前　言

QIAN YAN

《高中总复习优化设计》系列丛书经过几年来的不断实践和持续打造，以其对教考信息迅捷而敏锐的吸纳，以其科学实用的复习备考模式，以其致力于继承与创新的精品意识，在全国教辅书中独树一帜，已经成为与广大读者建立了深厚心理默契和情感依恋的品牌图书。

2002—2003 学年《高中总复习优化设计》系列丛书在整体策划和编写过程中，既秉承已有的新颖、优化、科学、实用等基本特色和“宏观优化，微观设计”的指导理念，又力求发展与创新。在认真学习高考改革最新精神和深入研究 2003 年高考“3＋X”命题特点的基础上，立足高三备考复习的实际与需求，从素质备考的角度全程规划复习方案与内容，注重学生创新能力、实践能力、综合能力的全面培养与提升。

本书作为《高中总复习优化设计·数学》(下册)的教师用书，是为了帮助教师充分把握该书的设计思想和意图，促进该书的有效使用而专门编写的。根据第一阶段复习的情况以及学生的实际水平，选择了有针对性的专题和内容进行讲解，以专项练习、模拟练习为基本方式，以提升学生综合素质及应试能力为目的，充分体现高考第二、第三阶段复习的系统性、深刻性、启发性、层次性和科学性。

2002 年的高考数学科命题，在执行《考试说明》的各项规定中，创造性地贯彻了数学教育的新思想、新观念，围绕对数学知识、数学理性思维、数学应用与创新意识以及数学人文价值四个方面的考查来设计试卷和试题。鉴于此，本书在今年的编写过程中依据 2003 年《考试说明》的最新要求，既注重体现近几年高考命题的稳定性和规律性，又努力探索高考命题的新特点和新趋势。

本书在内容上，分“专题辅导与强化训练”和“考前指导与综合模拟”两部分；“专题辅导与强化训练”部分，每个专题设置了五个栏目，依次为：

【高考分析与趋势预测】分析本专题涉及的内容、思想方法在近两年高考中的特点，预测 2003 年高考命题的趋势。

【主干知识整合】梳理本课时涉及的基础要点，指明知识主干，总结出应注意的问题，分析主干要点在高考中的地位。

【典型例题透析】选题突出典型性、新颖性、全面性、应用性，并给出详尽的解题过程，以便训练学生的答题规范性。

【综合能力训练】主要以 2001 年以来全国、各省市高考模拟题及高考题为主，并增加了一些以能力立意为主，题型较新的题目。

【能力提升质量检测】以本专题涉及内容为主设置一套高考模拟题，以加强专题巩固，提升应试能力。除以上的栏目内容外，本书还特意为教师们设计了【备选例题】【教学建议】和【教学参考资料】等栏目，方便教师在指导教学中使用。

“考前指导与综合模拟”部分，包括对2002年高考试题的详尽解析，注重多角度、全方位、异途径，帮助考生在进一步熟悉高考题型的基础上，激活思维，挖掘潜能，并及时收录2003年北京春季高考试题；八套专题补差强化训练，帮助考生在高考前达到再强化、再巩固的目的；综合模拟题，是考前的一次练兵，帮助考生进一步提升考前应试能力。

同时本书对《高中总复习优化设计》的试题进行了详细解析及思路点拨，内容更加丰富全面，使教师的教学指导与备课更加得心应手。

本书编者身处中学数学教学第一线，希望能给广大高三师生后期复习提供有效、有益的参考。受编者水平和编写时间所限，书中难免存在疏忽与不妥之处，敬请广大读者批评赐教。

编　者

2003年1月

目录 MU LU

第一部分　专题辅导与强化训练

目录 MU LU

目录

LU MU

第一部分

专题辅导与强化训练

一、函数的性质及其应用

备课札记

高考分析与趋势预测

函数是一条纽带,它把中学教学各个分支紧紧地连在一起.一些常见的解题技巧和方法在这里都得到了比较充分的体现.函数是初等数学与高等数学的衔接部分,是承上启下的必备知识,自然就成为高考的热点.近几年高考试题中函数部分占有相当大的比重,所考查的内容主要有函数的定义域、值域、反函数、奇偶性、单调性、周期性、指数函数、对数函数以及函数图象的变化趋势、函数图象的某些对称性等.高考主要涉及:①具体的函数问题;②方程、不等式与函数的综合问题;③数列(作为特殊的函数)问题及数列与函数的综合题;④利用辅助函数解题.如:2002 年高考试题中的(9)、(10)小题就是具体的函数问题;2001 年高考试题中的(21)、(22)题及 2002 年高考试题中的(21)题就是与函数有关的综合问题.二轮复习要注意引导学生用函数的思想看待问题、处理问题,并揭示其内在联系.

函数这部分内容,涉及到数形结合、函数与方程、分类讨论和等价转化的思想.用到了配方法、待定系数法、数学归纳法、换元法、消元法、反证法、代入法等数学方法.因此学好中学数学,函数是基础,函数是重点.

纵观近几年来的高考试题,每年都有一些设问新颖的函数题目,"开放题""组合题""判断题"等将更多地出现,针对这些特点,函数的复习要解决好四个问题:准确深刻地理解函数的有关概念;揭示并认识函数与其他知识的内在联系;把握数形结合的方法;认识函数的实质,强化应用意识.

§1.1 函数的性质

主干知识整合

知识纲要是:函数的定义域、值域,函数的奇偶性、单调性与周期性,反函数.重点问题是:判断、论证、灵活运用函数的三大性质.研究抽象函数的性质,求函数的值域是本节的难点.

典型例题透析

[例1](2003 年上海春季高考题)已知函数 $f(x)=\sqrt{x}+1$,则 $f^{-1}(3)=$________.

解析:$f(x)=\sqrt{x}+1$,令 $f(x)=3$,得 $3=\sqrt{x}+1$,$x=4$

$\therefore f^{-1}(3)=4$.

答案:4

[例2](2003 年北京春季高考文史卷)函数 $f(x)=|x|$ 和 $g(x)=x(2-x)$ 的递增区间依次是……………………………………( )

A. $(-\infty,0]$,$(-\infty,1]$

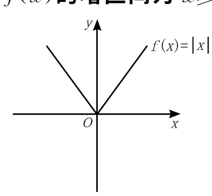
B. $(-\infty,0]$,$[1,+\infty)$

C. $[0,+\infty)$,$(-\infty,1]$

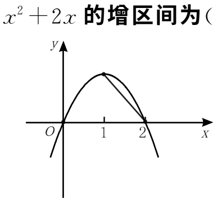
D. $[0,+\infty)$,$[1,+\infty)$

考查方向:考查函数的单调性.

试题分析:$f(x)$ 的增区间为 $x\geqslant 0$,



$g(x)=-x^2+2x$ 的增区间为 $(-\infty,1]$.



答案:C

[例3]已知 a、b 为常数且 $a\neq 0$,$f(x)=ax^2+bx$,且 $f(2)=0$ 并使方程 $f(x)=x$ 有等根.

(1)求 $f(x)$ 的解析式;

(2)是否存在实数 m、$n(m<n)$,使 $f(x)$ 的定义域和值域分别为 $[m,n]$ 和 $[2m,2n]$?

备课札记

解:(1)∵ $f(x)=ax^2+bx$ 且 $f(2)=0$,

∴$4a+2b=0$

又方程 $f(x)=x$ 即 $ax^2+(b-1)x=0$ 有等根

∴$(b-1)^2=0$,∴$b=1$,从而 $a=-\frac{1}{2}$

∴$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x$

(2)∵ $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}$

$\leqslant\frac{1}{2}$

则有 $2n\leqslant\frac{1}{2}$,$n\leqslant\frac{1}{4}$

∵$f(x)$的对称轴为直线 $x=1$

∴$f(x)$在$[m,n]$上是增函数

∴$\begin{cases} m<n\leqslant\frac{1}{4} \\ f(m)=2m \\ f(n)=2n \end{cases}$ 解得 $m=-2,n=0$

∴存在 $m=-2,n=0$ 使 $f(x)$在$[-2,0]$上值域是$[-4,0]$.

说明:本题解答中发现 $2n\leqslant\frac{1}{2}$ 很关键,否则按普通想法进行分类讨论就麻烦了.

[例4]已知函数 $f(x)$的定义域为 **R**,对任意的实数 x_1、x_2 都满足 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$,当 $x>0$ 时,$f(x)>0$,且 $f(2)=3$.

(1)试判断 $f(x)$的奇偶性和单调性;

(2)当 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$时,$f(\cos2\theta-3)+f(4m-2m\cos\theta)>0$ 对所有的 θ 均成立,求实数 m 的取值范围.

解:(1)令 $x_1=x_2=0$,则 $f(0)=0$

令 $x_1=x,x_2=-x$,则 $f(x)+f(-x)=f(0)$

∴$f(-x)=-f(x)$,∴$f(x)$是奇函数

设 $x_1<x_2$,则 $x_2-x_1>0$

∴$f(x_2)-f(x_1)=f(x_2)+f(-x_1)$

$=f(x_2-x_1)>0$,

∴$f(x_2)>f(x_1)$

∴函数 $f(x)$在 **R** 上是增函数.

(2)由 $f(\cos2\theta-3)+f(4m-2m\cos\theta)>0$ 对 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$均成立,

则 $f(\cos2\theta-3)>f(2m\cos\theta-4m)$对 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$均成立

∴$\cos2\theta-3>2m\cos\theta-4m$ 对 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$均成立.

∴$m>\frac{\cos2\theta-3}{2\cos\theta-4}$对 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$均成立.

又$\frac{\cos2\theta-3}{2\cos\theta-4}=\frac{2\cos^2\theta-4}{2\cos\theta-4}=\frac{\cos^2\theta-2}{\cos\theta-2}=\cos\theta-2$

$+\frac{2}{\cos\theta-2}+4\leqslant-2\sqrt{2}+4$,

∴$m>4-2\sqrt{2}$.

说明:对函数性质的考查,由考查具体的函数向抽象的函数转化.这类题一般给定抽象函数的某些信息,通过信息的迁移,从而判断函数的性质.本题(2)的解法是植根于对函数思想的深刻理解所产生出来的一种函数方法论,即 $x\in A$ 时,记 $f(x)$有最大值为 M,最小值为 m,则①$d\geqslant f(x)$在 $x\in A$ 中恒成立$\Leftrightarrow d\geqslant M$;②$d\leqslant f(x)$在 $x\in A$ 中恒成立$\Leftrightarrow d\leqslant m$.

[例5]试证 $x>0$ 时,$\frac{x^2(1-e^x)}{1+e^x}<\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$.

证明:构造函数 $f(x)=\frac{x^2(1-e^x)}{1+e^x}-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$

∵$f(-x)=\frac{x^2(1-e^{-x})}{1+e^{-x}}-\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

$=\frac{x^2(e^x-1)}{e^x+1}+\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)$

∴$f(x)$是 **R** 上的奇函数.

于是当 $x<0$ 时,$e^x<1$,

$\frac{1-e^x}{1+e^x}>0$,且 $\ln(\sqrt{x^2+1}+x)<0$,

∴$f(x)>0$,

当 $x>0$ 时,则$-x<0$,

∴$f(-x)>0$,但 $f(-x)=-f(x)$

∴$f(x)<0$,即$\frac{x^2(1-e^x)}{1+e^x}<\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$得证.

说明:通过对条件的转化或信息的迁移,把非函数问题化归为函数问题(即构造函数模型)而予以处理,是中等数学与高等数学的交汇点,是创新思维的体现,因此应引起足够的重视.构造函数解答是难点.

备选例题

[例题]已知幂函数 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}p^2+p+\frac{3}{2}}$($p\in$ **Z**)在$[0,+\infty)$上是增函数,且在其定义域上是偶函数.

(1)求 p 的值,并写出相应的函数 $f(x)$的解析式;

(2)对于(1)中求得的函数 $f(x)$,设函数 $g(x)=-qf[f(x)]+(2q-1)f(x)+1$,问是否存在实数 $q(q<0)$,使得 $g(x)$在区间$(-\infty,-4]$上是减函数,且在区间$(-4,0)$上是增函数.若存在,请求出来;若不存在,请说明理由.

解:(1)若 $y=x^\alpha$ 在 $x\in[0,+\infty)$上是递增函数,则有 $\alpha>0$.

∵$f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数,

∴$-\frac{1}{2}p^2+p+\frac{3}{2}>0$

解得$-1<p<3$,而 $p\in$ **Z**

∴$p=0,1,2$

当 $p=0$ 或 2 时,有 $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ 不是偶函数,

故 $p=1$，此时，$f(x)=x^2$.

(2)利用函数单调性的定义进行探索求解.

$\because f(x)=x^2$

$\therefore g(x)=-qx^4+(2q-1)x^2+1$

假设存在实数 $q(q<0)$，使得 $g(x)$ 满足题设条件，设 $x_1<x_2$，则

$g(x_1)-g(x_2)$

$=-qx_1^4+(2q-1)x_1^2+qx_2^4-(2q-1)x_2^2$

$=(x_1+x_2)(x_2-x_1)[q(x_1^2+x_2^2)-(2q-1)]$

若 $x_1,x_2\in(-\infty,-4]$，易知 $x_1+x_2<0$，$x_2-x_1>0$

要使 $g(x)$ 在 $(-\infty,-4]$ 上是递减函数，则应有 $q(x_1^2+x_2^2)-(2q-1)<0$ 恒成立

$\because x_1<-4,x_2\leqslant-4$

$\therefore x_1^2+x_2^2>32$，而 $q<0$

$\therefore q(x_1^2+x_2^2)<32q$

从而使 $q(x_1^2+x_2^2)<2q-1$ 恒成立，则必有

$2q-1\geqslant 32q$ 即 $q\leqslant-\frac{1}{30}$

若 $x_1,x_2\in(-4,0]$，易知 $(x_1+x_2)(x_2-x_1)<0$，要使 $g(x)$ 在 $(-4,0)$ 上是增函数，则应有

$q(x_1^2+x_2^2)-(2q-1)>0$ 恒成立

$\because -4<x_1<0,-4<x_2<0$

$\therefore x_1^2+x_2^2<32$，而 $q<0$

$\therefore q(x_1^2+x_2^2)>32q$

要使 $q(x_1^2+x_2^2)>2q-1$ 恒成立，则必有

$2q-1\leqslant 32q$，即 $q\geqslant-\frac{1}{30}$

综合以上两方面，得 $q=-\frac{1}{30}$

故存在实数 $q=-\frac{1}{30}$，使得 $g(x)$ 在 $(-\infty,-4]$ 上是减函数，且在 $(-4,0)$ 上是增函数.

说明：本例是一道综合性较强的题目. 对于第(2)小题，还可以从复合函数性质方面来考虑，就有如下解法：

设 $t=x^2$，由 $g(x)$ 在 $(-\infty,-4]$ 上是减函数，在 $(-4,0)$ 上是增函数，而 $t=x^2$ 在 $[16,+\infty)$ 和 $(0,16)$ 上都是增函数，得

$h(t)=-qt^2+(2q-1)t+1$ 在 $(0,16)$ 上是增函数，在 $[16,+\infty)$ 上是减函数，从而可得

$\frac{2q-1}{2q}=16$，$\therefore q=-\frac{1}{30}$

综合能力训练

一、选择题

▶1. 二次函数 $f(x)$ 满足 $f(2+x)=f(2-x)$，又 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上是增函数，且 $f(a)\geqslant f(0)$，那么实数 a 的取值范围是 ……………（　　）

A. $a\geqslant 0$　　B. $a\leqslant 0$

C. $0\leqslant a\leqslant 4$　　D. $a\leqslant 0$ 或 $a\geqslant 4$

解析：条件 $f(2+x)=f(2-x)$ 告诉我们二次函数的图象的对称轴方程为 $x=2$，又 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增，因此 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上的图象已经可以想象出来了.

$\therefore f(a)\geqslant f(0)$，$\therefore 0\leqslant a\leqslant 4$.

答案：C

说明：直观的图形让我们找到了快速解答的捷径.

▶2. 函数 $y=a^x$ 在 $[0,1]$ 上的最大值与最小值的和为 3，则 a 等于 ……………………（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2　　C. 4　　D. $\frac{1}{4}$

答案：B

▶3. 已知 $0<x<y<a<1$，则有 …………（　　）

A. $\log_a(xy)<0$　　B. $0<\log_a(xy)<1$

C. $1<\log_a(xy)<2$　　D. $\log_a(xy)>2$

答案：D

▶4. 设集合 A 和 B 都是自然数集合 **N**，映射 f：$A\to B$ 把集合 A 中的元素 x 映射到集合 B 中的元素 2^x+x，则在映射 f 下，象 20 的原象是 ……………………………………（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

解析：设原象是 x，则在 f 的作用下得象为 2^x+x，即 $2^x+x=20$，

$\therefore x=4$.

答案：C

▶5. 函数 $f(x)=ax^3+(a-1)x^2+48(a-2)x+b$ 的图象关于原点成中心对称，则 $f(x)$ 在 $[-4,4]$ 上的单调性是 ………………（　　）

A. 增函数

B. 减函数

C. $[-4,0]$ 上是增函数，$[0,4]$ 上是减函数

D. $[-4,0]$ 上是减函数，$[0,4]$ 上是增函数

解析：$f(x)$ 的图象关于原点对称，$f(x)$ 为奇函数，则 $a=1,b=0$，故 $f(x)=x^3-48x$. 排除 C、D，于是只须考虑 $[0,4]$ 上的单调性. 任取 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 4$，

$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2-48)>0$，

因此 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上单调递减.

答案：B

说明：确定了 a、b 的值后，由奇函数的性质，取特殊值排除法当然更快捷了.

二、填空题

▶6. $y=a^{2x}+2a^x-1(a>0,a\neq1)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值为 14，则 $a=$________.

答案：3 或 $\frac{1}{3}$

▶7. 函数 $y=\frac{2x}{1+x}(x\in(-1,+\infty))$ 图象与其反函数图象的交点坐标为________.

解析：解方程 $x=\frac{2x}{1+x}$ 得 $x=0,x=1$. $x=0$

备课札记

备课札记

时，$y=0$；$x=1$ 时，$y=1$.

答案：$(0,0)$，$(1,1)$

三、解答题

▶8. 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的单调奇函数，且有 $f(1)=-2$，若 $f(k\cdot\log_2 t)+f(\log_2^2 t-\log_2^2 t-2)>0$，求实数 t 的取值范围.

解：∵ $f(x)$ 为奇函数，又定义在 $\mathbf{R}$ 上，

∴ $f(0)=0$，又 $f(1)=-2$，且 $f(x)$ 为单调函数，则可知单调递减.

由 $f(k\cdot\log_2 t)>-f(-\log_2^2 t+\log_2 t-2)$ 知

$f(k\cdot\log_2 t)>f(\log_2^2 t-\log_2 t+2)$

$k\cdot\log_2 t<\log_2^2 t-\log_2 t+2$，

即 $\log_2^2 t-(k+1)\log_2 t+2>0$

$\Delta=(k+1)^2-8<0$. ∴当 $-1-2\sqrt{2}<k<-1+2\sqrt{2}$ 时，$\log_2 t\in\mathbf{R}$，∴ $t>0$

当 $k=-1-2\sqrt{2}$ 时，$\log_2 t\in\mathbf{R}$ 且 $\log_2 t\neq-\sqrt{2}$

∴ $t>0$ 且 $t\neq 2^{-\sqrt{2}}$

当 $k=-1+2\sqrt{2}$ 时，$\log_2 t\in\mathbf{R}$ 且 $\log_2 t\neq\sqrt{2}$

∴ $t>0$ 且 $t\neq 2^{\sqrt{2}}$

当 $k>-1+2\sqrt{2}$ 或 $k<-1-2\sqrt{2}$ 时，

$\log_2 t>\dfrac{k+1+\sqrt{k^2+2k-7}}{2}$ 或

$\log_2 t<\dfrac{k+1-\sqrt{k^2+2k-7}}{2}$，

∴ $t>2^{\frac{k+1+\sqrt{k^2+2k-7}}{2}}$ 或 $t<2^{\frac{k+1-\sqrt{k^2+2k-7}}{2}}$

综上，

当 $-1-2\sqrt{2}<k<-1+2\sqrt{2}$ 时，$t>0$

当 $k=-1-2\sqrt{2}$ 时，$t>0$ 且 $t\neq 2^{-\sqrt{2}}$

当 $k=-1+2\sqrt{2}$ 时，$t>0$ 且 $t\neq 2^{\sqrt{2}}$

当 $k>-1+2\sqrt{2}$ 或 $k<-1-2\sqrt{2}$ 时，

$t>2^{\frac{k+1+\sqrt{k^2+2k-7}}{2}}$ 或 $t<2^{\frac{k+1-\sqrt{k^2+2k-7}}{2}}$

▶9. 已知函数 $f(x)=\lg(ax^2+2x+1)$.

(1)若 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围及 $f(x)$ 的值域；

(2)若 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围及 $f(x)$ 的定义域.

解：(1)∵ $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

∴ $ax^2+2x+1>0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 成立，

由此得 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=4-4a<0,\end{cases}$ 解得 $a>1$.

又∵ $ax^2+2x+1=a(x+\frac{1}{a})^2+1-\frac{1}{a}\geqslant 1-\frac{1}{a}$，

∴ $f(x)=\lg(ax^2+2x+1)\geqslant\lg(1-\frac{1}{a})$，故得

$a\in(1,+\infty)$，$f(x)\in[\lg(1-\frac{1}{a}),+\infty)$；

(2)∵ $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，∴ ax^2+2x+1 的值域 $\supseteq(0,+\infty)$，显然 $a<0$ 不合要求；

当 $a=0$ 时，有 $x\in(-\frac{1}{2},+\infty)$；

当 $a>0$ 时，$a(x+\frac{1}{a})^2+1-\frac{1}{a}\geqslant 1-\frac{1}{a}$，

由题意得 $1-\frac{1}{a}\leqslant 0$，即 $0<a\leqslant 1$.

这时由 $ax^2+2x+1>0$ 解得

$x\in(-\infty,-\frac{1+\sqrt{1-a}}{a})\cup(-\frac{1-\sqrt{1-a}}{a},+\infty)$.

综上讨论，当 $a=0$ 时，$x\in(-\frac{1}{2},+\infty)$；

当 $0<a\leqslant 1$ 时，$x\in(-\infty,-\frac{1+\sqrt{1-a}}{a})\cup(-\frac{1-\sqrt{1-a}}{a},+\infty)$.

说明：本题函数中含有字母参数，在第(2)小题已知值域确定字母 a 的范围时，要注意对字母 a 的讨论.

▶10. 已知函数 $f(x)$ 的反函数是 $f^{-1}(x)=\log_2\dfrac{1+x}{1-x}$，

(1)求 $f(x)$ 的解析式；

(2)解不等式 $1-f(x)>\dfrac{1}{4^x-1}$；

(3)试猜想 $f(n)$ 与 $g(n)=\dfrac{n}{n+1}$ ($n\in\mathbf{N}$，且 $n\geqslant 2$)的大小.

解：(1)由 $f^{-1}(x)=\log_2\dfrac{1+x}{1-x}$ 得

$f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$

(2) $1-f(x)>\dfrac{1}{4^x-1}$ 得 $\dfrac{2}{2^x+1}>\dfrac{1}{4^x-1}$

得 $2>\dfrac{1}{2^x-1}$

若 $x>0$，$2^x-1>0$ 得 $2^x-1>\dfrac{1}{2}$

∴ $x>\log_2\dfrac{3}{2}>0$ 符合题意

若 $x<0$，$2^x-1<0$ 得 $2^x-1<\dfrac{1}{2}$

∴ $x<\log_2\dfrac{3}{2}$ 综合得 $x<0$

若 $x=0$ 无解

则解集为 $(-\infty,0)\cup(\log_2\dfrac{3}{2},+\infty)$

(3)当 $n=2$ 时，$f(2)=\dfrac{3}{5}=\dfrac{9}{15}$，$g(2)=\dfrac{2}{3}=\dfrac{10}{15}$

∴ $f(2)<g(2)$

当 $n=3$ 时，$f(3)=\dfrac{7}{9}=\dfrac{28}{36}$，$g(3)=\dfrac{3}{4}=\dfrac{27}{36}$

∴ $f(3)>g(3)$

当 $n=4$ 时，$f(4)=\dfrac{15}{17}=\dfrac{75}{85}$，$g(4)=\dfrac{4}{5}=\dfrac{68}{85}$

∴ $f(4)>g(4)$

猜想 $n\geqslant 3$，$n\in\mathbf{N}$ 时有 $f(n)>g(n)$

§1.2 函数的图象

主干知识整合

函数的图象中常见的问题是：函数的图象的作法，函数的图象的变换.平移变换、对称变换，利用函数的图象比较式的大小、判断根的个数、求单调区间等是近几年高考的热点.作函数的图象、函数的图象的应用是本节难点.

典型例题透析

[例1]作函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的图象.

解：函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

$\because f(-x)=-f(x)$，

$\therefore y=x+\frac{1}{x}$ 是奇函数.

又 $|y|=|x+\frac{1}{x}|\geqslant 2$，

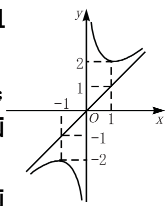
$\therefore y\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ 且

当 $x>0$ 时，y 的最小值是 2；

当 $x<0$ 时，y 的最大值是 -2；

当 $x\in(0,1)$ 时，函数为减函数，且急剧递减；

$x\in[1,+\infty)$ 时，函数为增函数，且缓慢递增；



又 $x\neq 0$，$y\neq 0$，故图象与坐标轴无交点，且 y 轴及 $y=x$ 是渐近线.如上图.

说明：作函数的图象时，一般要考虑函数的性质：①定义域、值域(图象的范围)；②单调性(图象的发展趋势)；③奇偶性(对称性)；④周期性(简化作图象)；⑤特殊点或特殊线(极值点，与坐标轴的交点；渐近线).

注：利用导数也可以作该函数的图象.

[例2]若函数 $y=f(x)$ 恒满足 $f(2k-x)=f(x)$(k 为常数)，证明 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=k$ 对称.

分析：根据轴对称的定义，在 $y=f(x)$ 的图象上任取一点 P，只要证明它关于直线 $x=k$ 的对称点仍在 $y=f(x)$ 的图象上，就说明 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=k$ 对称.

证明：设 $P(x_0,y_0)$ 是函数 $y=f(x)$ 图象上任一点，$y_0=f(x_0)$.点 P 关于直线 $x=k$ 的对称点 P' 的坐标为 $P'(2k-x_0,y_0)$，由于 $f(2k-x_0)=f(x_0)=y_0$，所以 $P'(2k-x_0,y_0)$ 也在函数 $y=f(x)$ 的图象上.由点 P 的任意性，$y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=k$ 对称.

说明：$f(2k-x)=f(x)\Leftrightarrow f(-x+k)=f(x+k)\Leftrightarrow y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=k$ 对称；$f(-x+a)=f(x+b)\Leftrightarrow y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称.

[例3](2003年上海春季高考题)若函数 $y=x^2+(a+2)x+3$，$x\in[a,b]$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，则 $b=$________.

解析：由题意 $x^2+(a+2)x+3=(2-x)^2+(a+2)(2-x)+3$

整理得 $(a+2)x=-2x+a+4$

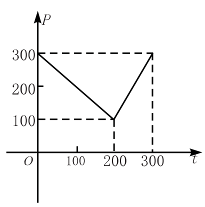
比较系数 $\begin{cases}a+2=-2\\a+4=0\end{cases}\Rightarrow a=-4$

$y=x^2-2x+3\quad(-4\leqslant x\leqslant b)$

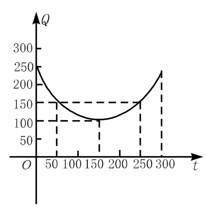
$\therefore b=6$

答案：6

[例4]某蔬菜基地种植西红柿，由历年行情得知，从2月1日起的300天内，西红柿市场售价与上市时间的关系用图(1)的一条折线表示；西红柿的种植成本与上市时间的关系用图(2)的抛物线表示.



图(1)



图(2)

(1)写出图(1)表示的市场售价与时间的函数关系式 $p=f(t)$；写出图(2)表示的种植成本与时间的函数关系式 $Q=g(t)$；

(2)认定市场售价减去种植成本为纯收益，问何时上市的西红柿纯收益最大？

(注：市场售价和种植成本的单位：元/10^2kg，时间单位：天)

解：(1)由图(1)可得市场售价与时间的函数关系为 $f(t)=\begin{cases}300-t,(0\leqslant t\leqslant 200)\\2t-300,(200<t\leqslant 300)\end{cases}$

由图(2)可得种植成本与时间的函数关系为

$g(t)=\frac{1}{200}(t-150)^2+100,(0\leqslant t\leqslant 300)$

(2)设 t 时刻的纯收益为 $h(t)$，则由题意得

$h(t)=f(t)-g(t)$

即 $h(t)=$

$$\begin{cases}-\frac{1}{200}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{175}{2},(0\leqslant t\leqslant 200)\\-\frac{1}{200}t^2+\frac{7}{2}t-\frac{1025}{2},(200<t\leqslant 300)\end{cases}$$

当 $0\leqslant t\leqslant 200$ 时，配方整理得

$h(t)=-\frac{1}{200}(t-50)^2+100$

备课札记

备课札记

$\therefore$ 当 $t=50$ 时，$h(t)$ 取得区间 $[0,200]$ 上的最大值 100；

当 $200<t\leqslant 300$ 时，配方整理得

$h(t)=-\frac{1}{200}(t-350)^2+100$

$\therefore$ 当 $t=300$ 时，$h(t)$ 取得区间 $[200,300]$ 上的最大值 87.5.

综上，由 $100>87.5$ 可知，$h(t)$ 在区间 $[0,300]$ 上可以取得最大值 100，此时 $t=50$，即从 2 月 1 日开始的第 50 天时，上市的西红柿纯收益最大.

说明：本题是一道由函数图象建立函数关系式和求函数最大值问题，既考查了函数的图象和性质，又考查了应用函数知识解决实际问题的能力.

备选例题

[例题]如果函数 $y=x^3+x^{\frac{1}{3}}$ 的图象沿 x 轴向右平移 a 个单位，得曲线 C，设曲线 C 的方程 $y=f(x)$ 对任意 $t\in\mathbf{R}$ 都有 $f(1+t)=-f(1-t)$，试求 $f(1)+f(-1)$ 的值.

解法一：由题意得 $f(x)=(x-a)^3+(x-a)^{\frac{1}{3}}$.

$\because f(1+t)=-f(1-t)$，$\therefore (1+t-a)^3+(1+t-a)^{\frac{1}{3}}=-(1-t-a)^3-(1-t-a)^{\frac{1}{3}}$.

由于对任意 $t\in\mathbf{R}$ 均成立，特别地，对 $t=0$ 代入也应成立，从而 $(1-a)^3+(1-a)^{\frac{1}{3}}=-(1-a)^3-(1-a)^{\frac{1}{3}}$，即 $2(1-a)^3+2(1-a)^{\frac{1}{3}}=0$，

$\therefore (1-a)^3=-(1-a)^{\frac{1}{3}}$.

乘方得 $(1-a)^9=-(1-a)$，

$\therefore (1-a)\cdot[(1-a)^8+1]=0$，

$\therefore 1-a=0$，$\therefore a=1$.

当 $a=1$ 时，$f(x)=(x-1)^3+(x-1)^{\frac{1}{3}}$. 此时 $f(1+t)=[(1+t)-1]^3+[(1+t)-1]^{\frac{1}{3}}=t^3+t^{\frac{1}{3}}$，$f(1-t)=[(1-t)-1]^3+[(1-t)-1]^{\frac{1}{3}}=-t^3-t^{\frac{1}{3}}$，满足 $f(1+t)=-f(1-t)$，

从而函数 $f(x)=(x-1)^3+(x-1)^{\frac{1}{3}}$，

故 $f(1)+f(-1)=(-2)^3+(-2)^{\frac{1}{3}}=-8-\sqrt[3]{2}$.

解法二：由题意得 $f(x)=(x-a)^3+(x-a)^{\frac{1}{3}}$. $\because f(1+t)=-f(1-t)$，$\therefore$ 点 $P(1+t,y)$ 与点 $Q(1-t,-y)$ 同在曲线 C 上，

对于任意 $t\in\mathbf{R}$，线段 PQ 中点 $M(1,0)$ 为定点，即曲线 C 上任意一点 P 关于点 M 的对称点 Q 都在曲线 C 上，故曲线 C 关于点 $M(1,0)$ 对称.

又因为 $y=(x-a)^3+(x-a)^{\frac{1}{3}}$ 的图象关于点 $(a,0)$ 对称，且仅有一个对称中心，

所以 $a=1$，即 $f(x)=(x-1)^3+(x-1)^{\frac{1}{3}}$，

故 $f(1)+f(-1)=(1-1)^3+(1-1)^{\frac{1}{3}}+(-1-1)^3+(-1-1)^{\frac{1}{3}}=-8-\sqrt[3]{2}$.

说明：本题是涉及函数性质的一道综合题，其难点是如何根据条件 $f(1+t)=-f(1-t)$ 确定常数 a，从而得出函数表达式 $f(x)$ 以求值. 本题采用两条途径，解法一是由特殊到一般，求出 a 的可能值，故需验证；解法二根据函数性质，引申到图象特征而确定 a 值，对学生要求更高.

综合能力训练

一、选择题

1. 已知函数 $f(x)=(\frac{1}{2})^x$，且函数 $g(x)$ 的图象与 $f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，则 $g(x^2)$ 是……………………………………（　）

A. 奇函数，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减

B. 偶函数，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

C. 奇函数，在 $(-\infty,0)$ 上单调递减

D. 偶函数，在 $(-\infty,0)$ 上单调递增

答案：D

2. 当函数 $f(x)=2^{x+1}+m$ 的图象不过第二象限时，m 的取值范围是………………（　）

A. $m\geqslant 2$　B. $m\leqslant -2$　C. $m>2$　D. $m<-2$

答案：B

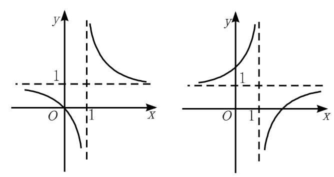
3. 如果函数 $y=ax^2+2ax-1$，对于 $x\in[1,3]$ 上的图象都在 x 轴下方，则 a 的取值范围是……………………………………（　）

A. $(0,\frac{1}{15})$　　B. $(-\infty,0)$

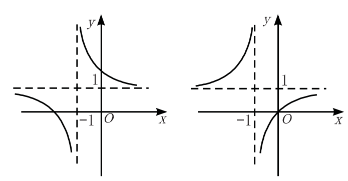
C. $(-\infty,0)\cup(0,\frac{1}{15})$　D. $(-\infty,\frac{1}{15})$

答案：D

4. 函数 $y=1-\frac{1}{x-1}$ 的图象是…………（　）



A　　B



C　　D

解析：$y=1-\frac{1}{x-1}\Leftrightarrow y-1=-\frac{1}{x-1}$.

答案：B

5. 设二次函数 $f(x)=x^2+x+a(a>0)$，若 $f(m)<0$，则 $f(m+1)$ 的值是………（　）

A. 正数　　B. 负数

C. 非负数　　　　D. 非上述结果

解析：$f(x)$的图象的对称轴方程是 $x=-\frac{1}{2}$

$\because f(0)=a>0$，又 $f(m)<0$，

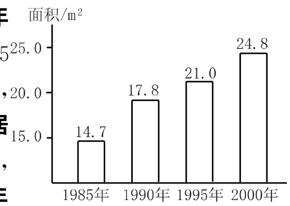
$\therefore -1<m<0, 0<m+1<1$

$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，故 $f(m+1)>0$.

答案：A

△二、填空题

▶6. 据新华社 2002 年 3 月 12 日电，1985 年到 2000 年间，我国农村人均居住面积如图所示，其中，从______年到______年的五年间增长最快.



答案：1995　2000

▶7. 将函数 $y=\frac{3}{x+a}$的图象向左平移一个单位后得到 $y=f(x)$的图象，再将 $y=f(x)$的图象绕原点旋转 180°后仍与 $y=f(x)$的图象本身重合，则 a 的值为________.

答案：-1

△三、解答题

▶8. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+1(a、b\in\mathbf{R}, a>0)$，设方程 $f(x)=x$ 的两个实根为 x_1 和 x_2.

(1)如果 $x_1<2<x_2<4$，设函数 $f(x)$的对称轴为 $x=x_0$. 求证：$x_0>-1$；

(2)如果$|x_1|<2$，$|x_2-x_1|=2$，求 b 的取值范围.

(1)证明：设 $g(x)=f(x)-x=ax^2+(b-1)x+1$ 且 $a>0$；由条件 $x_1<2<x_2<4$，得 $g(2)<0$，$g(4)>0$，即 $\begin{cases}4a+2b-1<0 & ①\\ 16a+4b-3>0 & ②\end{cases}$

解得 $\frac{3}{4}-4a<b<\frac{1}{2}-2a$　③

显然也有 $\frac{3}{4}-4a<\frac{1}{2}-2a$；得 $a>\frac{1}{8}$　④

$\therefore 2-\frac{3}{8a}>-\frac{b}{2a}>1-\frac{1}{4a}$

故 $x_0=-\frac{b}{2a}>1-\frac{1}{4\times\frac{1}{8}}=-1$.

(2)解：由 $g(x)=ax^2+(b-1)x+1=0$ 可知 $x_1x_2=\frac{1}{a}>0$，$\therefore x_1、x_2$ 同号.

(i)若 $0<x_1<2$，则 $x_2-x_1=2$

$\therefore x_2=x_1+2>0$，

$\therefore g(2)<0$，即 $4a+2b-1<0$　⑤

由$(x_2-x_1)^2=\frac{(b-1)^2}{a^2}-\frac{4}{a}=4$，

$\therefore 2a+1=\sqrt{(b-1)^2+1}$，

代入⑤得 $2\sqrt{(b-1)^2+1}<3-2b$　⑥

$\therefore 3-2b<0$ 无解，$\therefore 3-2b>0$，$\therefore b<\frac{3}{2}$.

⑥平方化简得 $4b<1$，$\therefore b<\frac{1}{4}$；故 $b<\frac{1}{4}$.

(ii)若 $-2<x_1<0$，则 $x_2=-2+x_1<-2$，

$\therefore g(-2)<0$

即 $4a-2b+3<0$　⑦

又 $2a+1=\sqrt{(b-1)^2+1}$代入⑦得

$2\sqrt{(b-1)^2+1}<2b-1$　⑧

$\because 2b-1<0$ 无解，$\therefore 2b-1>0$

得 $b>\frac{1}{2}$，⑧平方化简得 $b>\frac{7}{4}$.

故 $b>\frac{7}{4}$.

综上得，当 $0<x_1<2$ 时，$b<\frac{1}{4}$；

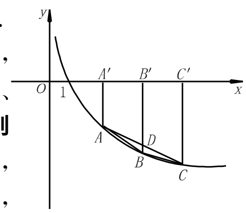
当 $-2<x_1<0$ 时，$b>\frac{7}{4}$.

▶9. 在函数 $y=\log_a x\,(0<a<1, x\geqslant 1)$的图象上有 $A、B、C$ 三点，它们的横坐标分别为 $t, t+2, t+4$，设$\triangle ABC$ 的面积为 S.

(1)求 S 关于 t 的函数表达式；

(2)判断 $S(t)$的单调性；

(3)求函数 $S(t)$的值域.



解：(1)如右图所示，设 $A'、B'、C'$是 $A、B、C$ 在 x 上的射影，则 $A(t, \log_a t)$，$B(t+2, \log_a(t+2))$，$C(t+4, \log_a(t+4))$；设 BB'与 AC 相交于 D，则可得 $D(t+2, \frac{\log_a t+\log_a(t+4)}{2})$.

于是 $S(t)=\frac{1}{2}|A'C'|\cdot|BD|$

$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot[\frac{\log_a t+\log_a(t+4)}{2}-\log_a(t+2)]$

$=2\log_a\frac{\sqrt{t(t+4)}}{t+2}$

$=\log_a\frac{t^2+4t}{(t+2)^2}(0<a<1, t\geqslant 1)$；

(2)由 $S(t)=\log_a[1-\frac{4}{(t+2)^2}](0<a<1)$知 $S(t)$是$[1,+\infty)$上的减函数(证明略)；

(3)当 $t=1$ 时，$S(t)$取最大值为 $\log_a\frac{5}{9}$；

又当 $t\to+\infty$时，$S(t)\to 0$，

$\therefore S(t)$的值域为$(0, \log_a\frac{5}{9}]$.

▶10. 设 $f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的以 2 为周期的周期函数，且 $f(x)$为偶函数，在区间$[2,3]$上 $f(x)=-2(x-3)^2+4$.

(1)求 $x\in[1,2]$时 $f(x)$的解析式；

(2)若矩形 $ABCD$ 的两个顶点 $A、B$ 在 x 轴上，$C、D$ 在 $y=f(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$的图象上，求这个矩形面积的最大值.

备课札记

备课札记

解:(1)设 $1\leqslant x\leqslant 2$,则 $-2\leqslant -x\leqslant -1$

$\therefore 2\leqslant -x+4\leqslant 3$.

$\therefore f(-x+4)=-2[(-x+4)-3]^2+4$

$=-2(x-1)^2+4$

$\because f(x)$是以 2 为周期的偶函数

$\therefore f(x)=f(-x)=f(-x+4)$

即 $f(x)=-2(x-1)^2+4\ (1\leqslant x\leqslant 2)$

(2)当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$2\leqslant x+2\leqslant 3$

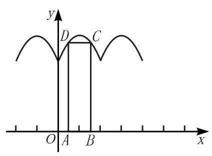
$f(x)=f(x+2)=-2[(x+2)-3]^2+4$

$\quad=-2(x-1)^2+4$

$\therefore$当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时,$f(x)=-2(x-1)^2+4$

图象是抛物线的一部分,顶点(1,4)

对称轴 $x=1$ 如下图所示



设矩形顶点 $D(x,y)$,$0<x<1$,矩形面积为 S

$\therefore S=2(1-x)\cdot y=2(1-x)[-2(x-1)^2+4]$

$=4(1-x)[2-(1-x)^2](0<1-x<1)$

$\because 2(1-x)^2[2-(1-x)^2]^2$

$\leqslant(\frac{2(1-x)^2+[2-(1-x)^2]+[2-(1-x)^2]}{3})^3$

$=(\frac{4}{3})^3$

$\therefore(1-x)[2-(1-x)^2]\leqslant\sqrt{\frac{32}{27}}$

$\therefore S\leqslant\frac{16}{9}\sqrt{6}$

当且仅当 $2(1-x)^2=2-(1-x)^2$ 时,等号成立,此时 $x=1-\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore$当 A 为$(1-\frac{\sqrt{6}}{3},0)$时,矩形 $ABCD$ 面积最大值为$\frac{16\sqrt{6}}{9}$.

说明:周期函数的解析式可用分段函数的形式表示,在求函数极值时,$S=f(1-x)$是关于$(1-x)$的三次式,因而不可能用配方法.应考虑平方后用均值定理.

§1.3 函数的综合问题及应用

主干知识整合

函数,几乎渗透到中学数学的各个角落,它与其他知识互相渗透,相互融和.函数这一章应用的广泛性、解法的多样性和思维的创造性构成了本课时的重点,特别是函数与不等式、函数与数列的综合问题是近几年高考的热点,多半也是高考压轴题.运用函数思想解实际应用问题是函数中的难点.

典型例题透析

[例1]已知函数 $f(x)$是函数 $y=\frac{2}{10^x+1}-1(x\in\mathbf{R})$的反函数,函数 $g(x)$的图象与函数 $y=\frac{4-3x}{x-1}$的图象关于直线 $y=x-1$ 成轴对称图形,记作 $F(x)=f(x)+g(x)$.

(1)求函数 $F(x)$的解析式及定义域;

(2)试问在函数 $F(x)$的图象上是否存在两个不同的点 A、B,使直线 AB 恰好与 y 轴垂直,若存在,求出 A、B 两点的坐标;若不存在,说明理由.

解:(1)由 $y=\frac{2}{10^x+1}-1(x\in\mathbf{R})$得其反函数为 $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}(-1<x<1)$,设点 $P(x,y)$是函数 $g(x)$图象上任意一点,点 P 关于直线 $y=x-1$的对称点是 $Q(a,b)$,则

$\begin{cases}\frac{y-b}{x-a}=-1\\ \frac{y+b}{2}=\frac{x+a}{2}-1\end{cases}$,解得$\begin{cases}a=y+1\\ b=x-1\end{cases}$,

$\because Q$ 在函数 $y=\frac{4-3x}{x-1}$的图象上,

$\therefore x-1=\frac{4-3(y+1)}{(y+1)-1}$,

即 $g(x)=\frac{1}{x+2}(x\neq -2)$,

$\therefore F(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}+\frac{1}{x+2}$,其定义域为$(-1,1)$

(2)假设函数 $F(x)$的图象上存在两个不同的点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,使 AB 与 y 轴垂直,其中 x_1、$x_2\in(-1,1)$,即当 $x_1\neq x_2$ 时,有 $y_1=y_2$,不妨设 $x_1<x_2$.

$y_2-y_1=F(x_2)-F(x_1)$

$=\lg\frac{(1-x_2)(1+x_1)}{(1+x_2)(1-x_1)}+\frac{x_1-x_2}{(x_2+2)(x_1+2)}$

$\because -1<x_1<x_2<1$,

$\therefore 0<\frac{(1+x_1)(1-x_2)}{(1-x_1)(1+x_2)}<1$,

$\lg\frac{(1+x_1)(1-x_2)}{(1-x_1)(1+x_2)}<0$

同理,$\frac{x_1-x_2}{(x_2+2)(x_1+2)}<0$,

$\therefore y_2-y_1<0$,这与 $y_1=y_2$ 矛盾.

故函数 $F(x)$的图象上不存在两个不同的点 A、B,使直线 AB 与 y 轴垂直.

[例2]已知 $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N})$,设 $f(n)=S_{2n+1}-S_{n+1}$,试确定实数 m 的取值范围,

使得对于一切大于 1 的自然数 n，不等式 $f(n)>[\log_m(m-1)]^2-\frac{11}{20}[\log_{(m-1)}m]^2$ 恒成立.

分析：由题意知 $f(n)=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}$，但由于无法求和，故对给出的不等式难以处理. 解决本题的关键在于把 $f(n)(n\in\mathbf{N})$ 看作 n 的函数，此时已知不等式恒成立就等价转化为函数 $f(n)(n\in\mathbf{N},n\geqslant 2)$ 的最小值大于 $[\log_m(m-1)]^2-\frac{11}{20}[\log_{(m-1)}m]^2$，而求最小值又应从研究 $f(n)$ 的单调性入手.

解：$\because S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$，$(n\in\mathbf{N})$

$\therefore S_{2n+1}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n+1}$，

$S_{n+1}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}$，

$\therefore f(n)=S_{2n+1}-S_{n+1}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}$，

$\therefore f(n+1)=\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+3}$，

$f(n+1)-f(n)=\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{n+2}$

$=\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}-\frac{2}{2n+4}$

$=(\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+4})+(\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+4})>0$，

即 $f(n+1)>f(n)$

$\therefore f(n)>f(n-1)>\cdots>f(3)>f(2)$，其中 $n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}$

$\therefore f(n)$ 的最小值为 $f(2)=\frac{1}{2+2}+\frac{1}{2+3}=\frac{9}{20}$

$\therefore$ 要使对于一切大于 1 的自然数 n，不等式 $f(n)>[\log_m(m-1)]^2-\frac{11}{20}[\log_{(m-1)}m]^2$ 恒成立，只需不等式 $\frac{9}{20}>[\log_m(m-1)]^2-\frac{11}{20}[\log_{(m-1)}m]^2$ 成立即可.

由 $\begin{cases}m>0,m\neq 1\\ m-1>0,m-1\neq 1\end{cases}$.

得 $m>1$ 且 $m\neq 2$.

此时设 $[\log_m(m-1)]^2=y$，则 $y>0$，

于是上不等式可变为 $\begin{cases}\frac{9}{20}>y-\frac{11}{20y}\\ y>0\end{cases}$

解 $0<y<1$，从而可得到不等式 $0<[\log_m(m-1)]^2<1$

由此易求得实数 m 的取值范围为 $m>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 且 $m\neq 2$.

[例3]（2003 年上海春季高考题）已知函数 $f(x)=\frac{x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}}{5}$，$g(x)=\frac{x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}}{5}$.

(1)证明 $f(x)$ 是奇函数；并求 $f(x)$ 的单调区间.

(2)分别计算 $f(4)-5f(2)g(2)$ 和 $f(9)-5f(3)g(3)$ 的值，由此概括出涉及函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的对所有不等于零的实数 x 都成立的一个等式，并加以证明.

(1)证明：$f(x)=\frac{x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}}{5}$，定义域 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0$

$f(-x)=\frac{(-x)^{\frac{1}{3}}-(-x)^{-\frac{1}{3}}}{5}=\frac{-x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}}{5}$

$=-\frac{x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}}{5}=-f(x)$

$\therefore f(x)$ 是奇函数.

设 $0<x_1<x_2$，$x_1^{\frac{1}{3}}<x_2^{\frac{1}{3}}$，$x_2^{-\frac{1}{3}}<x_1^{-\frac{1}{3}}$

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1^{\frac{1}{3}}-x_1^{-\frac{1}{3}}}{5}-\frac{x_2^{\frac{1}{3}}-x_2^{-\frac{1}{3}}}{5}$

$=\frac{x_1^{\frac{1}{3}}-x_2^{\frac{1}{3}}}{5}+\frac{x_2^{-\frac{1}{3}}-x_1^{-\frac{1}{3}}}{5}>0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，

又 $f(x)$ 为奇函数，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 或 $(0,+\infty)$ 上都是增函数.

(2)解：$f(4)-5f(2)g(2)=\frac{4^{\frac{1}{3}}-4^{-\frac{1}{3}}}{5}-5\times\frac{2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}}{5}\times\frac{2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}}{5}=0$

$f(9)-5f(3)g(3)=\frac{9^{\frac{1}{3}}-9^{-\frac{1}{3}}}{5}-5\times\frac{3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}}{5}\times\frac{3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}}{5}=0$

由此得到一个等式，$f(x^2)-5f(x)\cdot g(x)=0$ $(x\neq 0)$

证明：$f(x^2)-5f(x)\cdot g(x)=\frac{(x^2)^{\frac{1}{3}}-(x^2)^{-\frac{1}{3}}}{5}-5\times\frac{x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}}{5}\times\frac{x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}}{5}$

$=\frac{x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}}{5}-\frac{x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}}{5}=0$

故所得等式对于 $x\neq 0$ 都成立.

[例4]某地区地理环境偏僻，严重制约经济发展，其土特产品只能在本地销售，该地区政府每投资 x 万元，所获利润为 $P=-\frac{1}{160}(x-40)^2+10$ 万元.

为顺应开发大西北的宏伟决策，该地区政府在制订经济发展十年规划时，拟开发此种土特产品，而开发前后用于该项目投资的专项财政拨款每年都是 60 万元. 若开发该产品，必须在前 5 年中，每年从 60 万元专款中拿出 30 万元投资修通一条公路，且 5 年可以修通. 公路修通后该土特产品在异地销售，每投资 x 万元，可

备课札记

备课札记

获利润 $Q=-\frac{159}{160}(60-x)^2+\frac{119}{2}(60-x)$ 万元.问从十年的总利润看,该项目有无开发价值?

解:若按原来投资环境不变,由 $P=-\frac{1}{160}(x-40)^2+10$ 知,当 $x=40$ 时,$P_{最大}=10$(万元),即每年只需从60万元专款中拿出40万元投资,可获得最大利润10万元,这样10年总利润最大值为100万元.

若对该产品开发,前5年可用于对该产品的投资只有30万元,而 $P=-\frac{1}{160}(x-40)^2+10$ 在(0,30]上递增,∴当 $x=30$ 时,$P_{最大}=\frac{75}{8}$,前5年总利润 $\frac{375}{8}$ 万元.

设后5年,x 万元用于本地销售投资,$60-x$ 万元用于异地销售投资,则总利润:

$[-\frac{1}{160}(x-40)^2+10]\times 5+(-\frac{159}{160}x^2+\frac{119}{2}x)\times 5$

$=5[-(x-30)^2+900]$,

∴当 $x=30$ 时,利润最大,此时利润为4500万元,∴十年总利润为 $\frac{375}{8}+4500>100$,故该项目具有极大的开发价值.

说明:本题是一道应用题,这类题目的立意、实际背景、创设的情境、设问角度和方式新颖灵活,对学生的能力和数学素质有较高的要求,成为近几年高考的热点.解答应用题应过好三关:①读懂题意;②将实际背景问题转化为数学的符号语言;③构建数学模型,用数学方法解答.

[例5](2003年北京春季高考文史卷)某租赁公司拥有汽车100辆.当每辆车的月租金为3000元时,可全部租出.当每辆车的月租金每增加50元时,未租出的车将会增加一辆.租出的车每辆每月需要维护费200元.

(1)当每辆车的月租金定为3600元时,能租出多少辆车?

(2)当每辆车的月租金定为多少元时,租赁公司的月收益最大?最大月收益是多少?

本小题主要考查二次函数的性质等基本知识,考查分析和解决问题的能力.

解:(1)当每辆车的月租金定为3600元时,未租出的车辆数为 $\frac{3600-3000}{50}=12$,所以这时租出了88辆车.

(2)设每辆车的月租金定为 x 元,则租赁公司的月收益为

$f(x)=(100-\frac{x-3000}{50})(x-200)$,

整理得

$f(x)=\frac{1}{50}(8000-x)(x-200)=-\frac{1}{50}x^2+164x-32000=-\frac{1}{50}(x-4100)^2+304200$.

所以,当 $x=4100$ 时,$f(x)$ 最大,最大值为 $f(4100)=304200$.

即当每辆车的月租金定为4100元时,租赁公司的月收益最大,最大月收益为304200元.

备选例题

[例题]某产品的价格每上涨 $x\%$ $(x>0)$,销量就减少 $kx\%$(其中 k 为正常数),出厂时该产品单价为 a 元,其销量为 b 件.

(1)当 $k=\frac{1}{2}$ 时,该产品单价上涨多少时,能使销售总金额达到最大?

(2)在适当涨价过程中,求使销售总金额不断增加时 k 的范围.

解:设单价上涨 $x\%$ 后,销售总金额为 y,则

$y=a(1+x\%)\cdot b(1-kx\%)$

$=\frac{ab}{10000}[-kx^2+100(1-k)x+10000]$.

(1)当 $k=\frac{1}{2}$ 时,$y=\frac{ab}{10000}(-\frac{1}{2}x^2+50x+10000)$,当 $x=50$(即上涨50%时),y 最大为 $\frac{9}{8}ab$.

(2)由 $y=\frac{ab}{10000}[-kx^2+100(1-k)x+10000]$ 可知,其对称轴为 $x=\frac{50(1-k)}{k}$.

在适当涨价过程中,销售总金额不断增加即要求此函数当自变量 x 在 $\{x|x>0\}$ 的一个子集内增大时,y 也增大.

令 $\frac{50(1-k)}{k}>0$,解得 $0<k<1$.

综合能力训练

一、选择题

1. 已知 x_1 是方程 $x+\lg x=3$ 的根,x_2 是方程 $x+10^x=3$ 的根,则 x_1+x_2 等于 …… ( )

A. 6　B. 3　C. 2　D. 1

解析:x_1 是函数 $y=\lg x$ 与函数 $y=3-x$ 的图象交点的横坐标,x_2 是函数 $y=10^x$ 与函数 $y=3-x$ 的图象交点的横坐标,而函数 $y=\lg x$ 与 $y=10^x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,∴x_1+x_2 等于直线 $y=x$ 与 $y=3-x$ 交点横坐标的2倍.

答案:B

2. 函数 $y=x^2+bx+c(x\in[0,+\infty))$ 是单调函数的充要条件是 …………………… ( )

A. $b\geqslant 0$　B. $b\leqslant 0$

C. $b>0$　D. $b<0$

答案:A

▶3. 东方旅社有 100 张普通客床，每床每夜收租费 10 元时，客床可以全部租出；若每床每夜收费提高 2 元，便减少 10 张床租出；再提高 2 元，再减少 10 张床租出，依次变化下去，为了投资少而获利大，每床每夜应提高租金 ……………………………………… (　　)

A. 4 元　　B. 6 元

C. 4 元或 6 元　　D. 10 元

答案：B

▶4. 设函数 $y=f(x)$ 对任意实数 x 都有 $f(3+x)=f(3-x)$，且 $f(x)=0$ 的所有实根之和为 18，则方程 $f(x)=0$ 共有实根 …… (　　)

A. 4 个　　B. 6 个

C. 8 个　　D. 非上述结果

解析：由 $f(3+x)=f(3-x)$ 知 $x=3$ 是 $y=f(x)$ 的图象的对称轴，由图象直观地可看出：关于 $x=3$ 对称的两根之和是 6，故共有 6 个根.

答案：B

▶5. 设 $f(x)$、$g(x)$ 都是单调函数，有如下四个命题：①若 $f(x)$ 单调递增，$g(x)$ 单调递增，则 $f(x)-g(x)$ 单调递增；②若 $f(x)$ 单调递增，$g(x)$ 单调递减，则 $f(x)-g(x)$ 单调递增；③若 $f(x)$ 单调递减，$g(x)$ 单调递增，则 $f(x)-g(x)$ 单调递减；④若 $f(x)$ 单调递减，$g(x)$ 单调递减，则 $f(x)-g(x)$ 单调递减. 其中正确的命题是 ………………………… (　　)

A. ①③　　B. ①④

C. ②③　　D. ②④

答案：C

二、填空题

▶6. 老师给出一个函数 $y=f(x)$，四个学生甲、乙、丙、丁各指出这个函数的一个性质：

甲：对于 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(1+x)=f(1-x)$；

乙：在 $(-\infty,0]$ 上函数递减；

丙：在 $(0,+\infty)$ 上函数递增；

丁：$f(0)$ 不是函数的最小值.

如果其中恰有三人说得正确，请写出一个这样的函数________.

答案：$f(x)=(x-1)^2$ 适合甲、乙、丁的性质(答案不惟一)

▶7. $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，其图象关于 $x=2$ 对称，且当 $x\in(-2,2)$ 时，$f(x)=-x^2+1$，则当 $x\in(-6,-2)$ 时，$f(x)=$________.

解析：$x\in(-6,-2)$，$-x\in(2,6)$，$4+x\in(-2,2)$，由于函数为偶函数，

$\therefore f(x)=f(-x)$，由于函数关于 $x=2$ 对称，

$\therefore f(-x)=f(4+x)$，

$\therefore f(x)=f(4+x)=-(x+4)^2+1$

答案：$-(x+4)^2+1$

三、解答题

▶8. 已知 $y=x^2-2x+3$ 在区间 $[0,a]$ 上的最大值为 3，最小值为 2，求 a 的取值范围.

解：$y=(x-1)^2+2$，$x\in[0,a]$，又 y 最小值为 2，此时 $x=1$，故 $a\geqslant1$；又 $y\leqslant3$，故 $0\leqslant x\leqslant2$，而 $x=0$ 时 $y=3$，故 $[0,a]\subseteq[0,2]$，即 $a\leqslant2$. 综合之 $1\leqslant a\leqslant2$.

说明：本题可先画草图，图象位置确定后再用运动观点作出区间 $[0,a]$ 的不同情形，进而启迪思路. 亦可由 $2\leqslant(a-1)^2+2\leqslant3$ 解得 a 的范围.

▶9. 在研究并行计算的基本算法时，有以下简单模型问题：

用计算机求 n 个不同的数 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 的和 $\sum_{i=1}^{n}v_i=v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n$. 计算开始前，$n$ 个数存贮在 n 台由网络连接的计算机中，每台机器存一个数. 计算开始后，在一个单位时间内，每台机器至多到一台其他机器中读数据，并与自己原有数据相加得到新的数据，各台机器可同时完成上述工作.

为了用尽可能少的单位时间，使各台机器都得到这 n 个数的和，需要设计一种读和加的方法. 比如 $n=2$ 时，一个单位时间即可完成计算，方法可用下表表示：

机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结果	被读机号	结果	被读机号	结果
1	v_1	2	v_1+v_2				
2	v_2	1	v_2+v_1				

(1)当 $n=4$ 时，至少需要多少个单位时间可完成计算？

把你设计的方法填入下表

机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结果	被读机号	结果	被读机号	结果
1	v_1						
2	v_2						
3	v_3						
4	v_4						

(2)当 $n=128$ 时，要使所有机器都得到 $\sum_{i=1}^{n}v_i$，至少需要多少个单位时间可完成计算？(结论不要求证明)

解：(1)当 $n=4$ 时，只用 2 个单位时间即可完成计算.

方法之一如下表：

备课札记

备课札记

机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结果	被读机号	结果	被读机号	结果
1	v_1	2	v_1+v_2	3	$v_1+v_2+v_3+v_4$		
2	v_2	1	v_2+v_1	4	$v_2+v_1+v_4+v_3$		
3	v_3	4	v_3+v_4	1	$v_3+v_4+v_1+v_2$		
4	v_4	3	v_4+v_3	2	$v_4+v_3+v_2+v_1$		

(2)当 $n=128=2^7$ 时，至少需要 7 个单位时间才能完成计算.

▶10. 已知函数 $f(x)=a\cdot b^x$ 的图象过点 $A(4,\frac{1}{4})$ 和 $B(5,1)$.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2)记 $a_n=\log_2 f(n)$，n 是正整数，S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，解关于 n 的不等式 $a_nS_n\leqslant 0$；

(3)对于(2)中的 a_n 与 S_n，整数 10^4 是否为数列 $\{a_nS_n\}$ 中的项？若是，则求出相应的项数；若不是，则说明理由.

解：(1)由 $\frac{1}{4}=a\cdot b^4$，$1=a\cdot b^5$，

得 $b=4$，$a=\frac{1}{1024}$，

故 $f(x)=\frac{1}{1024}4^x$.

(2)由题意 $a_n=\log_2(\frac{1}{1024}\cdot 4^n)=2n-10$，

$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=n(n-9)$，

$a_nS_n=2n(n-5)(n-9)$.

由 $a_nS_n\leqslant 0$，得 $(n-5)(n-9)\leqslant 0$，

即 $5\leqslant n\leqslant 9$.

故 $n=5,6,7,8,9$.

(3)$a_1S_1=64$，$a_2S_2=84$，$a_3S_3=72$，$a_4S_4=40$.

当 $5\leqslant n\leqslant 9$ 时，$a_nS_n\leqslant 0$.

当 $10\leqslant n\leqslant 22$ 时，$a_nS_n\leqslant a_{22}S_{22}=9724<10^4$.

当 $n\geqslant 23$ 时，$a_nS_n\geqslant a_{23}S_{23}=11592>10^4$.

因此，10^4 不是数列 $\{a_nS_n\}$ 中的项.

教学建议

先夯实双基，如：二次函数、指数函数与对数的定义、图象和性质；函数的三大特性、反函数等. 典型例题要先让学生独立去解，再讲评，讲解法的关键处即可，要注意一题多变、一题多解. 各节的综合能力训练可作为学生的作业.

教学参考资料

一、拓展资料

(1)设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 R. 若 $f(a+x)=f(a-x)$ 或 $f(x)=f(2a-x)$，则函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.

(2)二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实根分布条件.

设 $f(x)=ax^2+bx+c$

二次方程 $f(x)=0$ 的两个根一根比 r 大，另一根比 r 小 $\Leftrightarrow af(r)<0$；

二次方程 $f(x)=0$ 在区间 (p,q) 内有两根

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ p<-\frac{b}{2a}<q\\ af(p)>0\\ af(q)>0\end{cases}；$$

(3)设函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}$（$x>0$，a 为正实数常数），则函数 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{a}]$ 上是减函数，在 $[\sqrt{a},+\infty)$ 上是增函数，当且仅当 $x=\sqrt{a}$ 时，$f(x)_{\min}=2\sqrt{a}$.

二、思想方法总结

函数与方程的思想，数形结合，分类讨论，配方法.

三、高考题分析

(2001 年全国高考试题)设 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，其图象关于直线 $x=1$ 对称，对任意 $x_1,x_2\in[0,\frac{1}{2}]$ 都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，且 $f(1)=a>0$.

(1)求 $f(\frac{1}{2})$ 及 $f(\frac{1}{4})$；

(2)证明 $f(x)$ 是周期函数；

(3)记 $a_n=f(2n+\frac{1}{2n})$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln a_n)$.

分析：(1)因为 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$，再用已知 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$ 即可得 $f(\frac{1}{2})$ 的值，同理可求 $f(\frac{1}{4})$ 的值.

(2)先把 $f(x)$ 是偶函数，图象关于直线 $x=1$ 对称转化为数学式，即

$f(x)=f(-x)$，$f(x)=f(2-x)$

$\therefore f(-x)=f(2-x)$，$\therefore T=2$

(3)由(2)得 $a_n=f(\frac{1}{2n})$.

下一步关键是想到：$\frac{1}{2}=n\times\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n}+(n-1)\times\frac{1}{2n}$.