］拓展学生发散思维，开放条件，开放解法，开放答案。

［探索性］引导探索体验，激发求知欲望。

栏目设计

［考点归纳］热点专题重难点归纳及常考点点击。

［夺冠技巧］热点专题解题技巧归纳。

［示范赛题］剖析典型赛题，侧重点拨解题思路，归纳解题方法。

［迁移演练］选择与示范赛题相似的习题，让读者模仿练习，培养模仿思维与迁移能力。

［热身演练］选择中等难度的训练题，锻炼读者分析和解决问题的能力，巩固所学知识，增强应试能力。

［拓展演练］从一全新层面探索规律，总结方法，帮助读者学会学习、学会应用、学会创新。

快乐奥赛教练宣言

《快乐奥赛》方案，新内容新形式，助你脱颖而出，成为尖子生！

《快乐奥赛》方案，新思维新方法，事半功倍，助你顺利升入名牌初中，重点高中！

《快乐奥赛》金牌教练组

图书在版编目(CIP)数据
天天练奥赛·初中三年级数学/戴国良主编.
—长沙:湖南大学出版社,2003.4
(快乐奥赛)
ISBN 7－81053－628－1
Ⅰ.天...　Ⅱ.戴...　Ⅲ.数学课—初中—教学参考
资料　Ⅳ.G634
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 016689 号

天天练奥赛·初中三年级数学

Tiantian Lian Aosai·Chuzhong Sannianji Shuxue

戴国良　主编

□责任编辑　厉　亚
□特约编辑　何哲辉
□封面设计　吴颖辉
□出版发行　湖南大学出版社
社址　长沙市岳麓山　邮码　410082
电话　0731－8821691　0731－8821315
□经　销　湖南省新华书店
□印　装　湖南航天长宇印刷有限责任公司

□开本　787×1092　16 开　□印张　8　□字数　195 千
□版次　2003 年 5 月第 1 版　□2003 年 5 月第 1 次印刷
□印数　1～23 000 册
□书号　ISBN 7－81053－628－1/G·178
□定价　8.00 元

CONTENTS 目次

初中 3 年级上学期

初中 3 年级下学期

热点专题 1

一元二次方程(组)的解法

考点归纳 方程是数学中很重要的内容，由于方程的形式多种多样，因此，它经常出现于各类竞赛题中，除了必须了解一元二次方程、方程组、分式方程、无理方程几种常见方程的一般解法外，还必须针对方程的特征，运用所学数学知识巧解、快解.

夺冠技巧 总的解题策略是化简、化归为已知的、熟悉的情况. 例如，无理方程化为有理方程、分式方程化为整式方程、高次方程化为低次方程. 经常使用的方法有配方法、换元法等.

示范赛题

示范 1

解方程：

$x^4-10x^3-2(a-11)x^2+2(5a+6)x+2a+a^2=0$（其中 a 是常数）.

点拨

本题的目的本是解关于 x 的方程，即用含 a 的代数式来表示 x，但由于 x 的次数较高，解起来比较困难，但反过来参数 a 的最高次数却为 2，若以 a 为未知数，用 x 来表示 a 却简单多了，最后再反过来用 a 表示 x 即可. 因此，在解含有参数的方程时，不要将未知数与参数看得过死，它们的地位是可以变换的.

解答 原方程化为关于 a 的二次方程

$a^2-2(x^2-5x-1)a+(x^4-10x^3+22x^2+12x)=0$，而 $\Delta=4(x^2-5x-1)^2-4(x^4-10x^3+22x^2+12x)=4(x^2-2x+1)=4(x-1)^2$，

$\therefore a=\dfrac{2(x^2-5x-1)\pm\sqrt{4(x-1)^2}}{2}$

$=(x^2-5x-1)\pm(x-1)$，

即 $a=x^2-4x-2$ 或 $a=x^2-6x$.

$\therefore x^2-4x-2-a=0$ 或 $x^2-6x-a=0$.

解这两个关于 x 的二次方程得

$x_{1,2}=2\pm\sqrt{6+a}$，$x_{3,4}=3\pm\sqrt{9+a}$. 当 $a\geqslant-6$ 时，原方程有 4 个实根. 当 $-9\leqslant a\leqslant-6$ 时，原方程有 2 个实根. 当 $a<-9$ 时，原方程没有实根.

示范 2

解方程 $(\sqrt{x+8}-\sqrt{x})^2=\sqrt{x+8}+\sqrt{x}$.

点拨

解无理方程的关键是要把"无理"变为"有理". 观察此方程特征有二，其一，左右两边含的都是 $\sqrt{x+8}$ 与 $\sqrt{x}$，可分别对 $\sqrt{x+8}$ 与 $\sqrt{x}$ 进行换元；其二，$\sqrt{x+8}$ 与 $\sqrt{x}$ 的被开方数的差为 8，这也是一个突破口. 由此可得到，解无理方程只用两边平方的方法并非永远可行的，还可采用换元法，不但可以达到有理化的目的，而且使解答过程简捷明确.

解答 设 $u=\sqrt{x+8}$，$v=\sqrt{x}$，则原方程可化为：

$(u-v)^2=u+v.$ ①

又 $\because (\sqrt{x+8})^2-(\sqrt{x})^2=8$，

即 $u^2-v^2=8$，$\therefore (u-v)(u+v)=8$.

显然 $u\neq v$，$\therefore$ 将 $u+v=\dfrac{8}{u-v}$ 代入①得：$(u-v)^3=8$.

$\therefore u-v=2$，而 $u+v=\dfrac{8}{u-v}=4$.

$\therefore \begin{cases}u+v=4,\\u-v=2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}u=3,\\v=1.\end{cases}$

即 $\sqrt{x+8}=3$，得 $x_1=1$；

$\sqrt{x}=1$，得 $x_2=1$.

经检验知：$x=1$ 为原方程的解.

迁移演练

迁移 1

解方程：

$\sqrt{2}x^3+4x^2+2\sqrt{2}x+2-\sqrt{2}=0$.

(50 分)

迁移 2

解方程：

$x=\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$. (50 分)

第 1 周第 1 次 计时 得分

热身演练

热身 1

解方程：

$$2\left(x+\sqrt{x^{2}-1}\right)=\left(x-1+\sqrt{x+1}\right)^{2}.$$

(50分)

热身 2 全国初中数学联赛武汉市选拔赛题

设 x,y 为实数，且满足

$\begin{cases}(x-1)^{3}+1998(x-1)=-1,\\(y-1)^{3}+1998(y-1)=1.\end{cases}$ 求 $x+y$ 的值.

(50分)

第1周第2次 计时　　得分

热身演练

热身 3 第九届祖冲之杯初中数学赛题

解方程：

$$\frac{13x-x^{2}}{x+1}\left(x+\frac{13-x}{x+1}\right)=42.$$ (50分)

热身 4

求方程 $\dfrac{x+y}{x^{2}-xy+y^{2}}=\dfrac{3}{7}$ 的整数解.(50分)

第1周第3次 计时　　得分

示范赛题

示范 3 加拿大数学奥林匹克赛题

解方程组
$$\begin{cases}\dfrac{4x^2}{1+4x^2}=y, & ①\\ \dfrac{4y^2}{1+4y^2}=z, & ②\\ \dfrac{4z^2}{1+4z^2}=x, & ③\end{cases}$$

点拨

这个方程组既是轮换式又是对称式,对于这样的方程组可利用它的特征先得到三个未知数的关系,再寻求适当的方法巧解.

解答 方法一解:显然,有 $x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0$,若 $x=0$,则 $x=y=z=0$,若 $x>0$,则可得到:$y>0,z>0$. 又∵ $1+4x^2=(1-2x)^2+4x\geqslant4x$,代入①得:$y=\dfrac{4x^2}{1+4x^2}\leqslant\dfrac{4x^2}{4x}=x$.

同理可得:$z\leqslant y,x\leqslant z$. ∴ $x\leqslant z\leqslant y\leqslant x$,

∴ $x=y=z$ 代入①得 $\dfrac{4x^2}{1+4x^2}=x$,$4x^2-4x+1=0$,解得 $x=\dfrac{1}{2}$.

∴原方程组的解为 $\begin{cases}x_1=0,\\ y_1=0,\\ z_1=0.\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\dfrac{1}{2},\\ y_2=\dfrac{1}{2},\\ z_2=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

方法二解:当 $x=0$ 时,则有 $y=z=0$,当 $x\neq0$ 时,则 $y\neq0,z\neq0$,将各方程颠倒
$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{4z^2}+1,\\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4x^2}+1,\\ \dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4y^2}+1.\end{cases}$$
三式相加,得:
$$\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{4y^2}+\frac{1}{4z^2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}+3=0,$$
$$\left(\frac{1}{2x}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2y}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2z}-1\right)^2=0,$$
∴ $\dfrac{1}{2x}-1=\dfrac{1}{2y}-1=\dfrac{1}{2z}-1=0$,

即 $x=y=z=\dfrac{1}{2}$.

示范 4

解方程组:$\begin{cases}x+y+z=3,\\ x^2+y^2+z^2=3.\end{cases}$

点拨

此题有三个未知数但只有两个方程,一般地,解是不确定的. 常规的解法是

解答 $\begin{cases}x+y=3-z, & ①\\ x^2+y^2=3-z^2. & ②\end{cases}$

将①两边平方减去②,整理得
$$xy=z^2-3z+3. \quad ③$$
由①③两式知,x、y 是二次方程
$$u^2+(z-3)u+(z^2-3z+3)=0 \quad ④$$
的二实根.

$\Delta=(z-3)^2-4(z^2-3z+3)\geqslant0$,即 $-3(z-1)^2\geqslant0$.

∴ $z-1=0$,$z=1$ 代入④得 $u^2-2u+1=0$.

由此得 $x=y=1$.

∴ $x=y=z=1$.

迁移演练

迁移 3 太原市初中数学赛题

解方程组 $\begin{cases}x+y+\dfrac{9}{x}+\dfrac{4}{y}=10,\\ (x^2+9)(y^2+4)=24xy.\end{cases}$ (50 分)

迁移 4

解方程组:$\begin{cases}(x+2y)(x+2z)=-16,\\ (y+2z)(y+2x)=8,\\ (z+2x)(z+2y)=-7.\end{cases}$ (50 分)

第2周第1次 计时 得分

拓展演练

拓展1

已知方程$(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$.

(1)求证:$x=\frac{a-b}{a+b}$,$y=\frac{b-c}{b+c}$,$z=\frac{c-a}{c+a}$是此方程的解,其中a,b,c是任意实数,但$a+b\neq0$,$b+c\neq0$,$c+a\neq0$.

(2)试证明:此方程除上述形式的解以外还有其他的解.(50分)

拓展2 太原市初中数学赛题

解方程:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}=\left|\frac{3x+2}{2x+1}\right|.\text{(50分)}$$

第2周第2次 计时　　得分

拓展演练

拓展3

设a,b是实数且$a\neq0$,给定方程组

$$\begin{cases}ax_1^4+bx_1^3=x_2^2,\\ax_2^4+bx_2^3=x_3^2,\\ax_3^4+bx_3^3=x_4^2,\\ax_4^4+bx_4^3=x_1^2.\end{cases}$$

求证:(1)当$b^2+4a\geqslant0$时,方程组至少有一组非零实数解.

(2)当$b^2+4a<0$时,方程组不存在非零实数解.(50分)

拓展4

解方程组:$\begin{cases}2x=y+\frac{17}{y},\\2y=z+\frac{17}{z},\\2z=u+\frac{17}{u},\\2u=x+\frac{17}{x}.\end{cases}$(50分)

第2周第3次 计时　　得分

热点专题 2

一元二次方程根的判别式及其应用

考点归纳 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根的判别式为 $\Delta=b^2-4ac$. $\Delta>0\Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根；$\Delta=0\Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根；$\Delta<0\Leftrightarrow$ 方程没有实数根.

夺冠技巧 (1) 不解方程，判定一元二次方程的根的存在情况；(2) 确定含参数的一元二次方程参数的值或取值范围；(3) 证明某种条件下方程有无实数根，或探求参数符合的条件.

示范赛题

示范 1

已知方程 $x^2+2px-q=0$（p,q 是实数）没有实数根，求证：$p+q<\frac{1}{4}$.

点拨

由已知有 $\Delta<0$，可得 p 与 q 的关系，要求 $p+q$ 的范围，可设 $p+q=s$，则可多一个关系式，便于下面的讨论.

解答 由题意，$\Delta=(2p)^2-4(-q)<0$. 整理得：$p^2+q<0$ (1). 设 $p+q=s$，则 $q=s-p$. 代入(1)得：$p^2+s-q<0$. ∴ $p^2-p+\frac{1}{4}<\frac{1}{4}-s$，即 $0\leqslant(p-\frac{1}{2})^2<\frac{1}{4}-s$. ∴ $s<\frac{1}{4}$，即 $p+q<\frac{1}{4}$.

示范 2 江苏省竞赛题

已知 a,b,c 是不全为零的三个实数，那么关于 x 的方程 $x^2+(a+b+c)x+(a^2+b^2+c^2)=0$ 的根的情况是（　　）.

A. 有两个负实数根　B. 有两个正实数根

C. 有两个异号实数根　D. 没有实数根

点拨

由 Δ 的符号可判定方程有无实数根. 一般地'非负数＋正数'情形肯定大于 0，而'非负数的相反数－正数'则肯定小于 0，所以，本题求 Δ 后可通过'凑'完全平方来判定 Δ 的符号.

解答

$$\begin{aligned}\Delta&=(a+b+c)^2-4(a^2+b^2+c^2)\\&=-3a^2-3b^2-3c^2+2ab+2ac+2bc\\&=-[a^2+b^2+c^2+(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]\end{aligned}$$

∵ a,b,c 不全为零，∴ $\Delta<0$.

∴ 原方程无实数根，故选 D.

迁移演练

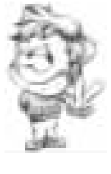
迁移 1

若二次方程 $(b-c)x^2+(a-b)x+(c-a)=0$ 有两相等实根，且 $b\neq c$，则 a,b,c 间的关系是什么？(50 分)

迁移 2

已知实数 a,b,c,R,P 满足条件 $PR>1$，$Pc-2b+Ra=0$. 求证：一元二次方程 $ax^2+2bx+c=0$ 必有实数根. (50 分)

第 3 周第 1 次　计时　　得分



热身演练

热身 1

若方程 $x^2+2(1+a)x+(3a^2+4ab+4b^2+2)=0$ 有实数根,求 a,b 的值.(50 分)

热身 2

已知关于 x 的方程 $x^2=2x+m$(m 为实数)无实根,则关于 x 的二次方程 $x^2+2mx+1+2(m^2-1)(x^2+1)=0$ 的根的情况怎样?(50 分)

第3周第2次 计时 得分

热身演练

热身 3 黄冈初中竞赛题

若 a,b,c 为实数,且 $a+b+c=0$,$abc=2$,那么 $|a|+|b|+|c|$ 的最小值可达到________.(50 分)

热身 4

若三个方程 $x^2+4ax-4a+3=0$,$x^2+(a-1)x+a^2=0$,$x^2+2ax-2a=0$ 中,至少有一个方程有实根,求实数 a 的范围.(50 分)

第3周第3次 计时 得分

示范赛题

示范 3

已知方程 A：$x^2+p_1x+q_1=0$，方程 B：$x^2+p_2x+q_2=0$，其中 p_1,p_2,q_1,q_2 均为实数，且满足 $p_1p_2=2(q_1+q_2)$. 求证 A,B 两个方程中至少有一个有实数根.

点拨

若分别求 A,B 两方程的 Δ_1,Δ_2 再讨论，难以得出结论. 换一个角度，若能证明 $\Delta_1+\Delta_2\geqslant 0$，则可得 Δ_1,Δ_2 中至少有一个非负，即可得结论.

解答 由题意，方程 A 的判别式 $\Delta_1=p_1^2-4q_1$，方程 B 的判别式 $\Delta_2=p_2^2-4q_2$. ∴ $\Delta_1+\Delta_2=p_1^2+p_2^2-4(q_1+q_2)$. ∵ $p_1p_2=2(q_1+q_2)$，∴ $\Delta_1+\Delta_2=p_1^2+p_2^2-2p_1p_2=(p_1-p_2)^2\geqslant 0$. ∴ Δ_1,Δ_2 中至少有一个大于 0. ∴ A,B 两个方程中至少有一个有实数根.

示范 4

设 $a>b>c$，求证：$(2b-c-a)^2-4(2a-b-c)(2c-a-b)=9(a-c)^2$.

点拨

形如 b^2-4ac 的式子，可联想到一元二次方程的判别式，因而，可以将数学问题化归为一元二次方程的问题.

解答 构造二次方程：

$(2a-b-c)x^2+(2b-c-a)x+(2c-a-b)=0$ (1). ∵ $(2a-b-c)+(2b-c-a)+(2c-a-b)=0$，∴ 方程(1)有一个实根 $x=1$. 又 $\Delta=(2b-c-a)^2-4(2a-b-c)(2c-a-b)$. 由求根公式，方程(1)的根为 $x_{1,2}=\dfrac{-(2b-c-a)\pm\sqrt{\Delta}}{2(2a-b-c)}$. 但 $a>b>c$，其中只有一个正实数根.

∴ $\dfrac{-(2b-c-a)+\sqrt{\Delta}}{2(2a-b-c)}=1$.

整理化简得：$\Delta=(3a-3c)^2=9(a-c)^2$.

∴ 命题得证.

迁移演练

迁移 3 山东省竞赛题

设 a,b,c 为互不相等的非零实数，证明三个方程 $ax^2+2bx+c=0$，$bx^2+2cx+a=0$，$cx^2+2ax+b=0$ 不可能都有两个相等的实数根.(50 分)

迁移 4

a 为实数，$M=(\sqrt{2}+\sqrt{3}-a)^2$，$N=4(a-1-\sqrt{2}-\sqrt{3})$. 问 a 为何值时，$M>N$ 成立？(50 分)

第 4 周第 1 次　计时　　得分

拓展演练

拓展1 **全国初中竞赛题**

已知$\frac{1}{4}(b-c)^2=(a-b)(c-a)$，且$a\neq0$，则$\frac{b+c}{a}=$________.（50分）

拓展2

设关于x的方程$(1-m^2)x^2+2mx-1=0$的所有根都是比1小的正根，求实数m的取值范围.（50分）

第4周第2次 计时 得分

拓展演练

拓展3

已知x的一元二次方程$ax^2+2ax+2^{2b}-2^{b+3}+12=0$(1)没有互异实数根，$\frac{x^2}{4}-\sqrt{-a}x+4+c^2=0$(2)有实根数，求$a,b,c$的值.（50分）

拓展4

a为什么整数时，方程$\frac{x}{x-2}+\frac{x-2}{x}+\frac{2x-a}{x(x-2)}=0$只有一个实根？指出所有这样的$a$值并求出与它相应的方程的根.（50分）

第4周第3次 计时 得分

热点专题 3

一元二次方程根与系数的关系

考点归纳 已知 α,β 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个根，则有 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}$.（又称“韦达定理”）注意前提是一元二次方程有实根即 $\Delta\geqslant0$.

夺冠技巧 (1)已知方程的一个根，求另一个根及确定方程的参数的值；(2)已知方程，求关于方程的两根的代数式的值；(3)已知方程的两根，求作方程；(4)当已知等式具有相同的结构时，就可以把某两个变元看做是某个一元二次方程的两根，以便用根与系数的关系.

示范赛题

示范 1

已知关于 x 的方程 $2x^2-5x-a=0$ 的两根为 x_1,x_2，若 $x_1:x_2=2:3$，则 $a=$________.

点拨

设 $x_1=2k,x_2=3k$ 则由韦达定理可直接求出 k，也可得两根，则 a 易求. 但应注意 $\Delta\geqslant0$ 的条件，故解此题时应先求 $\Delta\geqslant0$ 时 a 的取值范围或求出 a 值后代入 Δ 中检验.

解答 由题意，知 $\Delta=(-5)^2-4\times2\times(-a)\geqslant0$，$\therefore a\geqslant-\frac{25}{8}$. 设 $x_1=2k,x_2=3k,k>0$. 则由韦达定理：$2k+3k=\frac{5}{2}$，$\therefore k=\frac{1}{2}$. 即 $x_1=1,x_2=\frac{3}{2}$. 此时 $1\times\frac{3}{2}=-\frac{a}{2}$，即 $a=-3$.

示范 2

若方程 $x^2+px+1=0(p>0)$ 的两根差为 1，那么 p 的值是多少？

点拨

由已知无法直接运用韦达定理，但可讨论 $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$（这一变形应熟练掌握），则可运用韦达定理了. 仍需注意本题隐含条件：$\Delta\geqslant0$.

解答 $\because$ 原方程有两实根，$\therefore\Delta=p^2-4>0$. 又 $\because p>0$，$\therefore p>2$. 设原方程两根为 x_1,x_2，$\therefore x_1+x_2=-p$，$x_1x_2=1$. $\therefore(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$.

$\therefore 1=(-p)^2-4$，$p^2=5$. $\therefore p=\sqrt{5}(p>2)$.

迁移演练

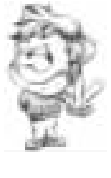
迁移 1

已知关于 x 的方程 $x^2-2(m+1)x+m^2-3=0$ 的两个实数根 x_1,x_2 满足 $(x_1+x_2)^2-(x_1+x_2)-12=0$，则 m 的值为__________.（50 分）

迁移 2

设 x_1,x_2 是二次方程 $x^2+x-3=0$ 的两根，那么 $x_1^3-4x_2^2+19$ 的值等于________.（50 分）

第 5 周第 1 次 计时 得分



热身演练

热身1 太原市初中数学竞赛题

设关于 x 的二次方程 $(m^2-4)x^2+(2m-1)x+1=0$(其中 m 为实数)的两个实数根的倒数和为 S,则 S 的取值范围是________.(50分)

热身2

关于 x 的一元二次方程 $2x^2+2(b+1)x+b^2+4b+4=0$ 有两个不等实根 x_1 和 x_2,且 $\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(1+\frac{1}{x_2}\right)=3$. 试求 b 的值.(50分)

第5周第2次　计时　　得分

热身演练

热身3 全国初中数学竞赛题

设实数 s,t 分别满足 $19s^2+99s+1=0$,$t^2+99t+19=0$,并且 $st\neq1$,求 $\frac{st+4s+1}{t}$ 的值.(50分)

热身4

设方程 $x^2-px+q=0$ 的两个实数根为 α,β. (1)求以 α^3,β^3 为根的一元二次方程;(2)若以 α^3,β^3 为根的一元二次方程仍然是 $x^2-px+q=0$,求所有这样的一元二次方程.(50分)

第5周第3次　计时　　得分