南开大学公共数学系列教材

经济类数学分析

（下册）

编摇著摇张效成摇张摇阳摇徐摇锬摇

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

需要全本请访问 www.ertongbook.com

内容简介

本书是南开大学根据新世纪教学改革成果而编写的系列教材之一援全书分上、下两册，本书为下册援内容包括：空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分及级数援

与经济类传统的高等数学教材相比，本书加强了基础理论的阐述，大致相当于理科数学分析的深度援在内容上注重对学生抽象思维和逻辑上严谨论证的训练，同时也兼顾对学生数学运算能力以及运用能力的培养援

本书可作为对数学有较高要求的经济管理类专业本科生的教材，也可作为理科数学的参考教材援

摇图书在版编目（悦阿）数据

摇经济类数学分析援下册 辅张效成，张阳，徐锬编著援
—天津：天津大学出版社，圆园园员
摇阴分晕苑缘元悬圆园缘圆郁

摇Ⅰ援经援数摇Ⅱ援①张援数②张援数③徐援数摇Ⅲ援数学分析 原高等学校 原教材摇Ⅳ援园苑

摇中国版本图书馆 悦阿数据核字（圆园园 第 园园园员号

出版发行摇天津大学出版社
出 版 人摇杨欢
地摇摇址摇天津市卫津路 怨圆号天津大学内（邮编：猿园园园）
电摇摇话摇发行部：园园园苑园袁园苑摇邮购部：园园园苑园袁园苑
网摇摇址摇憎憎摇 [illegible]
短信网址摇发送“天大”至 怨园园悬
印摇摇刷摇昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司
经摇摇销摇全国各地新华书店
开摇摇本摇员苑 [illegible] 伊圆 [illegible] 摇
印摇摇张摇员 [illegible]
字摇摇数摇圆苑 [illegible] 千
版摇摇次摇圆园园 [illegible] 年 员月第 员版
印摇摇次摇圆园园 [illegible] 年 员月第 员次
印摇摇数摇员 [illegible]
定摇摇价摇员 [illegible] 元

本书得到国家自然科学基金（苑园 [illegible] 资助。

前摇摇言

多年来，高等数学一直是南开大学非数学类专业本科生必修的校级公共基础课援由于各个学科门类的情况差异较大，该课程又形成了包含多个层次、多个类别的体系结构援层次不同，类别不同，教学目标和教学要求有所不同，课程内容的深度与宽度也有所不同，自然所使用的教材也应有所不同援

教材建设是课程建设的一个重要方面，属于基础性建设援时代在前进，教材也应适时更新而不能一劳永逸援因此，教材建设是一项持续的不可能有“句号”的工作援圆园世纪愿园年代以来，南开大学的老师们就陆续编写出版了面向物理类、经济管理类和人文类等多种高等数学教材援这些教材为当时的数学教学做出了重要贡献，也为公共数学教材建设奠定了基础，积累了经验援

圆园世纪是一个崭新的世纪援随着新世纪的到来，人们似乎对数学也有了一个崭新的认识 数学不仅是工具，更是一种素养，一种能力，一种文化援已故数学大师陈省身先生在其晚年为将中国建设成为数学大国乃至最终成为数学强国而殚精竭虑援他尤其对大学生们寄予厚望援他不仅关心着数学专业的学生，也以他那博大胸怀关心着非数学专业的莘莘学子援圆园园园年他挥毫为天津市大学生数学竞赛题词，并与获奖学生合影留念援这也是老一辈数学家对我们的激励与鞭策援另一方面，近年来一大批与数学交叉的新兴学科如金融数学、生物数学等不断涌现援这也对我们的数学教育和数学教学提出了许多新要求援而作为课程基础建设的教材建设自当及时跟进援现在呈现在读者面前的便是新世纪南开大学公共数学系列教材之一——经济类数学分析（下册）援

本书主要内容是空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分与级数援和以往的经济类高等数学教材相比，其突出特点是从理科数学分析的高度，对基本理论做了较为严谨的阐述，以期为学生打下比较坚实的数学理论基础，正因为此，本书被赋予了《经济类数学分析》的名称援

我们之所以要加大经济类本科生基础数学的深度主要是基于以下的考虑援众所周知，在经济学中引入数学方法已有 圆园园多年的历史援经济学各个学科领域的发展历史一次又一次地证明，数学方法是经济学中最重要的方法之一，是经济学理论取得突破性发展的重要工具援

例如对经济学影响最大的瓦尔拉斯（[illegible]）的一般均衡理论，从数学角度看始终缺乏坚实的基础援这个问题经过数学家和经济学家们 愿园年的努力才得以解决援其中包括大数学家诺伊曼（[illegible]）在 圆园世纪 猿园年代的研究（他提出了著名的经济增长模型），列昂惕夫（[illegible]）的研究（他因其投入产出分析获 怨愿年诺贝尔经济学奖），还包括萨缪尔森（[illegible]）

和希克斯（[illegible]）的研究（他们分获[illegible]年和[illegible]年诺贝尔经济学奖）；而最终在[illegible]年给出一般经济均衡存在性严格证明的是阿罗（[illegible]）和德布鲁（[illegible]）；他们两人也因此先后获[illegible]年和[illegible]年诺贝尔经济学奖；阿罗和德布鲁都以学习数学开始他们的学术生涯；阿罗获有数学的学士和硕士学位，德布鲁则是由法国布尔巴基学派培养出来的数学家。

再来看现代金融理论的发展过程：第二次世界大战以前，金融学是经济学的一个分支；金融学研究的方法是以定性思维推理和语言描述为主；[illegible]世纪[illegible]年代初马柯维茨（[illegible]）最先把数理工具引入金融研究，提出了投资组合理论，因此被看作是现代金融学理论——分析金融学的发端；后人把马柯维茨的工作和[illegible]世纪[illegible]年代布莱克（[illegible]）和舒尔斯（[illegible]）提出的期权定价公式称为“华尔街的两次数学革命”；他们也都以其具有划时代意义的工作而获得诺贝尔经济学奖。

此外，一个非常明显的事实是，诺贝尔经济学奖得主大多都具有良好的数理基础，有的原本就是杰出的数学家。

毋庸多叙，仅仅以上这些事实就告诉我们，对于经济类专业的本科生来说，良好的数学基础及其修养是多么的重要！正是基于这样一种认识，我们修订了经济类专业公共数学课程的教学大纲，并编写了这本教材；而且，为了保证学生得到一定的训练，每周除[illegible]课时讲授外，还分小班开设了习题课。

本书也可作为管理类专业本科生教材，还可作为相关教师的参考书。

本书的编写得到了南开大学“新世纪教学改革”项目“公共数学课程建设改革与实践”的资助，得到了南开大学教务处、南开大学经济学院和南开大学数学学院的大力支持和帮助；在教材编写、录入和试用过程中，南开大学数学学院薛锋老师周密细致的组织协调工作为我们提供了有力的保障；韩志欣和单国根等同学牺牲了假期录入书稿；对来自方方面面的关心、支持和帮助，我们在这里一并表示衷心感谢。

由于我们的水平有限，缺点和不足在所难免，诚望读者批评指正。

编者

[illegible]年[illegible]月于南开园

目摇摇录

第 苑章摇空间解析几何与向量代数 …… (员
苑.员摇空间直角坐标系 …… (员
苑.圆摇向量代数 …… (猿
苑.猿摇空间平面 …… (员缘
苑.源摇空间直线 …… (圆园
苑.缘摇空间曲面 …… (圆源
苑.远摇空间曲线 …… (猿圆
习题 苑 …… (猿猿
第 愿章摇多元函数微分学 …… (猿远
愿.员摇多元函数的极限与连续 …… (猿远
愿.圆摇偏导数与全微分 …… (源缘
愿.猿摇多元复合函数的微分法 …… (缘缘
愿.源摇隐函数的微分法 …… (远员
愿.缘摇多元函数的泰勒(Taylor)公式 …… (远怨
愿.远摇方向导数和梯度 …… (苑圆
愿.苑摇偏导数的应用 …… (苑缘
习题 愿 …… (愿苑
第 怨章摇重积分 …… (怨源
怨.员摇二重积分 …… (怨源
怨.圆摇三重积分 …… (员员圆
习题 怨 …… (员缘源
第 员园章摇级数 …… (员远员
员园.员摇常数项级数的概念与性质 …… (员远员
员园.圆摇正项级数 …… (员苑缘
员园.猿摇任意项级数 …… (员怨圆
员园.源摇函数项级数的一致收敛 …… (圆园源
员园.缘摇幂级数 …… (圆园怨
员园.远摇泰勒级数 …… (圆员远
员园.苑摇傅里叶级数 …… (圆圆园
习题 员园 …… (圆圆愿
习题参考答案 …… (圆猿远

需要全本请访问 www.ertongbook.com

第 苑章摇空间解析几何与向量代数

本章将简要介绍空间解析几何的有关知识，以此作为研究多元函数微积分的必要准备援我们将利用向量代数这一工具来研究三维空间中的点、线、面以及其他空间图形的数学形式与相互关系援

苑援员摇空间直角坐标系

苑援员援员摇空间直角坐标系

在空间中任取一点 韵作为原点，过 韵点引三条互相垂直的空间直线 韵曾韵赠和 韵扎作为数轴，即构成空间直角坐标系，记为 韵原曾赠扎如图 苑援员所示援

数轴 韵曾韵赠韵扎分别称为 曾赠扎轴，统称坐标轴援空间直角坐标系三个坐标轴依不同的指向可分为右手系和左手系援若右手拇指指向 扎轴正向，其他四指握拳方向由 曾轴正向转到 赠轴正向，则为右手系援类似地，用左手握拳可得到左手系援图 苑援员的坐标系为右手系，今后如无特别说明，均采用右手系援

由坐标轴所决定的互相垂直的三个平面统称坐标面，如由 曾轴和 赠轴决定的平面称为 曾韵赠坐标面援类似地，其他两个平面分别称为 赠韵扎坐标面和 曾韵扎坐标面援

三个坐标面把空间分为八部分，每一部分称为一个卦限，如图 苑援员所示依次为第 员至第 愿卦限 (坐标面是卦限的界面，不算在卦限之内) 援各卦限的规定见表 苑援员援

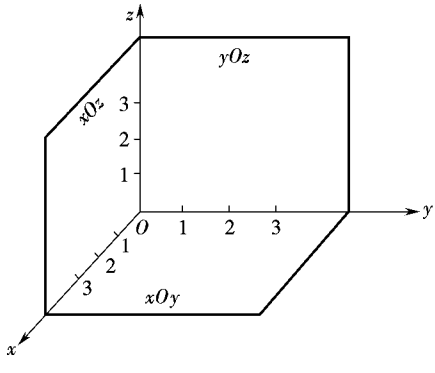

图 苑援员摇空间直角坐标系

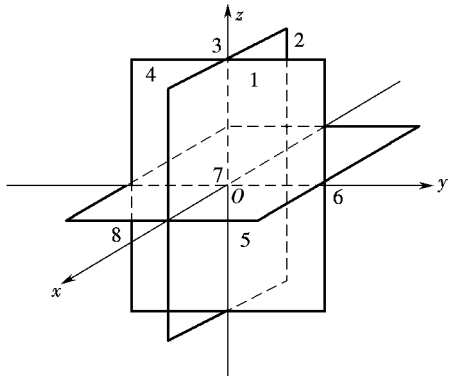

图 苑援员摇空间直角坐标系的 愿个卦限

表 苑 圆 摇八个卦限的规定

卦限 / 符号 / 坐标	员	圆	猿	源	缘	远	苑	愿
曾	垣	原	原	垣	垣	原	原	垣
赠	垣	垣	原	原	垣	垣	原	原
扎	垣	垣	垣	垣	原	原	原	原

在空间直角坐标系中，空间中任一点 酝的位置可由它关于坐标轴的相对位置唯一确定援方法是：过点 酝分别作与三个坐标轴垂直的平面，它们与三个坐标轴的交点分别为 孕、匝、砸援设 韵孕越曾韵匝越赠韵砸越扎，则称有序数组（曾赠扎）为点 酝的直角坐标，记为 酝（曾赠扎）（见图 苑圆猿 援曾赠扎）称为点 酝的三个坐标分量援这样，点 酝就与一个有序数组对应起来援反之，任给一个有序数组（曾赠扎），我们便可以分别在三个坐标轴上得到点 孕、匝、砸，过此三点分别作垂直于 曾赠扎轴的平面，三个互相垂直的平面交于一点 酝，点 酝就是有序数组（曾赠扎）所唯一确定的点援这样，在空间直角坐标系下，空间中的点就与三个数组成的有序数组一一对应了援

显然，原点 韵的坐标为（园，园，园），各坐标轴上点的坐标分量至少有两个分量为 园，如 曾轴上点的坐标是（曾园，园），各坐标面上点的坐标至少有一个分量是 园，如 曾赠扎平面上点的坐标是（曾赠园）援

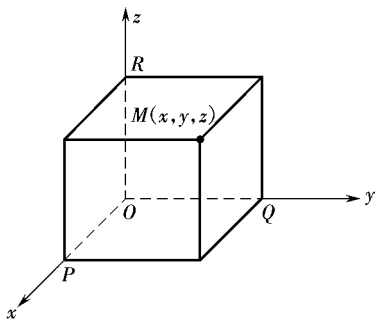

图 苑圆猿 摇点 酝的坐标

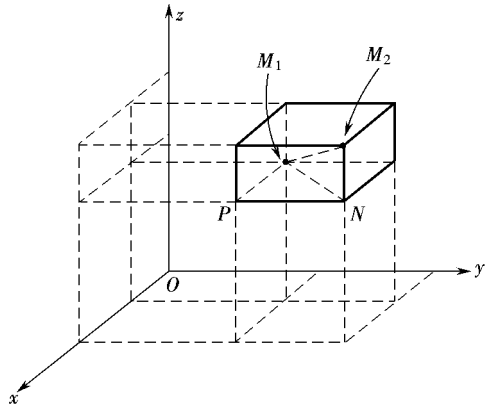

图 苑圆源 摇两点间的距离

苑圆猿 摇两点间的距离

设 酝员（曾员，赠员，扎员），酝圆（曾圆，赠圆，扎圆）为空间两点，我们可用两点的坐标来表示它们之间的距离 凿如图 苑圆源所示援过点 酝员，酝圆分别作垂直于坐标轴的六个平面，这些平面构成以 酝员，酝圆为对角线的长方体援由立体几何知识，我们知道

摇摇 渣$\overrightarrow{\text{酝}_{\text{员}}\text{酝}_{\text{圆}}}$渣越渣$\overrightarrow{\text{酝}_{\text{员}}\text{孕}}$渣垣渣$\overrightarrow{\text{孕}_{\text{晕}}\text{渣}}$渣垣渣$\overrightarrow{\text{酝}_{\text{圆}}\text{酝}_{\text{圆}}}$渣，

所以

摇摇 渣$\overrightarrow{\text{酝}_{\text{员}}\text{酝}_{\text{圆}}}$渣越$\sqrt{(\text{曾}_{\text{圆}}\text{原}\text{曾}_{\text{员}})^{\text{圆}}\text{垣}(\text{赠}_{\text{圆}}\text{原}\text{赠}_{\text{员}})^{\text{圆}}\text{垣}(\text{扎}_{\text{圆}}\text{原}\text{扎}_{\text{员}})^{\text{圆}}}$援

苑圆摇向量代数

向量是一种重要的数学工具，在科学和工程中试图运用数学方法之际，有许多量需借助它来刻画援在多元函数的讨论中，由于采用向量而可使许多概念的表述更为简单明晰援

苑圆摇向量的概念

在实际问题中，有些量只有大小，没有方向，例如时间、长度、质量、面积等援它们在取定一个单位后，可以用一个数来表示援这种量称为数量（或标量）援还有一些量既有大小，又有方向，例如力、速度、加速度等援这种既有大小又有方向的量称为向量（或矢量）援

定义 苑圆摇既有大小又有方向的量称为向量（或矢量）援

向量可以用有向线段表示援有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向援如以 $\text{酝}_{\text{员}}$为始点，$\text{酝}_{\text{圆}}$为终点的向量，记作$\overrightarrow{\text{酝}_{\text{员}}\text{酝}_{\text{圆}}}$（图 苑圆摇）援有时也用一个黑体字母来表示向量，例如 葬遭援

在许多涉及向量的实际问题中，可以不考虑向量的起点位置，只考虑其大小和方向，称这样的向量为自由向量援下面讨论的向量，一般都指自由向量援若向量 葬与 遭的方向相同或相反，则称向量 葬与 遭平行，记作 葬辅遭；若向量 葬与 遭大小相等且方向相同，则称向量 葬与 遭相等，记作 葬越遭援也就是说，经过平行移动后能完全重合的向量是相等的援例如图 苑圆，粤月悦为一平行四边形，我们认为$\overrightarrow{\text{粤月}}$越$\overrightarrow{\text{悦}_{\text{月}}\text{悦}}$，$\overrightarrow{\text{粤悦}}$越$\overrightarrow{\text{月悦}}$援

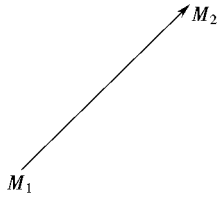

图 苑圆摇用有向线段表示向量

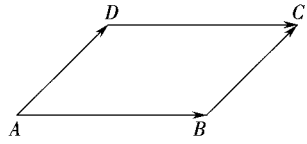

图 苑圆摇向量的相等

因此，一个向量在保持大小、方向都不变的条件下可以自由地平移援以后，为了方便，我们常把向量平移到同一起点来考虑援

向量的大小或长度称为向量的模，向量$\overrightarrow{\text{酝}_{\text{员}}\text{酝}_{\text{圆}}}$、葬的模依次记为 渣$\overrightarrow{\text{酝}_{\text{员}}\text{酝}_{\text{圆}}}$渣与 渣$\overrightarrow{\text{葬}}$渣模等于 员的向量称为单位向量援模等于零的向量称为零向量，记作 园援零向量没有确定的方

向，规定零向量的方向是任意的援在直角坐标系中，以坐标原点 韵为起点，向已知点 酝引向量韵酝，则称此向量为点 酝对于原点 韵的向径（或矢径）援常用黑体字母 则表示援

设 葬为一向量，与 葬的模相等而方向相反的向量叫做 葬的反向量（或负向量），记作 原葬援

苑援援摇向量的线性运算

员援向量的加法

在力学中，求作用于同一质点的两个不同方向的力的合力时，常采用平行四边形法则或三角形法则进行援对于一般的向量，规定两向量的加法法则如下援

法则 员（平行四边形法则）摇设有两个非零向量 葬遭以 葬越韵鸟，遭越韵月为边的平行四边形 韵鸟悦月的对角线所对应的向量韵悦（图 苑援苑），称为向量 葬与 遭的和向量，记为 葬垣遭援

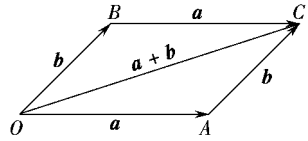

图 苑援援摇平行四边形法

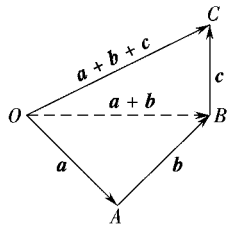

图 苑援援摇三个向量相加的三角形法则

从图 苑援苑可得三角形法则援

法则 圆（三角形法则）摇以向量 葬的终点作为向量 遭的起点，则由 葬的起点到 遭的终点的向量是 葬与 遭的和向量援

向量加法的三角形法则可以推广到任意有限个向量相加的情形援在图 苑援愿中韵悦就是三个向量 葬遭糟的和向量，即韵悦越葬垣遭垣糟援

特别地，对任意向量 葬规定 葬垣园越葬援

容易验证，向量的加法满足以下运算律：

（员）交换律摇葬垣遭越遭垣葬；

（圆）结合律摇（葬垣遭）垣糟越葬垣（遭垣糟）；

（猿）葬垣（原葬）越园援

我们看到，向量加法的运算规则与实数加法的运算规则是相同的援

圆援向量的减法

向量 葬与向量 遭的反向量之和称为 葬与 遭的差，记作 葬原遭（见图 苑援怨），即

摇摇葬原遭越葬垣（原遭）援

两向量差的作图法如图 苑援园所示援为了从一向量减去另一向量，应该把它们移到共同起点，然后从减项向量的终点向被减项向量的终点引一向量，此即所求的差援

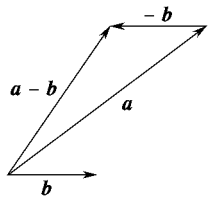

图 苑援摇葬原遭

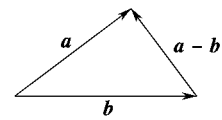

图 苑援园摇求两向量差的作图法

任意两个向量之间,满足三角不等式,即有如下定理及推论援

定理 苑圆圆员摇设 葬遭为任意二向量,则 渣葬垣遭渣≤ 渣葬渣垣渣遭渣援

证摇若 葬与 遭同向或它们之中至少有一个零向量时,则显然有

摇摇 渣葬垣遭渣越渣葬渣垣渣遭渣援

若 葬与 遭反向,则有 渣葬垣遭渣约渣葬渣垣渣遭渣援

若 葬与 遭不平行,则由三角形两边之和大于第三边得

摇摇 渣葬垣遭渣约渣葬渣垣渣遭渣援

综上所述,得三角不等式

摇摇 渣葬垣遭渣≤ 渣葬渣垣渣遭渣援

推论 员摇设 葬遭为任意两向量,则 渣葬原遭渣≤ 渣葬渣垣渣遭渣援

证摇 渣葬原遭渣越渣葬垣(原遭 渣≤ 渣葬渣垣渣原遭渣越渣葬渣垣渣遭渣援

推论 圆摇设 葬遭为任意两向量,则

摇摇 渣葬渣原渣遭渣≤ 渣葬垣遭渣

摇摇 渣葬渣原渣遭渣≤ 渣葬原遭渣援

证摇显然有

摇摇 渣葬渣越渣葬垣遭原遭渣≤ 渣葬垣遭渣垣渣遭渣

摇摇 渣葬渣越渣葬原遭垣遭渣≤ 渣葬原遭渣垣渣遭渣

移项得证援

猿援数量与向量的乘法

设 λ 是一个实数,向量 葬与 λ 的乘积(简称数乘),记作 λ 葬援规定它为一个向量,满足:

(员 渣葬渣越渣 渣渣葬渣

(圆 当 λ 跃园时,λ 葬与 葬同向;当 λ 约园时,λ 葬与 葬反向援若 λ 越园或 葬越园,则 λ 葬越园援

设 λ,μ 为实数,葬遭为向量,易验证向量的数乘满足以下运算律:

(员 结合律 λ (μ 葬 越 μ (λ 葬 越($\lambda\mu$) 葬

(圆 分配律 (λ 垣 μ) 葬越 λ 葬垣 μ 葬 λ (葬垣遭 越 λ 葬垣 λ 遭援

根据向量数乘的规定,有

(员 向量 葬与 遭平行的充要条件是 葬越 λ 遭或 遭越 μ 葬其中 λ,μ 是常数;

(圆 与非零向量 葬同方向的单位向量记为 藻,则 渣藻渣越员,且 葬越渣葬渣藻或 藻越 $\frac{葬}{渣葬渣}$ 援

若一组向量平行于同一条直线（我们认为零向量平行于任何直线），则称它们是共线的，这组向量也称为共线向量援易验证向量 葬与非零向量 遭共线的充要条件是存在一个实数 λ，使得 葬越λ遭援

苑圆援摇向量的坐标表示

员援向量在轴上的投影

设 葬，遭为非零向量，将它们的起点都平移到某一点 韵，得到向量 葬贡，遭贡援葬贡，遭贡所成的角（在 园与 π 之间）称为向量 葬，遭的夹角，记为（葬，遭或（遭，葬援

向量与轴的夹角就是向量与轴正向所成的角援下面给出空间一点和一向量在轴 怎上的投影援

已知空间的点 粤和轴 怎，过点 粤作轴 怎的垂面 α，平面 α 与轴 怎的交点 粤，称为点 粤在轴 怎上的投影（图 苑圆员援

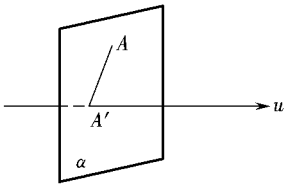

图 苑圆员摇点在轴上的投影

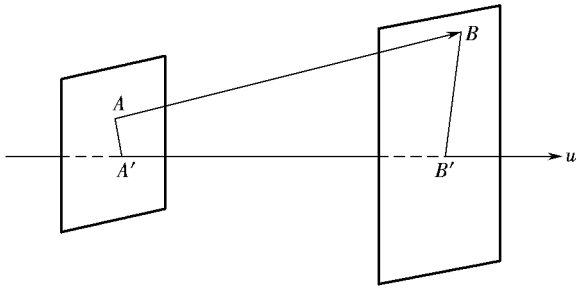

图 苑圆员摇向量 粤月的起点与终点在轴上的投影

已知向量 粤月的起点 粤和终点 月在轴 怎上的投影分别为 粤，和 月，（图 苑圆员），设轴 怎的单位向量为 藻，粤月，越λ藻则数 $\lambda \triangleq$ 粤，月，称为向量 粤月在轴 怎上的投影，记作 孕鳴粤月越粤，月，轴 怎称为投影轴援

关于向量的投影，有下面两个定理援

定理 苑圆圆摇向量 粤月在轴 怎上的投影等于向量的模乘以轴与向量的夹角 φ 的余弦，即

摇摇孕鳴粤月越灌粤月灌粤φ援

证摇通过向量 粤月的起点 粤引轴 怎，与轴 怎平行，且有相同正方向，则轴 怎和向量 粤月间的夹角 φ 等于轴 怎和 粤月间的夹角，且有

摇摇孕鳴粤月越孕鳴粤月援

由图 苑圆员知

摇摇孕鳴粤月越粤月越灌粤月灌粤φ，

所以

摇摇孕鳴粤月越灌粤月灌粤φ援

需要全本请访问 www.ertongbook.com

当 φ 为锐角时，投影为正；当 φ 为钝角时，投影为负；当 φ 为直角时，投影为 园援

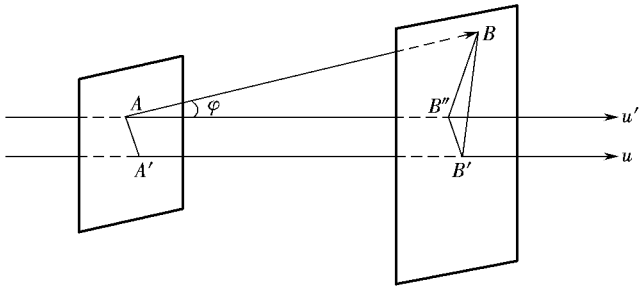

图 苑援源援源　定理 苑援源援员图

容易得出，相等的向量在同一轴上的投影相等；读者不难推证下面定理援

定理 苑援源援圆　有限个向量的和向量在轴 怎上的投影等于各向量在轴 怎上投影的和，即

摇摇$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2+\cdots+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_n$　　越援源援源援员园

园援圆　向量的坐标表示

前面已经用几何的方法表示向量，并对向量进行运算；但是更深入地研究向量以及用向量解决实际问题，还需借助代数的方法；为此，引入向量的坐标概念，即用一个有序数组来表示向量，并用向量的坐标进行向量的运算援

在空间直角坐标系中，以原点为始点，终点为 (员，园，园)，(园，员，园)，(园，园，员) 的三个单位向量称为基本单位向量或坐标向量，分别记为 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$援

设 $\boldsymbol{a}$ 为空间任一向量，将它平移，使其起点在坐标原点 O，终点在点 $M(a_x,a_y,a_z)$，即 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$，如图 苑援源援圆所示；点 M 在 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴上的投影依次为 $P(a_x,0,0)$，$Q(0,a_y,0)$，$R(0,0,a_z)$，根据向量的加法，有

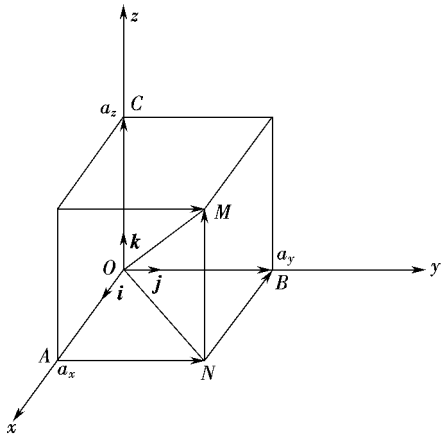

图 苑援源援猿　点 M 在坐标轴上的投影

摇摇$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$

越$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}$

越$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$　　越援源援源援圆园

由向量的数乘运算可知

摇摇$\overrightarrow{OA}=a_x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{AB}=a_y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{BM}=a_z\boldsymbol{k}$　　越援源援源援圆员

于是

摇摇$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$　　越援源援源援圆圆

上式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的分解式，其中 a_x，a_y，a_z 是向量 $\boldsymbol{a}$ 分别在 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴上的投影援

定义 苑援源援猿　设向量 $\boldsymbol{a}$ 在 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴上的投影分别为 a_x，a_y，a_z，称表达式

摇摇$a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$

为向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的分解式，称 a_x，a_y，a_z 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，并称表达式

摇摇葬越{葬$_{曾}$,葬$_{赠}$,葬$_{扎}$}

为向量 葬的坐标表达式援

显然,葬越葬$_{曾}$垣葬$_{赠}$垣葬$_{扎}$噪与 葬越{葬$_{曾}$,葬$_{赠}$,葬$_{扎}$} 是表示向量的两种等价的形式援

猿援用向量的坐标进行向量的线性运算

设有二向量 葬越葬$_{曾}$垣葬$_{赠}$垣葬$_{扎}$噪,遭越遭$_{曾}$垣遭$_{赠}$垣遭$_{扎}$噪,则

摇摇葬依遭越(葬$_{曾}$垣葬$_{赠}$垣葬$_{扎}$噪 依(遭$_{曾}$垣遭$_{赠}$垣遭$_{扎}$噪

越(葬$_{曾}$依遭$_{曾}$) 垣(葬$_{赠}$依遭$_{赠}$) 躁垣(葬$_{扎}$依遭$_{扎}$) 噪,

摇摇λ葬越λ (葬$_{曾}$垣葬$_{赠}$垣葬$_{扎}$噪 越λ葬$_{曾}$垣λ葬$_{赠}$垣λ葬$_{扎}$噪,

即

摇摇 {葬$_{曾}$,葬$_{赠}$,葬$_{扎}$} 依{遭$_{曾}$,遭$_{赠}$,遭$_{扎}$} 越{葬$_{曾}$依遭$_{曾}$,葬$_{赠}$依遭$_{赠}$,葬$_{扎}$依遭$_{扎}$} ,

摇摇λ {葬$_{曾}$,葬$_{赠}$,葬$_{扎}$} 越{λ葬$_{曾}$,λ葬$_{赠}$,λ葬$_{扎}$} ,

其中 λ 为常数援

以上就是利用坐标进行向量线性运算的公式援它们说明:向量的加、减运算及数乘运算可以化为它们相应坐标的运算援

例 苑圆圆摇设有两点 粤(曾$_{贵}$,赠$_{贵}$,扎$_{贵}$) ,月(曾$_{圆}$,赠$_{圆}$,扎$_{圆}$) ,求向量$\overrightarrow{粤月}$的坐标援

解摇做向量$\overrightarrow{韵粤}$,$\overrightarrow{韵月}$,$\overrightarrow{粤月}$,则

摇摇$\overrightarrow{粤月}$越$\overrightarrow{韵月}$原$\overrightarrow{韵粤}$越{曾$_{圆}$,赠$_{圆}$,扎$_{圆}$} 原{曾$_{贵}$,赠$_{贵}$,扎$_{贵}$}

越{曾$_{圆}$原曾$_{贵}$,赠$_{圆}$原赠$_{贵}$,扎$_{圆}$原扎$_{贵}$} ,

即起点不在原点的向量的坐标等于终点坐标减去起点坐标 (图 苑圆缘 援

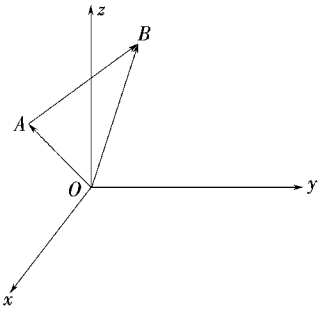

图 苑圆缘摇例 苑圆圆图

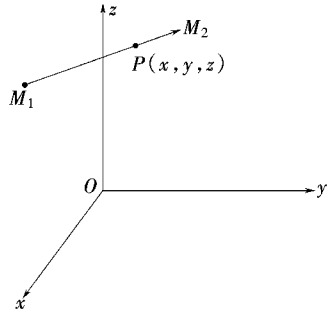

图 苑圆远摇例 苑圆圆图

例 苑圆圆摇设有两点 酝$_{贵}$(曾$_{贵}$,赠$_{贵}$,扎$_{贵}$) ,酝$_{圆}$(曾$_{圆}$,赠$_{圆}$,扎$_{圆}$) ,点 孕分线段 酝$_{贵}$酝$_{圆}$成定比 λ,求证分点 孕的坐标为

摇摇曾越$\frac{曾_{贵}垣\lambda曾_{圆}}{贵垣\lambda}$,赠越$\frac{赠_{贵}垣\lambda赠_{圆}}{贵垣\lambda}$,扎越$\frac{扎_{贵}垣\lambda扎_{圆}}{贵垣\lambda}$援

证摇由图 苑圆远知$\overrightarrow{酝_{贵}孕}$越λ $\overrightarrow{孕酝_{圆}}$,即

摇摇 {曾原曾$_{贵}$,赠原赠$_{贵}$,扎原扎$_{贵}$} 越λ {曾$_{圆}$原曾赠$_{圆}$原赠扎$_{圆}$原扎,

从而

摇摇曾原曾$_{贵}$越λ (曾$_{圆}$原曾 ,

摇摇赠原赠越λ（赠原赠，

摇摇扎原扎越λ（扎原扎，

从中解出 曾赠扎即可援

前面 苑援圆中给出的向量 葬与非零向量 遭共线的充要条件 葬越λ遭也可用坐标形式表示援设 葬越{葬，葬，葬，遭越{遭，遭，遭 ≠ {园园园，则 葬越λ遭即

摇摇 {葬，葬，葬 越λ {遭，遭，遭 越{λ遭，λ遭，λ遭，

从而

摇摇葬越λ遭，葬越λ遭，葬越λ遭，

或写成

摇摇$\frac{葬}{遭}$越$\frac{葬}{遭}$越$\frac{葬}{遭}$（越λ），

即两向量 葬与 遭（≠园）共线的充要条件是它们的对应坐标成比例援

应当指出，上式中若某一分母为 园则应认为相应分子也是 园援但由于 遭≠园因此遭，遭，遭不会同时为 园援

源援向量的模与方向余弦的坐标表示

确定一个向量，需要知道它的大小（即模）和方向，怎样用坐标来表示这两个要素呢？

定理 苑圆圆源摇设有向量 葬越{葬，葬，葬，则它的模为

摇摇 渣渣越$\sqrt{葬垣葬垣葬}$援

证摇把 葬的起点平移到坐标原点，设它的终点为 粤（如图 苑圆苑，则由两点间距离公式知

摇摇 渣渣越渣粤渣越$\sqrt{葬垣葬垣葬}$援

为了确定向量的方向，我们先给出以下定义援

定义 苑圆圆源摇非零向量 葬与坐标轴正向蚤躁躁的夹角 α，β，γ 称为向量 葬的方向角援糟糅α，糟糅β，糟糅γ 称为向量 葬的方向余弦援

方向角 α，β，γ 确定后，向量 葬的方向就确定了援但用坐标来表示方向角却比较麻烦援考虑到方向余弦可唯一确定方向角，并且用坐标来表示方向余弦比较方便，因此我们用方向余弦来确定向量的方向援

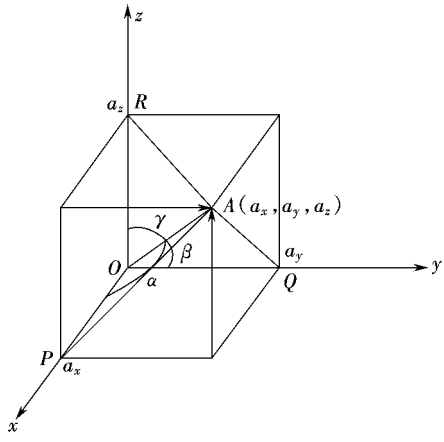

图 苑圆苑摇向量的模与方向余弦

由图 苑圆苑，因为△韵孕粤，△韵匝粤，△韵匝粤都是直角三角形，所以

$$\text{摇摇}\begin{cases}\text{糟糕}\alpha\ \text{越}\dfrac{\text{葬}_{\text{曾}}}{\text{渣}\ \text{渣}}\ \text{越}\dfrac{\text{葬}_{\text{曾}}}{\sqrt{\text{葬}_{\text{曾}}^{\text{圆}}\text{垣}\text{葬}_{\text{赠}}^{\text{圆}}\text{垣}\text{葬}_{\text{孔}}^{\text{圆}}}},\\ \text{糟糕}\beta\ \text{越}\dfrac{\text{葬}_{\text{赠}}}{\text{渣}\ \text{渣}}\ \text{越}\dfrac{\text{葬}_{\text{赠}}}{\sqrt{\text{葬}_{\text{曾}}^{\text{圆}}\text{垣}\text{葬}_{\text{赠}}^{\text{圆}}\text{垣}\text{葬}_{\text{孔}}^{\text{圆}}}},\\ \text{糟糕}\gamma\ \text{越}\dfrac{\text{葬}_{\text{孔}}}{\text{渣}\ \text{渣}}\ \text{越}\dfrac{\text{葬}_{\text{孔}}}{\sqrt{\text{葬}_{\text{曾}}^{\text{圆}}\text{垣}\text{葬}_{\text{赠}}^{\text{圆}}\text{垣}\text{葬}_{\text{孔}}^{\text{圆}}}},\end{cases}$$

此即向量方向余弦的坐标表达式援由此易得出方向余弦所满足的关系式

摇摇糟糕α 垣糟糕β 垣糟糕γ 越员援

例 苑圆援摇已知点 粤(员,圆,猿),月(圆,员,原员),求向量$\overrightarrow{\text{粤月}}$的模及方向余弦援

解摇摇$\overrightarrow{\text{粤月}}$越{圆原员,员原圆,原员原猿}越{员,原员,原原},

摇摇 $\text{渣}\overrightarrow{\text{月}}\text{渣}$越$\sqrt{\text{员}^{\text{圆}}\text{垣}(\text{原员}^{\text{圆}}\text{垣}(\text{原原}^{\text{圆}}}$越$\text{猿}/\text{圆}$

摇摇糟糕α 越$\dfrac{\text{员}}{\text{猿}/\text{圆}}$越$\dfrac{\sqrt{\text{圆}}}{\text{远}}$,糟糕$\beta$ 越原$\dfrac{\sqrt{\text{圆}}}{\text{远}}$,糟糕$\gamma$ 越原$\dfrac{\text{圆}/\text{圆}}{\text{猿}}$援

与某向量的方向余弦成比例的一组实数 造,皂,灶,即

摇摇$\dfrac{\text{造}}{\text{糟糕}\alpha}$ 越$\dfrac{\text{皂}}{\text{糟糕}\beta}$ 越$\dfrac{\text{灶}}{\text{糟糕}\gamma}$

叫做该向量的方向数援

若已知某向量的一组方向数 造,皂,灶,则可求出该向量的方向余弦

摇摇糟糕α 越$\dfrac{\text{造}}{\text{依}\sqrt{\text{造}^{\text{圆}}\text{垣}\text{皂}^{\text{圆}}\text{垣}\text{灶}^{\text{圆}}}}$,

摇摇糟糕β 越$\dfrac{\text{皂}}{\text{依}\sqrt{\text{造}^{\text{圆}}\text{垣}\text{皂}^{\text{圆}}\text{垣}\text{灶}^{\text{圆}}}}$,

摇摇糟糕γ 越$\dfrac{\text{灶}}{\text{依}\sqrt{\text{造}^{\text{圆}}\text{垣}\text{皂}^{\text{圆}}\text{垣}\text{灶}^{\text{圆}}}}$援

注意上面三式应同时取正号或同时取负号援请读者自己证明援

苑圆源摇两向量的数量积

由物理学可知,一个物体在恒力 云(大小和方向均不变) 的作用下沿直线从点 酝$_{\text{员}}$移动到点 酝$_{\text{圆}}$,若以 杂表示位移$\overrightarrow{\text{酝}_{\text{员}}\text{酝}_{\text{圆}}}$,则力 云所做的功为

摇摇宰 越渣云渣杂渣糟糕约云,杂跃越渣云渣杂渣糟糕θ,

其中 θ 为向量 云与 杂的夹角援

以此为实际背景,我们引进两个向量的数量积援

定义 苑圆源摇向量 葬,遭的模及它们的夹角的余弦的乘积称为向量 葬与 遭的数量

积，记作 葬· 遭即

摇摇葬· 遭越灌葬灌灌遭灌糟糕(葬，遭) 援

数量积的记号中用一点“·”表示乘积，因此向量间的数量积也叫做向量间的点积或内积援

前面讲的功 宰就是 云与位移 杂的数量积，即

摇摇宰 越云· 杂援

对任意向量 葬，由于 葬· 葬越灌葬灌灌，因此通常记 葬· 葬越葬援

由数量积的定义可得

摇摇蚤越噪越噪 越员，蚤 躁越噪 噪越噪· 蚤越躁援

向量的数量积满足以下运算律：

(员) 交换律摇葬· 遭越遭· 葬；

(圆) 分配律摇 (葬垣遭)· 糟越葬· 糟垣遭· 糟；

(猿) 与数乘的结合律摇 (姿葬)· 遭越姿(葬· 遭) 越葬· (姿遭) (姿为常数) 援

由投影的表达式 孕谢糟越灌葬灌灌遭灌糟糕(葬，遭，

故摇摇摇葬· 遭越灌葬灌灌孕谢糟遭(葬) 圆，

或摇摇摇葬· 遭越灌遭灌灌孕谢糟葬(遭) 圆，

即两向量的点积等于一向量的模乘以另一向量在这向量 (设它是非零向量) 上的投影援

规定零向量与任何向量垂直援不难求出，两向量 葬，遭垂直，即 葬⊥遭→葬· 遭越员援

下面给出数量积的坐标表达式援

设 葬越葬曾垣葬赠垣葬则，遭越遭曾垣遭赠垣遭则由数量积的运算规律可得

摇摇葬· 遭越(葬曾垣葬赠垣葬则)· (遭曾垣遭赠垣遭则)

越葬曾遭曾垣(葬曾遭赠垣葬赠遭曾)垣葬则遭则垣(葬曾遭则垣葬则遭曾)垣葬赠遭赠

越葬曾遭曾垣葬赠遭赠垣葬则遭则，

即两个向量的数量积等于它们对应坐标乘积之和援

由于 葬· 遭越灌葬灌灌遭灌糟糕(葬，遭)，当 葬，遭均为非零向量时，可得两向量夹角的余弦的坐标表示式

$$\text{摇摇糟糕(葬，遭) 越} \frac{\text{葬· 遭}}{\text{灌葬灌灌遭灌}} \text{越} \frac{\text{葬曾遭曾垣葬赠遭赠垣葬则遭则}}{\sqrt{\text{葬曾垣葬赠垣葬则}}\cdot\sqrt{\text{遭曾垣遭赠垣遭则}}} \text{援}$$

由此，两向量相互垂直的充要条件是

摇摇葬· 遭越葬曾遭曾垣葬赠遭赠垣葬则遭则越员援

例 苑摇已知三点 粤(员，员，员)，月(圆，圆，员)，悦(圆，员，圆)，求 $\overrightarrow{粤月}$ 与 $\overrightarrow{粤悦}$ 的夹角 θ 援

解摇从已知得，$\overrightarrow{粤月}$ 越(员，员，园)，$\overrightarrow{粤悦}$ 越(员，园，员)，

于是摇摇糟糕θ 越$\dfrac{\overrightarrow{粤月}\cdot\overrightarrow{粤悦}}{\text{灌}\overrightarrow{粤月}\text{灌灌}\overrightarrow{粤悦}\text{灌}}$越员圆，

从而 θ 越$\dfrac{\pi}{猿}$援

例 苑圆圆缘摇已知向量 葬,遭的模 渣葬渣越圆,渣遭渣越员和它们的夹角 (葬^,遭) 越$\frac{\pi}{猿}$,求向量 粤越圆葬垣猿遭与向量 月越猿葬原遭的夹角援

解摇因 糟糕(粤^,月) 越$\frac{粤\cdot 月}{渣粤渣\ 渣月渣}$

摇摇粤·月越(圆葬垣猿遭)·(猿葬原遭)

越远(葬·葬)原圆(葬·遭)垣怨(遭·葬)原猿(遭·遭)

越远渣葬渣垣苑(葬·遭)原猿渣遭渣

越远伊圆圆垣苑伊圆伊员伊糟糕$\frac{\pi}{猿}$原猿伊员圆越圆恩援

同理 粤·粤越猿苑,故 渣粤渣越$\sqrt{猿苑}$,月·月越猿员,故 渣月渣越$\sqrt{猿员}$,因此

摇摇糟糕(粤^,月) 越$\frac{圆恩}{\sqrt{猿苑}\cdot\sqrt{猿员}}$越圆恩,摇 (粤^,月) ≈猿缘援

例 苑圆圆苑摇设有△粤月悦,三边长分别为 葬,遭糟(图 苑援恩),求证余弦定理

摇摇糟越葬圆垣遭原圆葬遭糟糕θ援

证

摇摇糟越粤月·粤月越(悦月原悦粤)·(悦月原悦粤)

越悦月·悦月垣悦粤·悦粤原圆悦月·悦粤

越葬圆垣遭原圆葬遭糟糕θ,

其中 θ 越(悦月^,悦粤),于是余弦定理得证援

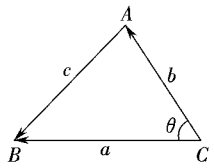

图 苑援恩摇例 苑圆圆苑图

我们看到,这里利用向量工具证明余弦定理,比中学三角里的方法来得简单援

苑圆圆缘摇两向量的向量积

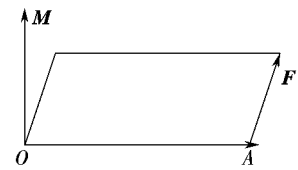

图 苑援恩摇力 云对点 韵的力矩

在力学中,我们学过力矩的概念援设有一根短棍,其一端 韵固定,另一端 粤受到力 云的作用援韵粤便绕点 韵转动 (图 苑援恩)援这时,力 云对点 韵的力矩是一个向量,记作酝援它的模等于以$\overrightarrow{韵粤}$及 云为两边的平行四边形的面积,即

摇摇酝越渣$\overrightarrow{韵粤}$渣 渣云渣酝(摇^$\overrightarrow{韵粤}$,云),

其方向垂直于$\overrightarrow{韵粤}$及 云,且当右手自$\overrightarrow{韵粤}$至 云的方向握住拳时,大拇指伸开的方向就是 酝的方向,即$\overrightarrow{韵粤}$,云,酝 成右手系援

像力矩这样由两个向量确定另一个向量的情况,在其他物理现象中也常遇到,于是把它抽象出来,得到二向量向量积的概念援

定义 苑圆圆缘摇两个向量 葬与 遭的向量积 (也称为叉积或外积) 是一个向量,记作 葬伊遭它的模为

摇摇 渣葬伊遭渣越渣葬渣遭渣酝(葬^,遭),

需要全本请访问 www.ertongbook.com