目　录

CONTENTS

基础篇

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科,简说研究“数”和“形”的学科.初等数学按其知识体系可划分为平面几何、代数、三角函数、解析几何、立体几何等五个分支.本书研究的空间直线和平面是立体几何的基础部分.

立体几何的本质是研究空间形体的位置关系和数量关系,并且有所侧重位置关系的讨论.

立体几何研究的主要对象可概述为“点,线,面,体”,即空间的点、直线、平面、简单几何体.

立体几何研究的主要任务可归纳为“平行,垂直,成角,距离,面积,体积”等六大类问题.即

平行:空间的两条直线、直线和平面、平面和平面在什么条件下平行?平行成立后,它们又具有什么样的性质.

垂直:讨论空间两条直线的相互垂直,空间直线和平面的相互垂直,空间平面和平面的相互垂直.

成角:两条异面直线所成的角,直线和平面所成的角,二面角.

距离:点与点、点与直线、点与平面,直线与直线、直线与平面,平面与平面的距离.

面积:简单几何体的侧面积.

体积:简单几何体的体积.

立体几何研究过程中所采用的方法是公理法.其结构是

公理体系

①延续平面几何学说——首先承认只要被研究的对象在同一个平面内,无论平面在空间的位置如何,平面几何学说成立.

②原始概念——原始的,不定义的概念.如:点、直线、平面等.什么是点?点就是点,无法对它加以定义,因为它是源头.

③定义——揭示某个概念的本质属性,以区别于其他概念的逻辑方法.如,异面直线的定义;直线与平面平行的定义等.

④公理——作为一切论证的基础,而本身不加任何证明的事实.

⑤定理——已被证明的正确命题.

本书为《空间直线和平面》,它上承平面几何,使其得到延续和发展;下启简单几何体,为其奠定基础.

本书知识框图

- 空间直线和平面
  - 平　面
    - 平　面
    - 平面的基本性质
    - 水平放置的平面图形的直观图的画法
  - 空间两条直线
    - 两条直线的位置关系
    - 两条直线的平行关系
    - 两条异面直线所成的角
  - 空间直线和平面
    - 直线和平面的平行关系
    - 直线和平面的垂直关系
    - 斜线在平面内的射影,直线和平面所成的角,三垂线定理
  - 空间两个平面
    - 两个平面的平行关系
    - 二面角
    - 两个平面的垂直关系
  - 直线和平面的应用
    - 空间两条直线的应用
    - 空间直线和平面的应用
    - 空间两个平面的应用

第一讲 平 面

本讲知识框图

- 平 面
  - 平 面
    - 平面的概念
    - 平面的画法和表示方法
    - 对平面的深层理解
  - 平面的基本性质
    - 公理及其记忆法
    - 公理的作用
    - 公理的应用
    - 符号的使用
  - 水平放置的平面图形的直观图的画法
    - 斜二测画法规则

学习指导

［考纲要求］

掌握平面的基本性质,会用斜二测画法画出水平放置的平面图形的直观图.

1.1 平 面

重点难点归纳

重点 ①理解平面的概念.②会用符号语言、图形语言表示平面.

难点 对从实际生活中的平面抽象出立体几何中的平面的领悟.

本节需掌握的知识点 平面的画法和平面的表示方法.

知识点精析与应用

知识点精析

1. 平面的概念

平面是一个描述而不定义、只需理解的最基本的原始概念.立体几何里所说的平面是从生活中常见的桌子的表面、黑板面、平静的水面等中抽象出来的.生活中的平面是人们直观感觉中的比较平且大小有限的具体模型,而立体几何中的平面则是理想化的绝对的平且可以无限延展的空间图形.

2. 平面的画法和表示方法

在立体几何中,通常画平行四边形来表示水平放置的平面,平行四边形的锐角画成 45°,横边画成等于邻边的 2 倍.当一个平面的一部分被另一个平面遮住时,应把被遮部分的线段画成虚线或不画.

平面通常用一个希腊字母表示,如平面 α,平面 β,平面 γ 等.也可用表示平行四边形的两个相对顶点的字母来表示,如平面 AC 等等.

3. 对平面的深层理解

(1)平面是绝对平的.

平面属原始定义范畴,无法用其他概念对它加以定义.

(2)平面没有厚度,也可理解成其厚度为 0.

(3)平面是无限延展的.

(4)平面和点、直线一样,是我们以后研究空间图形的基本对象之一,也是空间图形的一个重要的组成部分.

(5)有限的图形.如:三角形、平行四边形等.用平行四边形表示平面,只是一种形式上的表示方法,绝对不能认为平行四边形就是平面.

(6)无限的平面.平面将无限的空间分成两部分,如果想从平面的一侧到另一侧,必须穿过这个平面.

(7)平面可以看作空间的点的集合,它当然是一个无限集.

(8)用希腊字母 α、β、γ 等表示平面时,在不会引起混淆的情况下,“平面”二字可以省略不写;但用拉丁字母表示平面,如:平面 AC,“平面”二字不可省略,甚至在一些复杂图形中为了区别起见,还要表示为平面 $ABCD$.表示三角形所在的平面,一般将三个顶点的字母都写出来.如,平面 ABC,平面 ABD 等等.

(9)在平面几何中,凡是后引的辅助线都画成虚线.立体几何则不然,凡是被平面遮住的线(简称暗线),都画成虚线;凡是不被遮住的线(简称明线)都画成实线.无论是题中原有的还是后引的辅助线.

解题方法指导

[例 1] 判断下列说法是否正确?并说明理由.

(1)平行四边形是一个平面;　　剖析平面的概念,辨别实线与虚线

(2)任何一个平面图形都是一个平面;

(3)画空间图形,先画的线画成实线,后画的线画成虚线.

解 (1)不正确.平行四边形仅仅由空间中的四条线段组成,更谈不上无限延展.

点评 我们只不过是用有限的、可看得到的平行四边形来表示漫无边际的平面,而不是说平行四边形就是平面.随着知识的深化,我们将来可以说“平行四边形是一个平面图形”,即它是某一个平面内的几何图形.

(2)不正确.平面图形和平面是两个截然不同的概念;平面图形是有大小的,而平面是无限延展的.　　切不可将平面图形与平面混为一谈

(3)不正确.在空间图形中,能够看见的线画成实线,看不见的线画成虚线.实线、虚线与画线的先后顺序无关.

画空间图形,线的“虚实”与线的由来之先后顺序无关,这是一个全新的观念.平面几何中的“先实后虚”,在立体几何中不可沿用.　　平面画法的拓展

[例 2] 图 1-1 中表示两个有公共点的平面,其中画法正确的是　　(　　)

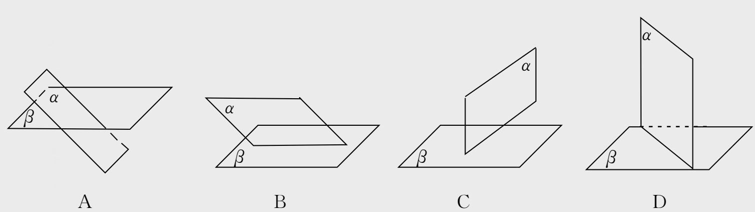


图 1-1

解 D 正确.

因为 A 中的两个平面没有按照实虚线的画法规则去画;同理答案 B、C 也不正确.

点评 由于高中阶段没有设立系统地“画法几何”学习课程,所以画立体图形的方法要靠平时课堂的积累.

[例 3]　分别画出满足下列条件的图形：　培养空间想象能力

(1)两个有公共点的平面；

(2)三个平面两两有公共点，画出两种情形即可.

解　(1)如图 1-2.(2)参看图 1-3.

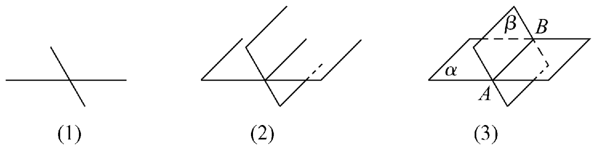


图 1-2

点评　画两个有公共点的平面要画出交线，交线把表示每个平面的平行四边形分成两个小的平行四边形，注意画好实虚线.

[例 4]　一个平面将空间分成______部分，两个平面将空间分成______部分，三个平面将空间分成______部分.　这是难点，结论需要记住

解　本题对平面在空间的位置分类讨论.

一个平面将空间分成两部分.

两个平面有公共点时将空间分成 4 部分；两个平面没有公共点时将空间分成 3 部分. 所以，两个平面将空间分成 3 部分或 4 部分.

三个平面没有公共点时将空间分成 4 部分；三个平面有公共点时分别将空间分成 6，7，8 部分. 详见图 1-3.

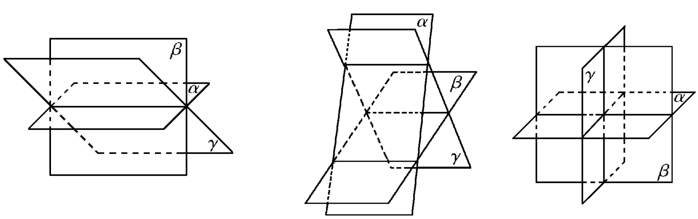


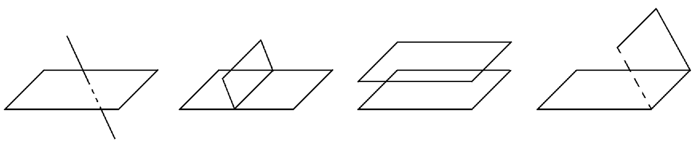
图 1-3

点评　先对两个平面在空间的位置分类讨论，再让第三个平面以不同的形式介入，这样设计分类讨论的程序，在研究空间图形位置关系时，要经常用到.

基础训练题

一、选择题

1. 下列说法正确的是 （　　）
   A. 镜面是平面
   B. 一个平面长 10m，宽 2m
   C. 两个平面的面积是其中一个平面面积的 2 倍
   D. 所有的平面都是无限延展的
2. 图 1-4 中画法正确的是 （　　）



A　　B　　C　　D

图 1-4

3. 下列说法中表示平面的是 （　　）
   A. 平静的水面　　B. 玻璃黑板面　　C. 桌子的面　　D. 铅垂面
4. 下列说法中错误的是 （　　）
   A. 平面用一个小写希腊字母就可表示
   B. 平面可用表示平面的平行四边形的对角顶点的两个拉丁字母表示
   C. 三角形 ABC 所在的平面不可写成平面 ABC
   D. 一条直线和一个平面可能没有公共点

二、填空题

5. 平面几何所讲的直线是______延长的.
6. 立体几何所讲的平面是无限______.
7. 组成平面图形的点的集合是 A，这个平面图形所在的平面记为点集 B，那么 A 与 B 的关系是________.
8. 平面内的两条直线可以把平面分成______部分.

三、解答题

9. 画出满足下列条件的直线和平面：
(1)直线 a 穿过平面 α；
(2)直线 a 穿过两个有公共点的平面 α 和 β.

学习立体几何，一时一刻都离不开图形，学者要反复练习画图

10. 凭想象画出三棱镜的直观图形.

答案与提示

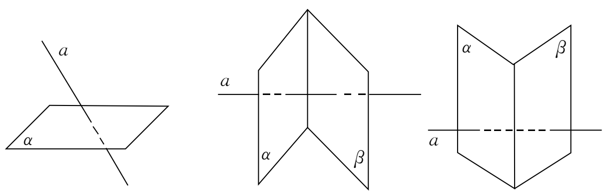
一、1. D(理解平面的定义可直接得出.)　　2. A　　3. D

4. C(三角形 ABC 所在的平面可以写成平面 ABC. 特别地，在一些复杂的图形中，这样的写法更确切、具体.)

二、5. 无限　　6. 延展的　　7. $A \subsetneqq B$

8. 3 或 4(当两条直线平行时，分成 3 部分；当两条直线相交时，分成 4 部分.)

三、9. 参看图 1-5.　　10. 参看图 1-6.



(1)　　(2)

图 1-5

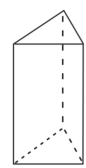


图 1-6

视野拓展

释疑解难

空间想象能力的形成始于对几何模型的观察

本节是立体几何的开篇课，对空间图形的研究就从这里开始，可谓帷幕刚刚拉开. 在初中平面几何中，我们是以一个平面为背景，圈定在这个平面内研究各种几何图形的相对位置和数量关系. 平面概念的介入，标志着我们研究空间图形的位置关系和数量关系进入了实质性阶段. 这时的平面已经不再具有全集的地位，而是以空间对象的地位置于我们的讨论之中. 为了直观、形象地表达空间对象的相互位置关系，平面又往往成为空间图形的位置关系的参照物. 今后我们无论研究空间的两条直线还是研究空间的直线和平面，都要以平面为参照物去画图去分析和解决问题. 由于平面的概念是从生活中抽象出来的，所以在研究有关平面问题时还离不开生活中的模型，如长方体，正方体等等. 虽然它们的每一个面都是有限图形，但是这并不影响我们的研究和讨论，因为每个面无限延展的结果都是平面. 初学者要善于观察这些几何体的表面特征，从中获得一些感性认识，逐渐培养自己的空间想象能力.

典型例题导析

[例 5]　正方体各面所在平面将空间分成几部分？ 本节难点

分析　如图 1-7，若从整体考虑较难入手，不妨分层考虑，采取俯视图法. 俯视平面 AB_1、平面 BC_1、平面 CD_1、平面 DA_1，依次得 AB、BC、CD、DA. 这时，正方体变成正方形 $ABCD$. 再将正方形 $ABCD$ 延展为“#”字形，将空间分成 9 部分. 两个互相平行的水平平面又将“#”字分成三层，因此正方体各面所在平面将空间分成 27 部分.

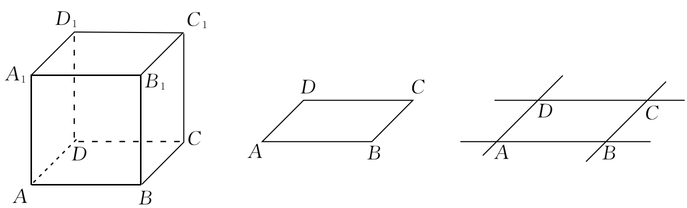


图 1-7

解　正方体各面所在平面将空间分成 27 部分.

点评　空间想象能力的培养就是这样开始的，以实物为参照，然后延展，归结到题目要求的意境中去.

[例 6]　四个平面最多能将空间分成几部分？

分析　在掌握三个平面分空间问题的情况下，考虑第四个平面的放置，则易知将空间分成最多为 15 部分.

解　四个平面最多将空间分成 15 部分. 由于三个平面最多将空间分成 8 部分(见例 4). 第四个平面放入后，最多能将七个空间部分分割成十四个空间部分，而有一个空间部分没有被第四个平面分割.

思维拓展训练题

1. 把图 1-8 中所给图形补充完整，使它们均表示两个有公共点的平面.

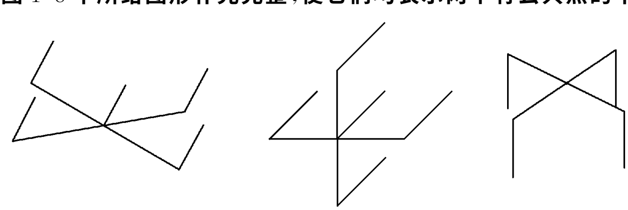


图 1-8

2. 一个西瓜切 3 刀，最多能切出几块？如果切 4 刀呢？

3. 如果一条直线上有两个点在一个平面内，那么这条直线与这个平面的位置关系如何？凭想象画出图形.

4. 如果两个平面有一个公共点，那么这两个平面的位置关系如何？凭想象画图.

5. 如果两个平面没有公共点，那么这两个平面应是怎样的位置关系？画出图形.

6. 空间的三个平面，可能没有公共直线，可能有一条公共直线，可能有两条公共直线，可能有三条公共直线，画出图形.

7. 4 个平面两两相交于 6 条直线，围成一个几何体，画出图形.

8. 一条直线与一个平面没有公共点，画出图形.

9. 一条直线能在一个平面内吗？为什么，如果能，画出图形.

10. 画出一个长方体的直观图形.

答案与提示

1. 如图 1-9.

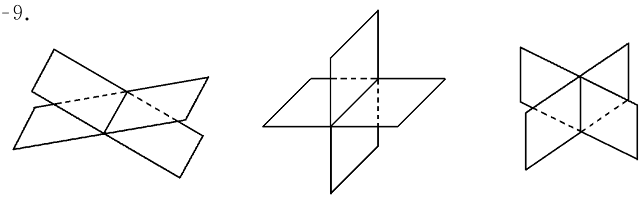


图 1-9

2. 一个西瓜切 3 刀，最多能切出 8 块，如果切 4 刀最多能切出 15 块.

3. 这条直线在平面内. 因为直线是直的，平面是平的，两点确定直线的位置，两点在平面内，就把直线确定到了平面内. 如图 1-10.

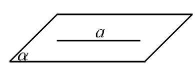


图 1-10

4. 由于平面是平的，又是无限延展的，两平面有一个公共点，它们必相交，且有一条公共直线，如图 1-11.

5. 这两个平面的位置关系如图 1-12.

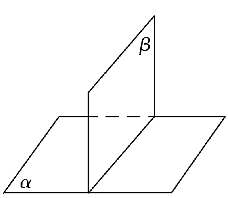


图 1-11

这种图形有多种画法，这只是其中一种画法

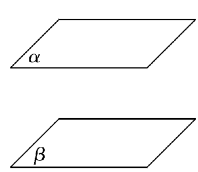


图 1-12

6. 空间三个平面的位置关系,按公共直线条数讨论有 0,1,2,3 条四种情况,五种图形,如图 1-13.

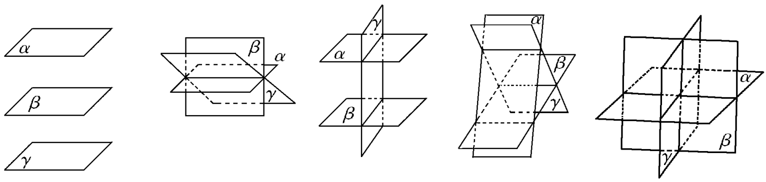


图 1-13

7. 围成的图形如图 1-14.
8. 直线与平面没有公共点,如图 1-15.
9. 直线能在平面内. 因为直线是直的,平面是平的,直线虽可无限延长,但平面也可无限延展,如图 1-16.
10. 长方体的直观图如图 1-17.

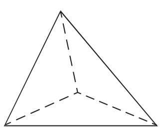


图 1-14

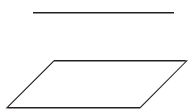


图 1-15

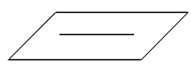


图 1-16

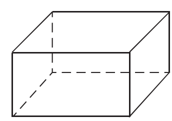


图 1-17

1.2　平面的基本性质

重点难点归纳

重点　会按课本原话叙述平面的基本性质的三个公理及三个推论.

难点　对公理、推论中关键字、词的理解和掌握;平面基本性质的应用.

本节需掌握的知识点　三个公理,三个推论.

知识点精析与应用

知识点精析

公理源于生活实际,它作为一切论证的基础,不加任何证明就承认下来

1. 公理及其记忆法

公理 1　如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上所有的点都在这个平面内.

公理 2　如果两个平面有一个公共点，那么它们还有其他公共点，且所有这些公共点的集合是一条通过这个公共点的直线.

公理 3　经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面.

推论 1　经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面.

推论 2　经过两条相交直线，有且只有一个平面.

推论 3　经过两条平行直线，有且只有一个平面.

看如上公理中加点的字，公理 1：一条直线，公理 2：两个平面，公理 3：三点，这样不仅通过加点的字提出公理的内容，而且还可记住公理的序号.

剖析公理：

这里所说的线面是指直线和平面，解题过程中要全称

公理 1 的条件是“线上两点在面内”. 这是公理的仅需条件，我们知道，条件越少，公理越好用. 再看公理的结论：“线上所有的点都在面内”. 这一结论阐述了两个观点，一是整个直线在面内，二是线上的点在面内.

公理 2 的条件是“两面共一点”，结论是两面共一线，且线过这一点、线唯一.

公理 3 的条件是经过不在同一条直线上的三点，结论是有且只有一个平面. 条件中的三点因为是骨干，所以一般不被忽视，而不在同一条直线上是附加的前提条件，容易被忽视，舍之则结论不成立，要引起注意. 结论中的“有且只有”，即存在且唯一，又可称之为“确定”.

推论 1 中的“直线外”易被忽视，舍之则结论不成立. 当依据一线一点确定平面时，线上点与线外点的差别太大了，是质的差别.

2. 公理的作用

(1)公理 1 的第一个作用是判定直线在平面内. 第二个作用是判定点在平面内，即如果直线上两点在平面内，点在直线上，则点在平面内.

(2)公理 2 的第一个作用是判定两平面相交，第二个作用是判定点在直线上，即问“点是什么点，线是什么线”. 点是某两平面的公共点，线是这两平面的公共直线，则这点在这条直线上. 第三个作用是我们终于找到了上一节我们画两个有公共点的平面为什么要画出交线的依据了.

(3)公理 3 及其三个推论的作用是确定平面.

3. 公理的应用

(1)证明线共面.

证明线共面，一般是三线共面作原始题从而推广到多线共面，一般有两种证法：一是两线确定一个平面，再证明第三线在这个平面内；二是其中两条直线确定一个平面 α，另两条直线确定平面 β，而 α 与 β 又同时具有确定平面的公共条件，进而 α 与 β 重合，从而三线共面.

(2)证明三点共线.

三点都是某两平面的公共点，则三点共线.

(3)证明三线共点.

与初中证明三线共点的思路一样，先证明两条直线交于一点，再证明第三条直线经过这个点，把问题化归到证明点在直线上的问题.

(4)证明四点共面.

4. 符号的使用

点 A 在直线 a 上(外)，记作 $A\in(\notin)a$；点 A 在平面 α 内(外)，记作 $A\in(\notin)\alpha$.

直线 a 在平面 α 内(外)，记作 $a\subset(\not\subset)\alpha$.

直线 a 与直线 b 相交于点 A，记作 $a\cap b=A$；直线 a 与平面 α 相交于点 A，记作 $a\cap\alpha=A$；平面 α 与平面 β 相交于直线 a，记作 $\alpha\cap\beta=a$.

解题方法指导

[例 1] 用符号表示下列语句： 这是立体几何中新介绍的表示法，要和集合对照起来学

(1)点 A 在平面 α 内，但在平面 β 外；

(2)直线 a 经过平面 α 外一点 M；

(3)直线 a 在平面 α 内，又在平面 β 内. 由此认定平面 α 和 β 相交于直线 a.

解 (1)$A\in\alpha$，但 $A\notin\beta$.

(2)$M\notin\alpha$，$M\in a$.

(3)$a\subset\alpha$，且 $a\subset\beta$，即 $\alpha\cap\beta=a$.

[例 2] (1)不共面的四点可以确定几个平面？ 典范题型，记住为好

(2)三条直线两两平行，但不共面，它们可以确定几个平面？

(3)共点的三条直线可以确定几个平面？

解 (1)不共面的四点可以确定 4 个平面.

(2)三条直线两两平行，但不共面，它们可以确定 3 个平面.

(3)共点的三条直线可以确定 1 个或 3 个平面.

[例 3] 下面的说法正确吗？为什么？

(1)线段 AB 在平面 α 内，直线 AB 不全在平面 α 内；

(2)平面 α 和 β 只有一个公共点.

若线段 AB 在 α 内，则线段 AB 上的所有的点都在 α 内. A、B 两点当然不该例外

解　(1)不正确. 由线段 AB 在平面 α 内知，线段上有两个点 A、B 在平面 α 内，所以直线 AB 在平面 α 内(公理 1).

(2)不正确. 依公理 2，两个平面有一个公共点，它们有且只有一条通过这个点的公共直线. 对本例而言，这时应该说平面 α 和 β 有无数个公共点，不能说它们只有一个公共点.

[例 4]　一条直线经过平面内一点与平面外一点，它和这个平面有几个公共点？为什么？

公理 1 的间接应用

解　这条直线和这个平面只有一个公共点.

事实上，若这条直线和这个平面有两个公共点，则由公理 1 知，这条直线上的所有的点都在这个平面内. 此时，这条直线所经过的平面外的那一点也在这个平面内. 这与已知矛盾，所以上述直线和平面不可能再有第二个公共点.

点评　本题是采用反证法进行论证的. 我们知道：

$A\Rightarrow B$　原命题

$B\Rightarrow A$　逆命题

$\neg A\Rightarrow\neg B$　否命题

$\neg B\Rightarrow\neg A$　逆否命题

（逆命题与否命题）等效；（原命题与逆否命题）等效

四种命题及其关系

所谓原命题与逆否命题等效，逆命题与否命题等效，就是它们同真同假. 依据这种等效性，当我们证明原命题成立比较困难时，可转至证明它的逆否命题成立. 思路是否定结论，推出矛盾的结果. 这就是反证法.

[例 5]　已知 $\triangle ABC$ 在平面 α 外，$AB\cap\alpha=P$，$AC\cap\alpha=Q$，$BC\cap\alpha=R$，求证：P、Q、R 三点共线.

证明三点共线问题

分析　只需证明 P、Q、R 为平面 ABC 与 α 的公共点.

证明　如图 1-18，$\because$ $AB\cap\alpha=P$，$AB\subset$ 平面 ABC，

$\therefore$ $P\in$ 平面 ABC，$P\in\alpha$.

$\therefore$ P 在平面 ABC 与 α 的交线上.

同理可证：Q、R 也在平面 ABC 与 α 的交线上.

$\therefore$ P、Q、R 三点共线.

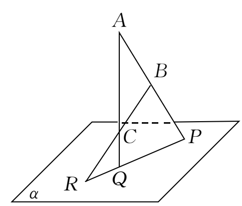


图 1-18

点评　证明空间三点共线的方法：将线看作两平面的交线，只需证明这三点都是两个平面的公共点，

则公共点必定在两平面的交线上,因此三点共线.

[例 6] 已知 E、F、G、H 分别是空间四边形 $ABCD$ 各边 AB、AD、CB、CD 上的点,且直线 EF 和 GH 交于点 P,求证:点 B、D、P 在同一条直线上.

证明 如图 1-19, 问题的变化再现

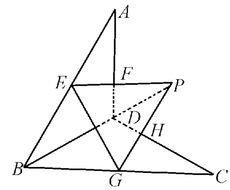


图 1-19

$\because$ 直线 $EF\cap$直线 $GH=P$,

$\therefore$ $P\in$直线 EF,

而 $EF\subset$平面 ABD,

$\therefore$ $P\in$平面 ABD.

同理,$P\in$平面 CBD,即点 P 是平面 ABD 和平面 CBD 的公共点.显然,点 B、D 也是平面 ABD 和平面 CBD 的公共点,由公理 2 知,点 B、D、P 都在平面 ABD 和平面 CBD 的交线上,即点 B、D、P 在同一条直线上.

点评 这个问题与上例不同,前者是证明三点都是两平面的公共点,把三点统一在一面旗帜(交线)下;后者是集中证明一点是两平面的公共点,而另两点显然是两个平面的公共点.

[例 7] 已知直线 $a/\!/$直线 b,直线 m 与 a、b 分别交于点 A、B.求证:过 a、b、m 有且只有一个平面. 确定平面问题

分析 证过这三条直线有且只有一个平面,首先确定平面,然后再证平面唯一.

证明 如图 1-20,$\because$ $a/\!/b$,

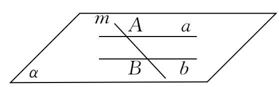


图 1-20

$\therefore$ 过 a、b 有一个平面 α.

又 $m\cap a=A$,$m\cap b=B$,

$\therefore$ $A\in a$,$B\in b$,$A\in\alpha$,$B\in\alpha$.

又 $A\in m$,$B\in m$,

$\therefore$ $m\subset\alpha$,a、b、m 共面于 α.

假设过 a、b、m 有一个平面 β 异于 α,则 $a\subset\alpha$,$b\subset\alpha$,$a\subset\beta$,$b\subset\beta$.

这与 $a/\!/b$,过 a、b 有且只有一个平面相矛盾.

因此,过 a、b、m 有且只有一个平面.

点评 证明三线共面与证明三线确定一个平面不同,前者只要证明平面的存在性,而后者不但要证明平面的存在性,还必须证明平面的唯一性.反证法是证明唯一性的常用方法.