文登考研过关指导丛书

考研数学过关基本题型

（数学三、四）

陈文灯数学团队摇编著

中摇国摇铁摇道摇出摇版摇社

圆园园缘年 · 北京

内摇容摇简摇介

本书是专门为学习时间紧、数学基础不太好或数学搁置了多年而又准备考研的朋友编写的一本速成书援本书完全按照圆园园元年数学考纲,综合分析历年来的考试试卷,筛选出重要的题型援考生只要很好地复习,就能够掌握解题的方法和技巧,达到考研数学过关的目的援

全书由四篇构成,第员篇介绍微积分中的基本题型;第圆篇介绍线性线数中的基本题型;第猿篇介绍概率论与数理统计中的基本题型;第源篇介绍应用题中的基本题型援本书适用于考数学三或数学四的考生援

书摇摇名:文登考研过关指导丛书
考研数学过关基本题型(数学三、四)
作摇摇者:陈文灯数学团队摇编著
出版发行:中国铁道出版社(员园园园缘源北京市宣武区右安门西街愿号)
责任编辑:李小军摇摇摇摇摇编辑部电话:园员园原缘员愿苑猿园缘怨
封面设计:冯龙彬
印摇摇刷:中国铁道出版社印刷厂
开摇摇本:苑愿苑皂皂伊员园怨圆皂皂摇员辕员远摇摇摇印张:猿缘援苑缘摇摇摇字数:源园园千字
版摇摇本:圆园园远年苑月第员版摇摇圆园园远年苑月第员次印刷
书摇摇号:陨杂月晕苑远愿原苑原员员猿原园苑猿源愿原怨·韵·员猿远
定摇摇价:圆愿援园园元

内摇容摇简摇介

本书是专门为学习时间紧、数学基础不太好或数学搁置了多年而又准备考研的朋友编写的一本速成书援本书完全按照 圆园园远年数学考纲，综合分析历年来的考试试卷，筛选出重要的题型援考生只要很好地复习，就能够掌握解题的方法和技巧，达到考研数学过关的目的援

全书由四篇构成，第 员篇介绍微积分中的基本题型；第 圆篇介绍线性线数中的基本题型；第 猿篇介绍概率论与数理统计中的基本题型；第 源篇介绍应用题中的基本题型援本书适用于考数学三或数学四的考生援

书摇摇名：文登考研过关指导丛书
考研数学过关基本题型（数学三、四）
作摇摇者：陈文灯数学团队摇编著
出版发行：中国铁道出版社（[illegible]北京市宣武区右安门西街 愿号）
责任编辑：李小军摇摇摇摇摇编辑部电话：[illegible]
封面设计：冯龙彬
印摇摇刷：中国铁道出版社印刷厂
开摇摇本：[illegible]摇摇摇印张：[illegible]摇摇摇字数：[illegible]千字
版摇摇本：[illegible]年 苑月第 员版摇摇[illegible]年 苑月第 圆次印刷
书摇摇号：[illegible]
定摇摇价：[illegible]元

网址：[illegible]

前摇言

在近年的考研辅导中，有很多考生向我们反映，自己的基础比较薄弱，学习起来比较困难，难以迅速提高成绩援还有的考生是在职人员，工作非常繁忙，没有很多时间可以支配，希望能有一本考研数学速成书援如何帮助考生在短时间内取得好的学习效果，达到硕士生入学考试数学的分数线，这就是我们研发此书的初衷和愿望援

我们对员怨愿苑年～圆园园缘年考研试卷做了认真研究和分析，结合我们多年来的考研数学辅导经验，精心编写了这本《考研数学过关基本题型（数学三、四）》援针对每个题型，设置了以下几个栏目：

■ 考试概况：给出员怨愿苑年～圆园园缘年该题型在数学三、数学四试卷中的考查情况：填空题、单项选择题和计算证明题中出现的频率援

■ 思路点拨：针对该题型给出了相应的解题思路和方法，简洁而实用援

■ 实例精讲：根据真题难度和题型设置了典型例题，并给出了详细讲解，供考生学习模拟之用援

■ 现学现练：精选相应试题供考生进行实战演练援

■ 要点补充：对一些题型依据需要给出补充注释，帮助考生加强对题型的理解援

考生通过阅读本书，不但能了解历年试卷中试题在高等数学、线性代数、概率论与数理统计等三门课程中的分布情况和难度，而且能够掌握各种基本题型的解题思路和方法援通过对真题的认真演练，揭开考研数学的神秘面纱，达到考试时胸有成竹、应对自如的境界援

成书仓促，并请考研朋友和数学同仁予以指正援

编摇者

圆园园缘援远

目摇录

微积分篇

第 员章摇函数、极限和连续 …… (员
题型 员摇函数的定义域或值域的求解 …… (员
题型 圆摇求复合函数的表达式 …… (圆
题型 猿摇函数有界性、单调性、周期性和奇偶性等函数的性质的判别或证明 …… (猿
题型 源摇函数极限存在性的判定和求解 …… (源
题型 缘摇求数列的 灶项和或积的极限 …… (缘
题型 远摇极限式中含有 葬垣/遭或 √葬垣/遭形式的极限 …… (远
题型 苑摇求 园辕园型极限 …… (苑
题型 愿摇求肄 辕肄型极限 …… (愿
题型 怨摇求肄 原肄型极限 …… (怨
题型 员园摇求 园· 肄型极限 …… (员园
题型 员员摇求 员肄型极限 …… (员园
题型 员圆摇求 园园型,肄园型极限 …… (员员
题型 员猿摇极限式中常数值的确定 …… (员圆
题型 员源摇无穷小的比较和确定无穷小的阶或求常数 …… (员猿
题型 员缘摇讨论函数的连续性或已知函数的连续性反求常数 …… (员源
题型 员远摇函数间断点的判别或求解 …… (员远
参考答案 …… (员苑
第 圆章摇导数与微分 …… (圆员
题型 员摇已知函数在一点可导,求与之相关的函数式的极限或表达式 …… (圆员
题型 圆摇函数在一点是否可导的判定或求解或逆问题求解 …… (圆圆
题型 猿摇求一元复合函数的导数或微分 …… (圆源
题型 源摇求一元隐函数的导数或微分 …… (圆远
题型 缘摇求函数表达式为若干因子连乘积、乘方、开方或商形式的函数的导数或微分 …… (圆远
题型 远摇求函数的 灶阶导数 …… (圆苑
参考答案 …… (圆愿
第 猿章摇一元函数积分学 …… (猿员
题型 员摇与原函数定义、性质相关的命题 …… (猿员

题型 圆摇求有理函数的不定积分 …………………………………………………… (猿圆)
题型 猿摇求含根式的不定积分 …………………………………………………… (猿源)
题型 源摇求三角有理式的不定积分 …………………………………………………… (猿缘)
题型 缘摇求含有反三角函数的不定积分 …………………………………………………… (猿缘)
题型 远摇求抽象函数的不定积分 …………………………………………………… (猿远)
题型 苑摇求定积分或已知定积分反求参数 …………………………………………………… (猿苑)
题型 愿摇求分段函数或含绝对值符号的变限积分或定积分 …………………………………… (猿愿)
题型 怨摇求变限积分的导数(有一部分在求极限中考查) …………………………………… (源园)
题型 员园摇计算广义积分 …………………………………………………… (源员)
题型 员员摇广义积分的判敛 …………………………………………………… (源圆)
参考答案 …………………………………………………… (源源)
第 源章摇中值定理 …………………………………………………… (源愿)
题型 员摇方程根存在性的证明 …………………………………………………… (源愿)
题型 圆摇至少存在一点 ξ,使枣忆(ξ)越园或枣义(ξ)越园的证明 …………………………… (源怨)
题型 猿摇至少存在一点 ξ,使含枣忆(ξ)的代数式成立的证明 …………………………… (缘圆)
题型 源摇至少存在两点 ξ,η,使某个关系式成立的证明 …………………………… (缘圆)
题型 缘摇定积分等式的证明 …………………………………………………… (缘猿)
参考答案 …………………………………………………… (缘缘)
第 缘章摇多元函数微分学 …………………………………………………… (缘愿)
题型 员摇求多元复合函数的偏导数 …………………………………………………… (缘愿)
题型 圆摇求多元隐函数的偏导数 …………………………………………………… (缘怨)
题型 猿摇求全微分 …………………………………………………… (远圆)
参考答案 …………………………………………………… (远猿)
第 远章摇二重积分 …………………………………………………… (远缘)
题型 员摇被积分域为矩形、三角形或任意形的二重积分的计算 ………………………… (远缘)
题型 圆摇被积分域为圆域、环域、扇域、环扇域且被积函数形如 枣(曾^{2}垣赠^2),枣$\left(\frac{曾}{赠}\right)$,枣$\left(\frac{赠}{曾}\right)$的
二重积分的计算 …………………………………………………… (远苑)
题型 猿摇交换二重积分的积分次序或直角坐标与极坐标的转化 ………………………… (远愿)
题型 源摇求无界区域上的二重积分 …………………………………………………… (苑圆)
参考答案 …………………………………………………… (苑员)
第 苑章摇无穷级数 …………………………………………………… (苑源)
题型 员摇无穷级数敛散性的判定或证明 …………………………………………………… (苑源)
题型 圆摇求函数项级数的收敛域,求幂级数的收敛域或收敛半径 ………………………… (苑远)
题型 猿摇函数的幂级数展开 …………………………………………………… (苑愿)
题型 源摇求无穷级数的和(常与微分方程或极值一起出题) ………………………………… (愿圆)
参考答案 …………………………………………………… (愿圆)

第 愿章摇常微分方程与差分方程 …………………………………………………………………… (愿缘

题型 员摇求一阶可分离变量方程,一阶齐次方程或可化为齐次方程的通解或特解 ……… (愿缘

题型 圆摇求一阶线性方程的通解或特解 ………………………………………………………… (愿苑

题型 猿摇求二阶齐次或非齐次线性微分方程的通解或特解 ………………………………… (愿愿

题型 源摇求一阶差分方程的通解或特解 ………………………………………………………… (怨园

参考答案 ………………………………………………………………………………………… (怨员

第 怨章摇函数方程与不等式证明 ………………………………………………………………… (怨猿

题型 员摇根据函数方程式求函数表达式 ………………………………………………………… (怨猿

题型 圆摇函数方程中含有极限式,求解函数表达式 ……………………………………………… (怨猿

题型 猿摇已知函数在一点的导数及函数方程,求解函数表达式 ………………………………… (怨源

题型 源摇已知函数方程中含有变上限积分或导函数,求函数表达式 ………………………… (怨缘

题型 缘摇已知函数连续,且函数式中含函数的定积分、极限或二重积分,求函数表达式

………………………………………………………………………………………… (怨远

题型 远摇存在一个点 $\xi \in$ (葬,遭,使得不等式成立或不等式通过变形,一端可写成$\frac{枣遭\ 原枣葬}{遭原葬}$

或$\frac{枣遭\ 原枣葬}{早(遭\ 原枣葬}$的不等式的证明援 ……………………………………………… (怨愿

题型 苑摇在某一区间 (葬,遭不等式命题成立的证明 ………………………………………… (怨怨

题型 愿摇积分不等式的证明 ……………………………………………………………………… (员园园

题型 怨摇杂例 ……………………………………………………………………………………… (员园圆

参考答案 ………………………………………………………………………………………… (员园圆

线性代数篇

第 员章摇行列式 …………………………………………………………………………………… (员园远

题型 员摇抽象行列式的计算 ……………………………………………………………………… (员园远

题型 圆摇低阶行列式的计算 ……………………………………………………………………… (员园愿

题型 猿摇灶阶行列式的计算 ……………………………………………………………………… (员员园

参考答案 ………………………………………………………………………………………… (员员源

第 圆章摇矩阵 ……………………………………………………………………………………… (员员苑

题型 员摇与矩阵的乘积运算相关的命题 ………………………………………………………… (员员苑

题型 圆摇与初等变换或初等矩阵相关的命题 …………………………………………………… (员员愿

题型 猿摇矩阵秩的运算或已知矩阵的秩反求矩阵中的参数或其他 ………………………… (员员怨

题型 源摇有关矩阵可逆的证明 …………………………………………………………………… (员圆员

题型 缘摇求矩阵的逆或已知矩阵的逆反求参数 ……………………………………………… (员圆园

题型 远摇有关伴随矩阵的判定或证明 …………………………………………………………… (员圆缘

题型 苑摇解矩阵方程 ……………………………………………………………………………… (员圆远

参考答案 ………………………………………………………………………………………… (员圆愿

第猿章摇向量 …………………………………………………………………… ([illegible]
　　题型员摇求向量组的秩或极大线性无关组或根据向量组的秩求向量中的参数 ………… ([illegible]
　　题型圆摇向量组的线性相关性的判定或根据向量相关性求参数 ………………………… ([illegible]
　　题型猿摇向量组的线性表出的命题的判定或讨论 ……………………………………… ([illegible]
　　参考答案 ………………………………………………………………………… ([illegible]
第源章摇线性方程组 …………………………………………………………………… ([illegible]
　　题型员摇与解的性质、判定和结构相关的命题 ……………………………………… ([illegible]
　　题型圆摇有关基础解系的证明或判定 ……………………………………………… ([illegible]
　　题型猿摇求不含参数的线性方程组的通解 ………………………………………… ([illegible]
　　题型源摇含参数的线性方程组的解的讨论 ………………………………………… ([illegible]
　　题型缘摇抽象方程组的通解 ………………………………………………………… ([illegible]
　　题型远摇有关两个方程组的公共解的求解或证明 …………………………………… ([illegible]
　　参考答案 ………………………………………………………………………… ([illegible]
第缘章摇特征值与特征多项式 ……………………………………………………… ([illegible]
　　题型员摇求数值矩阵的特征值和特征向量 ………………………………………… ([illegible]
　　题型圆摇求抽象矩阵的特征值和特征向量 ………………………………………… ([illegible]
　　题型猿摇已知矩阵的特征值和特征向量,反求矩阵和行列式等问题 ………………… ([illegible]
　　题型源摇有关矩阵相似和对角化的命题 …………………………………………… ([illegible]
　　题型缘摇有关特征值和特征向量的证明题 ………………………………………… ([illegible]
　　参考答案 ………………………………………………………………………… ([illegible]
第远章摇二次型 ………………………………………………………………………… ([illegible]
　　题型员摇有关二次型所对应的矩阵、秩、正负惯性指数等命题 ………………………… ([illegible]
　　题型圆摇将二次型化为标准形或已知标准形反求参数 ……………………………… ([illegible]
　　题型猿摇有关二次型或矩阵的正定性的讨论或证明 ……………………………… ([illegible]
　　题型源摇与矩阵合同或规范形相关的命题 ………………………………………… ([illegible]
　　参考答案 ………………………………………………………………………… ([illegible]

概率论与数理统计篇

第员章摇随机事件和概率 ……………………………………………………………… ([illegible]
　　题型员摇有关事件关系和运算的命题 ……………………………………………… ([illegible]
　　题型圆摇有关事件的独立和相容性的判定或证明 …………………………………… ([illegible]
　　题型猿摇求古典型概率 ……………………………………………………………… ([illegible]
　　题型源摇求几何型概率 ……………………………………………………………… ([illegible]
　　题型缘摇有关条件概率和积事件概率的计算 ………………………………………… ([illegible]
　　题型远摇有关全概率公式和贝叶斯公式的计算 ……………………………………… ([illegible]
　　参考答案 ………………………………………………………………………… ([illegible]

第 圆章摇随机变量及其分布 …………………………………………………………… (员愿怨

题型 员摇与一维随机变量概念、性质有关的命题 …………………………………… (员愿怨

题型 圆摇求一维随机变量的分布及分布律或分布密度 ……………………………… (圆园圆

题型 猿摇求一维随机变量满足一定条件的概率或逆问题 …………………………… (圆园猿

题型 源摇求一维随机变量函数的分布及分布律或分布密度 ………………………… (圆园缘

参考答案 ……………………………………………………………………………… (圆园苑

第 猿章摇二维随机变量及其分布 ……………………………………………………… (圆员员

题型 员摇与二维随机变量概念、性质有关的命题 …………………………………… (圆员员

题型 圆摇求二维或多维随机变量的各种分布及独立性的讨论 ……………………… (圆员圆

题型 猿摇求二维随机变量函数的分布或取值的概率 ………………………………… (圆员苑

参考答案 ……………………………………………………………………………… (圆员怨

第 源章摇随机变量的数字特征 …………………………………………………………… (圆圆源

题型 员摇有关数字特征运算与性质的命题 ……………………………………………… (圆圆源

题型 圆摇求一维随机变量的数字特征或逆问题 ………………………………………… (圆圆远

题型 猿摇求一维随机变量函数的数学期望 ……………………………………………… (圆圆苑

题型 源摇求二维或多维随机变量的数字特征及独立性的讨论 ……………………… (圆圆怨

题型 缘摇求二维或多维随机变量函数的数学期望 ……………………………………… (圆猿圆

题型 远摇根据切比雪夫不等式估计概率 …………………………………………………… (圆猿源

参考答案 ……………………………………………………………………………… (圆猿缘

第 缘章摇大数定律和中心极限定理 ……………………………………………………… (圆源园

题型 员摇与中心极限定理有关的命题 ……………………………………………………… (圆源园

题型 圆摇与大数定律有关的命题 …………………………………………………………… (圆源员

参考答案 ……………………………………………………………………………… (圆源猿

第 远章摇数理统计的基本概念 …………………………………………………………… (圆源源

题型 员摇统计量的分布的求解或判定或已知分布反求统计量 ……………………… (圆源源

题型 圆摇求统计量的数字特征 ………………………………………………………… (圆源苑

题型 猿摇求统计量取值的概率或样本的容量 ……………………………………… (圆源苑

参考答案 ……………………………………………………………………………… (圆源愿

第 苑章摇参数估计与假设检验 …………………………………………………………… (圆缘园

题型 员摇求矩估计量、矩估计值或最大似然估计量、估计值援 ……………………… (圆缘园

题型 圆摇评价估计的优劣(无偏性、有效性、一致性等) ……………………………… (圆缘圆

题型 猿摇有关区间估计或置信区间的命题 ………………………………………… (圆缘猿

题型 源摇正态总体的均值和方差的假设检验 ……………………………………… (圆缘缘

题型 缘摇有关两类错误的命题 ……………………………………………………… (圆缘苑

参考答案 ……………………………………………………………………………… (圆缘愿

应用题篇

第员章摇几何应用题 …………………………………………………… ([illegible]
题型员摇一元函数的极值问题的判定或求解 ………………………… ([illegible]
题型圆摇一元函数的最值问题的判定或求解 ………………………… ([illegible]
题型猿摇函数凹凸区间及拐点的判定或求解 ………………………… ([illegible]
题型源摇曲线的渐近线的判定或求解 ……………………………… ([illegible]
题型缘摇方程的根的判定或求解 …………………………………… ([illegible]
题型远摇至少存在一点,使函数在该点的值等于某常数的证明 ……… ([illegible]
题型苑摇有关函数的图形的命题 …………………………………… ([illegible]
题型愿摇求平面曲线的切线和法线方程或逆问题 …………………… ([illegible]
题型怨摇求平面图形的面积或参数 ………………………………… ([illegible]
题型员园摇求平面图形绕坐标轴旋转所成的旋转体的体积 …………… ([illegible]
题型员员摇多元函数的极值与最值问题的判定或求解 ………………… ([illegible]
参考答案 ……………………………………………………………… ([illegible]
第圆章摇经济应用题 …………………………………………………… ([illegible]
题型员摇涉及经济函数的命题 ……………………………………… ([illegible]
题型圆摇微分学在经济中的应用题 …………………………………… ([illegible]
题型猿摇积分学在经济中的应用题 …………………………………… ([illegible]
题型源摇复利问题 …………………………………………………… ([illegible]
题型缘摇概率论在经济中的应用题 …………………………………… ([illegible]
题型远摇微分方程与差分方程在经济中的应用题 ……………………… ([illegible]
参考答案 ……………………………………………………………… ([illegible]

微积分篇

摇摇 摇摇摇摇摇摇摇摇 第 员章 摇 函数、极限和连续

题型 员 函数的定义域或值域的求解

考试概况 数学三没有考过 数学四在 员怨怨圆年考过 员道填空题援

思路点拨：(员 由解析式建立的函数,其定义域是使运算有意义的自变量的集合 ;根据实际问题建立的函数,其定义域是具有实际意义的自变量的集合 ;而求复杂函数的定义域,就是求解由简单函数的定义域 (见要点补充 圆 所构成的不等式组的解集援

(圆 由多项式表达的函数,一般用配方法或判别式法求函数的值域 ;若存在反函数,则可通过求反函数的定义域来求原函数的值域 ;若含三角函数,可利用某些三角函数的有界性 还可利用连续函数在闭区间上存在最值来求函数的值域援

实例精讲：

【例 员】摇 求下列函数的定义域：

(员 赠越造燥早曾原员(怨原曾圆) 摇摇摇摇摇摇 (圆 赠越$\sqrt{\text{葬则糟泽蚤灶曾原}\frac{曾}{源}}$援

【解】摇 (员 函数若要有意义,必满足以下条件：

$$\begin{cases}怨原曾^圆 跃园\\ 曾原员跃园\\ 曾原员\neq 员\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}原猿约曾约猿\\ 曾跃员\\ 曾\neq 圆\end{cases}$$,故函数的定义域为：{曾渣员约曾约圆或 圆约曾约猿}援

(圆 函数若要有意义,必满足以下条件：

$$\begin{cases}葬则糟泽蚤灶曾原\frac{\pi}{源}\geqslant 园\\ 渣曾渣\leqslant 员\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}曾\geqslant\frac{\sqrt{圆}}{圆}\\ 原员\leqslant 曾\leqslant 员\end{cases}$$,故函数的定义域为：$\left\{曾\middle|\frac{\sqrt{圆}}{圆}\leqslant 曾\leqslant 员\right\}$援

【例 圆】摇 求下列函数的值域：

(员 赠越猿原$\sqrt{曾^圆 原源曾垣怨}$; 摇摇 (圆 赠越$\frac{泽蚤灶曾原圆}{泽蚤灶曾垣圆}$;

(猿 赠越$\frac{曾垣员}{曾原员}$; 摇摇 (源 赠越猿原圆泽蚤灶$\left(猿曾原\frac{\pi}{源}\right)$援

【解】摇 (员 应用配方法,则 赠越猿原$\sqrt{(曾原圆)^圆 垣缘}$而 (曾原圆)^圆 垣缘\geqslant 缘

故函数的值域为：(原肄,猿原$\sqrt{缘}$]援

(圆 赠越$\frac{泽蚤灶曾原圆}{泽蚤灶曾垣圆}$越员原$\frac{源}{泽蚤灶曾垣圆}$,而 原员\leqslant 泽蚤灶曾\leqslant 员,

所以 员≤ 澤螯會垣圆≤ 猿 $\frac{源}{猿}$ ≤ $\frac{源}{澤螯會垣圆}$ ≤ 源

即 原猿≤ 赠≤ 原 $\frac{员}{猿}$,故函数的值域为:$\left[原猿, 原\frac{员}{猿}\right]$援

(猿 当 會≠ 员时,由原式可得 會越 $\frac{员垣赠}{赠原员}$即 赠≠ 员援

故函数的值域为:(原肆,员) ∪ (员, 垣肆) 援

(源 由原式可得 :會越 $\frac{员}{猿}$ 葬则蚤灶 $\frac{猿原赠}{圆}$ 垣 $\frac{\pi}{员圆}$,因为 $\left|\frac{猿原赠}{圆}\right|$ ≤ 员即 员≤ 赠≤ 缘

所以函数的值域为:[员,缘]援

现学现练:

摇员援摇(员怨怨圆数学四)摇已知 枣(會) 越澤螯會,枣[φ(會)] 越员原會圆,则 φ(會) 越摇摇摇摇摇 的定义域为摇摇摇摇摇援

摇员援摇 求解下列函数的定义域:

(员) 赠越$\sqrt{澤螯會垣澧(员远原會圆)}$;　　(圆) 赠越葬则糟泽蚤灶 $\frac{圆會原员}{苑}$ 垣 $\frac{\sqrt{圆會原會圆}}{澧蚤(圆會原员)}$援

摇员援摇 求函数的值域:赠越(會原员)(會原圆)(會原猿)(會原源) 垣员缘援

要点补充:

员援函数表示法的无关性:函数与用什么字母表示无关,只与定义域和对应法则相关援

圆援简单函数的定义域:

赠越 $\frac{员}{會}$,定义域为:會≠ 园;摇摇摇摇摇摇摇摇摇 赠越$\sqrt[圆噪]{會}$定义域为:會≥ 园;

赠越澧燥早葬會定义域为:會跃园葬跃园且 葬≠ 员; 赠越澤螯會或 糟燥泽會定义域为:(原肆, 垣肆);

赠越贼葬灶會定义域为:會≠ 噪 垣 $\frac{\pi}{圆}$,噪∈ 在;　　赠越糟燥贼會定义域为:會≠ 噪,噪∈ 在;

赠越葬则糟泽蚤灶會或 葬则糟糟燥泽會定义域为:[原员,员] 援

题型 圆　求复合函数的表达式

考试概况　数学三和数学四都没有考过援

思路点拨:(员) 利用代入法,将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代;

(圆) 利用分析法,抓住最外层函数定义域的各区间段,结合中间变量的表达式及定义域进行分析,注意外层函数的定义域包含内层函数的值域;

(猿) 利用图示法,借助于图形的直观性援

实例精讲:

【例 猿】摇(圆园园员数学二)摇设 枣(會) 越 $\begin{cases}员 & 渣會渣\leq 员 \\ 园 & 渣會渣跃员\end{cases}$,则 枣{枣[枣(會)]} 等于

(粤) 园援　　(月) 员援

(悦) $\begin{cases}员 & 渣會渣\leq 员 \\ 园 & 渣會渣跃员\end{cases}$援　　(阅) $\begin{cases}园 & 渣會渣\leq 员 \\ 员 & 渣會渣跃员\end{cases}$援　　【摇】

【解】摇 因为 渣枣曾 渣≤ 员,则 枣(枣(曾)) 越员,所以 枣(枣(枣(曾))) 越枣(员) 越员援故选 (月) 援

【例 源】摇 (员怨怨园 数学二) 摇 设 早(曾) 越 $\begin{cases} 圆原曾 & 曾\leqslant 园 \\ 曾垣圆 & 曾跃园 \end{cases}$,枣(曾) 越 $\begin{cases} 曾^圆, & 曾约园 \\ 原曾 & 曾\geqslant 园 \end{cases}$,则 早(枣(曾)) 越

(粤) $\begin{cases} 圆垣曾^圆, & 曾约园 \\ 圆原曾 & 曾\geqslant 园 \end{cases}$援 (月) $\begin{cases} 圆原曾^圆, & 曾约园 \\ 圆垣曾 & 曾\geqslant 园 \end{cases}$援

(悦) $\begin{cases} 圆原曾^圆, & 曾约园 \\ 圆原曾 & 曾\geqslant 园 \end{cases}$援 (阅) $\begin{cases} 圆垣曾^圆, & 曾约园 \\ 圆垣曾 & 曾\geqslant 园 \end{cases}$援

【解】摇 早(枣(曾)) 越 $\begin{cases} 圆原枣(曾), & 枣(曾) \leqslant 园 \\ 枣(曾) 垣圆 & 枣(曾) 跃园 \end{cases}$ 越 $\begin{cases} 圆垣曾 & 曾\geqslant 园 \\ 圆垣曾^圆, & 曾约园 \end{cases}$,故选 (阅) 援

现学现练:

摇圆援摇 设 枣(曾) 越 $\begin{cases} 源原曾^圆, & 渣曾渣\leqslant 圆 \\ 园 & 渣曾渣跃圆 \end{cases}$,求 枣(枣(曾)) 援

题型 猿 函数有界性、单调性、周期性和奇偶性等函数的性质的判别或证明

考试概况 数学三在 员怨怨园年、员怨怨苑年、圆园园源年和 圆园园缘年共考过 猿道选择题和 员道计算题 数学四在 员怨怨园年、员怨怨员年、圆园园圆年、圆园园源年和 圆园园缘年共考过 缘道选择题援

思路点拨:一般利用定义援另外,利用 枣(曾) 垣枣(原曾) 越园是判别 枣(曾) 为奇函数的有效方法 若函数在区间可导,利用导数判别单调性较简便 利用闭区间上连续函数的有界性或有极限的函数必局部有界来判断函数的有界性援

实例精讲:

【例 缘】摇 设 枣(曾) 为定义在 (原蕤,蕤) 内的奇函数,若 枣(曾) 在 (园,蕤) 内单调增加,证明 枣(曾) 在 (原蕤,园) 内也单调增加援

【证明】摇 $\forall$ 曾$_员$,曾$_圆$ $\in$ (原蕤,园),且 曾$_员$ 约曾$_圆$,则 原曾$_员$,原曾$_圆$ $\in$ (园,蕤),且 原曾$_员$ 跃原曾$_圆$援

由于 枣(曾) 在 (园,蕤) 内单调增加,故 枣(原曾$_员$) 跃枣(原曾$_圆$) 援

又由于 枣(曾) 为奇函数,故 原枣(曾$_员$) 跃原枣(曾$_圆$),即 枣(曾$_员$) 约枣(曾$_圆$) 援

因此,枣(曾) 在 (原蕤,园) 内单调增加援

【例 远】摇 函数 枣(曾) 越 $\dfrac{曾}{员垣曾^圆}$ 在定义域内为

(粤) 有上界无下界援 (月) 有下界无上界援

(悦) 有界,且 原$\dfrac{员}{圆}$ $\leqslant$ 枣(曾) $\leqslant$ $\dfrac{员}{圆}$援 (阅) 有界且 原圆 $\leqslant$ $\dfrac{曾}{员垣曾^圆}$ $\leqslant$ 圆援 【摇】

【解】摇 渣枣(曾) 渣越 $\left|\dfrac{曾}{员垣曾^圆}\right|$ 越 $\dfrac{渣曾渣}{员垣曾^圆}$ $\leqslant$ $\dfrac{渣曾渣}{圆渣曾渣}$ 越 $\dfrac{员}{圆}$摇 (疫摇员垣曾^圆 $\geqslant$ 圆渣曾渣,

故 摇摇 原$\dfrac{员}{圆}$ $\leqslant$ 枣(曾) $\leqslant$ $\dfrac{员}{圆}$,摇 可知 (悦) 入选援

现学现练:

摇猿援摇 (员怨怨园 数学三、四) 摇 设函数 枣(曾) 越曾蚤葬灶曾· 藻^{泽蚤灶曾},则 枣(曾) 是

(粤) 偶函数援　　(月) 无界函数援

(悦) 周期函数援　　(阅) 单调函数援　　【摇】

摇猿援摇 (员怨怨圆数学四) 摇 设数列的通项为 $曾_{灶}$ 越 $\begin{cases} \dfrac{灶^{圆}+\sqrt{灶}}{灶}, & 若\ 灶为奇数 \\ \dfrac{员}{灶}, & 若\ 灶为偶数 \end{cases}$,则当 灶→肄 时,$曾_{灶}$ 是

(粤) 无穷大量援　　(月) 无穷小量援

(悦) 有界变量援　　(阅) 无界变量援　　【摇】

摇猿援摇 (圆园园源数学三、四) 摇 函数 枣(曾) 越 $\dfrac{渣曾渣泽蚤灶(曾原圆)}{曾(曾原员)(曾原圆)^{圆}}$ 在下列哪个区间内有界?

(粤) (原员,园) 援　　(月) (园,员) 援

(悦) (员,圆) 援　　(阅) (圆,猿) 援　　【摇】

要点补充:

员援无穷大量和无界变量是不同的援无穷大量一定是无界变量,但无界变量不一定是无穷大量援如函数 枣(曾) 越曾泽蚤灶曾是无界变量,但不是无穷大量援

圆援可导的奇函数的导函数为偶函数;可导的偶函数的导函数为奇函数援

猿援可导的周期函数的导函数为周期函数援

题型 源 函数极限存在性的判定和求解

考试概况 数学三在 员怨怨园年和 圆园园园年共考过 圆道选择题;数学四在 员怨怨园年和 圆园园园年共考过 圆道选择题援

思路点拨 利用定义、单调有界准则或夹逼准则援考查双侧极限时需考虑左右极限援

实例精讲:

【例 苑】摇 下列极限哪些是正确的?　　【摇】

(葬) $\lim\limits_{曾→园} 藻^{\frac{员}{曾}}$ 越肄;　　(遭) $\lim\limits_{曾→园^{原}} 藻^{\frac{员}{曾}}$ 越园;

(糟) $\lim\limits_{曾→园^{垣}} 藻^{\frac{员}{曾}}$ 越垣肄;　　(凿) $\lim\limits_{曾→肄} 藻^{\frac{员}{曾}}$ 越员援

【解】摇 曾→园^{垣}时,$\dfrac{员}{曾}$→垣肄,故 $藻^{\frac{员}{曾}}$→垣肄,因此 (糟) 正确;

曾→园^{原}时,$\dfrac{员}{曾}$→原肄,故 $藻^{\frac{员}{曾}}$→园,因此 (遭) 正确;所以 (葬) 不正确;

又 曾→肄 (垣肄 或 原肄) 时,$\dfrac{员}{曾}$→园,故 $藻^{\frac{员}{曾}}$→员,因此 (凿) 正确援

【例 愿】摇 (圆园园园数学三、四) 摇 设对任意的 曾总有 φ(曾) ≤ 枣(曾) ≤ 早(曾),且 $\lim\limits_{曾→肄}$[早(曾) 原φ(曾)] 越园,则 $\lim\limits_{曾→肄}$枣(曾)

(粤) 存在且一定等于零援　　(月) 存在但不一定为零援

(悦) 一定不存在援　　(阅) 不一定存在援　　【摇】

【解】摇 取 φ(曾) 越枣(曾) 越早(曾) 越曾,题设条件均满足,但 $\lim\limits_{曾→肄}$枣(曾) 越肄 (不存在) 援又取 φ(曾) 越枣(曾)

越早(曾 越园此时 $\lim\limits_{曾\to肄}$ 枣(曾 越园(存在) 摇故应选(阅 援

现学现练：

摇源援员摇 求极限：

(员 $\lim\limits_{曾\to\frac{\pi}{圆}}\frac{曾}{赃蕴曾}$；　　　　(圆 $\lim\limits_{曾\to园}\frac{曾}{糟蕴曾}$援

摇源援圆摇 (员怨怨圆数学三、四) 摇设 云(曾 越 $\frac{曾^圆}{曾原葬}\int_{葬}^{曾}$ 枣(贼)凿贼 其中 枣(曾 为连续函数，则 $\lim\limits_{曾\to葬}$ 云(曾 等于

(粤 葬圆援　　　　(月 葬圆枣(葬 援

(悦 园援　　　　(阅 不存在援　　　　【摇】

要点补充：

员援若 曾→肄 的极限中含有 葬曾(葬跃园，葬≠员 特别是 藻曾，或 葬则糟贼葬灶曾 或 葬则糟糟燥贼曾 的，一定分别求出 曾→垣肄，曾→原肄 的极限，两者相等，则 曾→肄 时的极限存在，否则不存在援

圆援(夹逼定理) 设在 曾园 的邻域内，恒有 φ(曾 ≤ 枣(曾 ≤ ψ(曾，且 $\lim\limits_{曾\to曾_园}\varphi$(曾 越 $\lim\limits_{曾\to曾_园}\psi$(曾 越粤 则 $\lim\limits_{曾\to曾_园}$ 枣(曾 越粤援

题型 缘 求数列的 灶项和或积的极限

考试概况 数学三没有考过 数学四在 员怨怨缘年考过 员道填空题援

思路点拨：(员 求数列的 灶项和的极限时，若 灶个项按递增或递减排列的，一般利用夹逼准则求解；还可利用加减的连锁反应拆通项处理援

(圆 求数列的 灶项积时，可利用乘积的连锁反应、拆通项、夹逼定理或借助对数恒等式将积化为 灶项和的形式援

实例精讲：

【例 怨】摇 求下列极限：

(员 $\lim\limits_{灶\to肄}\left[\frac{员}{员\cdot圆}垣\frac{员}{圆\cdot猿}垣\cdots垣\frac{员}{灶(灶垣员)}\right]$；

(圆 $\lim\limits_{灶\to肄}\sqrt[灶]{员垣\frac{员}{圆}垣\frac{员}{猿}垣\cdots垣\frac{员}{灶}}$援

【解】摇 (员 原式 越 $\lim\limits_{灶\to肄}\left[\left(员原\frac{员}{圆}\right)垣\left(\frac{员}{圆}原\frac{员}{猿}\right)垣\cdots垣\left(\frac{员}{灶}原\frac{员}{灶垣员}\right)\right]$

越 $\lim\limits_{灶\to肄}\left(员原\frac{员}{灶垣员}\right)$ 越员援

(圆 员≤ $\sqrt[灶]{员垣\frac{员}{圆}垣\frac{员}{猿}垣\cdots垣\frac{员}{灶}}$ ≤ $\sqrt[灶]{灶}$

又 $\lim\limits_{灶\to肄}\sqrt[灶]{灶}$ 越员，由夹逼定理，得

$$\lim\limits_{灶\to肄}\sqrt[灶]{员垣\frac{员}{圆}垣\frac{员}{猿}垣\cdots垣\frac{员}{灶}}\ 越员援$$

【例 员园】摇（员）当 曾≠ 园时，$\underset{灶\to肆}{遭皂}$ 糟燥泽$\frac{曾}{圆}$糟燥泽$\frac{曾}{源}$…糟燥泽$\frac{曾}{圆^灶}$；

（圆）$\underset{灶\to肆}{遭皂}$$\left(员原\frac{员}{圆^圆}\right)\left(员原\frac{员}{猿^圆}\right)\cdots\left(员原\frac{员}{灶^圆}\right)$援

【解】摇（员）原极限越$\underset{灶\to肆}{遭皂}\frac{圆^灶泽蚤灶\frac{曾}{圆^灶}糟燥泽\frac{曾}{圆}糟燥泽\frac{曾}{源}\cdots糟燥泽\frac{曾}{圆^灶}}{圆^灶泽蚤灶\frac{曾}{圆^灶}}$摇（利用 泽蚤灶曾越圆泽蚤灶$\frac{曾}{圆}$糟燥泽$\frac{曾}{圆}$）

越$\underset{灶\to肆}{遭皂}\frac{圆^{灶原员}糟燥泽\frac{曾}{圆}糟燥泽\frac{曾}{源}\cdots\left(圆糟燥泽\frac{曾}{圆^灶}\cdot泽蚤灶\frac{曾}{圆^灶}\right)}{圆^灶泽蚤灶\frac{曾}{圆^灶}}$

越$\underset{灶\to肆}{遭皂}\frac{圆^{灶原圆}糟燥泽\frac{曾}{圆}糟燥泽\frac{曾}{源}\cdot\left(圆糟燥泽\frac{曾}{圆^{灶原员}}\cdot泽蚤灶\frac{曾}{圆^{灶原员}}\right)}{圆^灶泽蚤灶\frac{曾}{圆^灶}}$

越…

越$\underset{灶\to肆}{遭皂}\frac{泽蚤灶曾}{圆^灶泽蚤灶\frac{曾}{圆^灶}}\xlongequal{泽蚤灶\frac{曾}{圆^灶}\sim\frac{曾}{圆^灶}}\underset{灶\to肆}{遭皂}\frac{泽蚤灶曾}{圆^灶\cdot\frac{曾}{圆^灶}}$越$\frac{泽蚤灶曾}{曾}$援

（圆）疫员原$\frac{员}{噪^圆}$越$\frac{(噪原员)(噪垣员)}{噪^圆}$越$\frac{噪原员}{噪}\cdot\frac{噪垣员}{噪}$，

亦摇$\underset{灶\to肆}{遭皂}\left(员原\frac{员}{圆^圆}\right)\left(员原\frac{员}{猿^圆}\right)\cdots\left(员原\frac{员}{灶^圆}\right)$

摇越$\underset{灶\to肆}{遭皂}\left(\frac{员}{圆}\cdot\frac{猿}{圆}\right)\left(\frac{圆}{猿}\cdot\frac{源}{猿}\right)\cdots\left(\frac{灶原员}{灶}\cdot\frac{灶垣员}{灶}\right)$

摇越$\underset{灶\to肆}{遭皂}\frac{员}{圆}\cdot\frac{灶垣员}{灶}$越$\frac{员}{圆}$援

现学现练：

摇缘援员圆摇（圆园园源数学四）摇设函数 枣（曾）越 葬^曾（葬 跃 园，葬≠ 员），则 $\underset{灶\to肆}{遭皂}\frac{员}{灶^圆}$造灶[枣（员）枣（圆）…枣（灶）] 越摇摇摇摇援

摇缘援员猿摇当 渣曾渣约员 时，求 $\underset{灶\to肆}{遭皂}$（员垣曾）（员垣曾^圆）（员垣曾^源）…（员垣曾$^{圆^灶}$）援

摇缘援员源摇求 $\underset{灶\to肆}{遭皂}\left(\frac{员}{\sqrt{灶^圆垣员}}垣\frac{员}{\sqrt{灶^圆垣圆}}垣\cdots垣\frac{员}{\sqrt{灶^圆垣灶}}\right)$援

题型 远 极限式中含有 葬垣$\sqrt{遭}$或 $\sqrt{葬}$垣$\sqrt{遭}$形式的极限

考试概况 数学三在 圆园园园 年考过 员 道填空题；数学四在 圆园园园 年和 圆园园猿 年共考过 圆 道填空题援

思路点拨 先利用共扼根式进行分子或分母的有理化，然后结合其他方法计算极限援

实例精讲：

【例 员远】摇 求 $\lim\limits_{曾\to园^{垣}}\dfrac{员原\sqrt{糟燥泽曾}}{曾(员原糟燥泽\sqrt{曾})}$援

【解】摇 原式 越 $\lim\limits_{曾\to园^{垣}}\dfrac{员原糟燥泽曾}{曾(员原糟燥泽\sqrt{曾})(员垣\sqrt{糟燥泽曾})}$

越 $\lim\limits_{曾\to园^{垣}}\dfrac{\dfrac{员}{圆}曾^{圆}}{曾\cdot\dfrac{员}{圆}曾(员垣\sqrt{糟燥泽曾})}$ 越 $\dfrac{员}{圆}$援摇 $\left(当 曾\to园^{垣}时,员原糟燥泽\sqrt{曾}\sim\dfrac{员}{圆}曾\ 员原糟燥泽曾\sim\dfrac{员}{圆}曾^{圆}\right)$

现学现练：

摇远援摇（圆园园源 数学三、四）摇 极限 $\lim\limits_{灶\to肄}(\sqrt{灶垣猿\sqrt{灶}}原\sqrt{灶原\sqrt{灶}})$ 越摇摇摇摇援

摇苑援摇（圆园园缘 数学四）摇 $\lim\limits_{灶\to肄}[\sqrt{员垣圆垣\cdots垣灶}原\sqrt{员垣圆垣\cdots垣(灶原员)}]$ 越摇摇摇摇援

题型 苑 求 园园 型极限

考试概况：数学三在 员怨怨远年、员怨怨源年和 圆园园圆年共考过 猿道计算题 数学四在 员怨怨苑年、员怨怨圆年、员怨怨源年和 圆园园圆年共考过 源道计算题援

思路点拨：一般先利用分子分母因式分解消去“园”因子或等价无穷小代换简化极限式,然后再用洛必达法则或抓大头法则等来求极限援对有的极限式来讲,作倒代换 曾越$\dfrac{员}{贼}$可将极限变得易于求解,注意洛必达法则的使用条件援另外,对等价无穷小代换来讲,只有乘积因子才可作代换,加减一般不作代换援

实例精讲：

【例 员苑】摇 求 $\lim\limits_{曾\to园}\dfrac{曾原葬则糟贼葬灶曾}{泽蚤灶^{猿}曾}$援

【解】摇 原式 越 $\lim\limits_{曾\to园}\dfrac{曾原葬则糟贼葬灶曾}{曾^{猿}}$摇（曾$\to$园时,泽蚤灶曾$\sim$曾）

越 $\lim\limits_{曾\to园}\dfrac{员原\dfrac{员}{\sqrt{员原曾^{圆}}}}{猿曾^{圆}}$摇（洛必达法则）

越 $\lim\limits_{曾\to园}\dfrac{\sqrt{员原曾^{圆}}原员}{猿曾^{圆}\sqrt{员原曾^{圆}}}$

越 $\lim\limits_{曾\to园}\dfrac{\sqrt{员原曾^{圆}}原员}{猿曾^{圆}}\cdot\dfrac{\sqrt{员原曾^{圆}}垣员}{\sqrt{员原曾^{圆}}垣员}$（分子有理化）

越 $\lim\limits_{曾\to园}\dfrac{原曾^{圆}}{猿曾^{圆}}\cdot\dfrac{员}{圆}$ 越原$\dfrac{员}{远}$援

【例 员愿】摇 求 $\lim\limits_{曾\to\frac{\pi}{圆}}\dfrac{糟燥泽曾原泽蚤灶曾垣员}{糟燥泽曾垣泽蚤灶曾原员}$援

【解】摇 由于 摇 糟燥泽曾原泽蚤灶曾垣员 越（员垣糟燥泽曾）原泽蚤灶曾