新世纪高等院校精品教辅

经 典 高 等 数 学

主摇编摇周摇南摇邬学军

浙江大學出版社

摇图书在版编目 ([illegible]) 数据

摇经典高等数学 [illegible] 周南，邬学军主编 [illegible]—杭州 浙江大学出版社，[illegible]
摇[illegible]

摇Ⅰ摇[illegible] 经 [illegible]摇Ⅱ摇[illegible] ①周 [illegible] ②邬 [illegible]摇Ⅲ摇[illegible] 高等数学 原高等学校 原自学参考资料摇Ⅳ摇[illegible]

摇中国版本图书馆 [illegible] 数据核字 ([illegible]) 第 [illegible] 号

内 容 简 介

摇摇本书是为帮助大学生学习高等数学而编著的学习指导书，其中的章节内容与同济大学编的《高等数学》第四版、五版配套 [illegible] 由于内容全面，也适用于其他版本的高等数学或微积分教材。每章包括内容提要、典型例题和自测题 [illegible] 题型有填空、选择、解答和证明题 [illegible] 题目深入浅出，循序渐进，部分选自历年考研试题。全书最后附有知识点总结以及大学高等数学期终考试模拟试卷，可供学生自测学习效果。

本书是大学生学习高等数学的良师益友，也可供准备考研的同学作系统复习时使用。

出版发行摇浙江大学出版社
([illegible]杭州浙大路 [illegible] 号摇邮政编码 [illegible])
([illegible])
(网址 [illegible])
责任编辑摇徐素君摇李晶
排　　版摇浙江大学出版社电脑排版中心
印摇摇刷摇浙江大学印刷厂
开摇摇本摇[illegible]
印摇摇张摇[illegible]
字摇摇数摇[illegible] 千字
版 印 次摇[illegible] 年 [illegible] 月第 [illegible] 版摇[illegible] 年 [illegible] 月第 [illegible] 次印刷
书摇摇号摇[illegible]
定摇摇价摇[illegible] 元

前摇摇言

高等数学是大学生一门重要的基础课程，目前，本科院校理工、经管、人文、外语、甚至艺术，几乎所有的专业都开设高等数学课程。对于大学生来说，这也是进入大学首先遇到的一门大课。为了帮助学生掌握、理解高等数学基础知识，掌握基本技能，我们组织了多年从事高等数学教学、具有高级职称的教师，针对教学的特点，结合自身多年的教学实践和教学经验，编写了本书。

本书按照专题分章编写，可作为高等数学的学习指导和习题课的教程。主要内容有：

一、内容提要。解析和总结本章所包含的知识要点和能力要求，使学生准确把握应该掌握的学习内容。

二、典型例题是本书的主要内容。在题型上，有填空题、选择题、计算题和证明题；在内容上，题目由浅入深，循序渐进，并有综合题和应用题，不但对知识点有较大的覆盖面，而且针对重点、难点安排多重训练；每章还选用了部分历年的考研试题。在解题前后，进行“方法点拨”，对解题思路加以简明扼要的解说，提出解题规律。

三、每章配有自测题，以帮助学生了解学习效果。每份试卷的编排难易结合，体现合理的科学梯度。

四、对高等数学知识点进行了总结，使学生对整个高等数学的思想体系有一个全面的了解。

五、按高等数学上、下册配有数份大学高等数学期终考试试卷，使学生对自己的学习效果作一个全面的检测。

本书的参编人员是：周南（第一、二、八章），邬学军（第三、四章），程小力（第五、六章），卓文新（第七、十一章），陆建芳（第九章），许红娅（第十、十二章）。模拟试卷和高等数学知识点结构由周南和邬学军编写。全书由周南、邬学军统稿并审校。

本书的编写还得到方照琴、周明华、李永琪、寿华好等几位教师的帮助和指点，在此表示衷心的感谢。

编者恳切希望广大读者能指出本书的不足之处，提出积极的建议，使之不断完善。

编者

圆园园源年 愿月

目 录

目摇摇录

第一章　函数与极限

内容提要

一、函数

员郾函数的定义

圆郾函数的几条重要特性

（员）有界性 摇 设函数 枣（曾）的定义域为 阅，数集 载⊂阅，如果存在正数 酝，对任一曾∈载，有渣枣（曾）渣≤酝，则称函数 枣（曾）在 载上有界援

（圆）单调性

（猿）奇偶性

（源）周期性

猿郾复合函数、基本初等函数、初等函数的概念

二、极限的概念

员郾数列极限 造蚤皂 曾灶 越葬 的定义（灶→肆）

对数列｛曾灶｝，如果存在常数 葬，对任意给定的正数 ε（不论它多么小），存在正整数 晕，使得当 灶跃晕时，不等式 渣曾灶 原葬渣约ε 都成立，称 葬是数列｛曾灶｝的极限或称数列｛曾灶｝收敛于 葬援用 ε鄄晕语言描述，即

造蚤皂 曾灶 越葬⇒ 对∀ε 跃园 ∃ 正整数 晕，当 灶跃晕时，有（灶→肆）

渣曾灶 原葬渣约ε

圆郾函数极限的定义

（员）造蚤皂 枣（曾）越粤⇒ 对∀ε 跃园 ∃δ 跃园 当 园约渣曾原曾园渣约δ 时，有（曾→曾园）

渣枣（曾）原粤渣约ε

（圆）造蚤皂 枣（曾）越粤⇒ 对∀ε 跃园 ∃载 跃园 当 渣曾渣跃载时，有（曾→肆）

渣枣（曾）原粤渣约ε

3. 左、右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$

4. 极限存在的充分必要条件

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 且 } \lim_{x\to x_0^-}f(x)=A$$

$$\lim_{x\to \infty}f(x)=A\Leftrightarrow \lim_{x\to +\infty}f(x)=\lim_{x\to -\infty}f(x)=A$$

5. 无穷大与无穷小的概念

三、极限的性质

1. 极限的惟一性
2. 收敛数列的有界性与函数极限的局部有界性
3. 函数极限的局部保号性
4. 函数极限与数列极限的关系

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，数列 $\{x_n\}$ 在 $f(x)$ 的定义域内，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，则

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{x\to x_0}f(x)$$

利用这一性质，我们可以用求函数极限的方法来求数列的极限.

5. 函数极限与无穷小的关系

$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 α 在 x 同一变化过程中是无穷小，即 $\lim\alpha=0$.

四、极限的计算

1. 应用极限运算法则
2. 分别计算左、右极限
3. 利用极限存在准则（夹逼准则和单调有界准则）
4. 利用两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

5. 利用复合函数求极限法则，作变量代换
6. 利用等价无穷小

设无穷小 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$.

熟记下列常用的等价无穷小：

设在某变化趋势下，α 为无穷小，则有

α ～ 泽蚤灶α ～ 贼葬灶α ～ 葬则糟泽蚤灶α ～ 葬则糟贼葬灶α

员原糟燥泽α ～ $\frac{\alpha^{圆}}{圆}$；摇摇藻$^{\alpha}$ 原员～ α，葬$^{\alpha}$ 原员～ α造灶葬

造灶(员垣α) ～ α；摇摇 $\sqrt[灶]{员垣\alpha}$ 原员～ $\frac{\alpha}{灶}$

五、函数的连续

员援函数 赠越枣(曾) 在点 曾$_{园}$连续的定义

$\lim\limits_{曾\to曾_{园}}$ 枣(曾) 越枣(曾$_{园}$) 或 $\lim\limits_{\Delta曾\to园}$ Δ赠越园，其中 Δ曾越曾原曾$_{园}$，Δ赠越枣(曾$_{园}$ 垣Δ曾) 原枣(曾$_{园}$)

圆援赠越枣(曾) 在 曾$_{园}$点连续的三个必要条件

(员) 枣(曾) 在 曾越曾$_{园}$有定义，其值为 枣(曾$_{园}$)援

(圆) $\lim\limits_{曾\to曾_{园}}$ 枣(曾) 存在援

(猿) 极限与定义相等，即 $\lim\limits_{曾\to曾_{园}}$ 枣(曾) 越枣(曾$_{园}$)援

猿援函数的间断点

设 枣(曾) 在 曾$_{园}$的某去心邻域内有定义，若以上三个必要条件至少有一个不成立，则 枣(曾) 在 曾$_{园}$点不连续，曾$_{园}$称为 枣(曾) 的间断点援间断点可分为两类：

第一类：(员) 可去间断点：$\lim\limits_{曾\to曾_{园}}$ 枣(曾) 存在援

(圆) 跳跃间断点：$\lim\limits_{曾\to曾_{园}^{原}}$ 枣(曾) 与 $\lim\limits_{曾\to曾_{园}^{垣}}$ 枣(曾) 都存在，但不相等援

第二类：不是第一类间断点的任何间断点援

特别地，若 $\lim\limits_{曾\to曾_{园}}$ 枣(曾) 越肄(或 垣肄，原肄)，称 曾$_{园}$为无穷间断点援

源援初等函数在其定义区间内是连续的

六、闭区间上连续函数的性质

设 枣(曾) 在 [葬，遭] 上连续，则

(员) 枣(曾) 在 [葬，遭] 上有界援

(圆) 枣(曾) 在 [葬，遭] 上有最大值和最小值援

(猿) 零点定理：若 枣(葬)·枣(遭) 约园，则至少有一点 $\xi \in$ (葬，遭)，使 枣(ξ) 越园援

(源) 介值定理：枣(曾) 必可取到介于最大值和最小值之间的任何值援

典型例题

例 员援摇 填空题 摇

(员) 已知 枣(曾) 越 $\frac{员}{员垣曾}$,则 枣[枣(曾)] 的定义域是__________援

(圆) 已知 $\lim\limits_{曾\to员}\frac{曾^{圆}垣葬曾垣糟}{曾原员}$ 越缘,则 葬越__________,糟越__________援

(猿) $\lim\limits_{灶\to肄}(\frac{灶原圆}{灶垣员})^{灶}$ 越__________援

(源) 曲线 赠越$\frac{藻^{曾}}{曾原员}$有渐近线__________援

(缘) 已知 枣(曾) 越 $\begin{cases}\frac{员原藻^{葬曾}}{泽蚤灶曾} & 曾跃园 \\ 葬藻^{曾} & 曾\leqslant 园\end{cases}$ 摇 在 曾越园点连续,则 葬越__________援

(远) 函数 赠越$\frac{曾原圆}{远辕(渣曾原员渣)}$的可去间断点是__________援

解 (员) 曾≠ 原员,曾≠ 原圆援摇 这是由于 枣[枣(曾)] 越$\frac{员}{员垣枣(曾)}$,故应用 枣(曾) ≠ 原员,即 曾 ≠ 原圆援

(圆) 葬越猿,糟越原源援摇 由条件 $\lim\limits_{曾\to员}(曾^{圆}垣葬曾垣糟)$ 越员垣葬垣糟越园,葬 越原糟原员,曾^圆垣葬曾垣糟越曾^圆 原(糟垣员) 曾垣糟越 (曾原员) (曾原糟),原极限可化为

$\lim\limits_{曾\to员}$(曾原糟) 越员原糟越缘,所以 糟越原源援

(猿) 藻^原猿援摇 化为重要极限 Ⅱ 的形式

$$\lim\limits_{灶\to肄}(\frac{灶原圆}{灶垣员})^{灶} 越\lim\limits_{灶\to肄}(员垣\frac{原猿}{灶垣员})^{\frac{灶垣员}{原猿}\cdot(原猿)\frac{灶}{灶垣员}} 越藻^{原猿}$$

(源) 由于$\lim\limits_{曾\to员}\frac{藻^{曾}}{曾原员}$越肄,有铅直渐近线 曾越员;$\lim\limits_{曾\to肄}\frac{藻^{曾}}{曾原员}$越$\lim\limits_{曾\to肄}\frac{员}{藻^{曾}(曾原员)}$越园有水平渐近线 赠越园援

(缘) 葬越原员援摇 分段函数需讨论左、右极限援

$$\lim\limits_{曾\to园^{原}}枣(曾) 越\lim\limits_{曾\to园^{原}}葬藻^{曾} 越葬越枣(园)$$

$$\lim\limits_{曾\to园^{垣}}枣(曾) 越\lim\limits_{曾\to园^{垣}}\frac{员原藻^{葬曾}}{泽蚤灶曾}越\lim\limits_{曾\to园^{垣}}\frac{原葬曾}{曾}越原员$$

因 枣(曾) 在 曾越园连续,$\lim\limits_{曾\to园^{垣}}枣(曾)$ 越$\lim\limits_{曾\to园^{原}}枣(曾)$ 越枣(园),故 葬越原员援

(远) 曾越员,曾越园援摇 枣(曾) 的间断点是 曾越园,员,圆,其中

$\underset{曾\to园}{遭皂}\dfrac{曾原圆}{逝扯渣曾原员渣}$越肄，故 曾越园是无穷间断点援

曾→员时，逝扯渣曾原员渣→原肄，因此 $\underset{曾\to员}{遭皂}\dfrac{曾原圆}{逝扯渣曾原员渣}$越园，极限存在援

曾→圆时，$\underset{曾\to圆}{遭皂}\dfrac{曾原圆}{逝扯渣曾原员渣}$越$\underset{曾\to圆}{遭皂}\dfrac{曾原圆}{逝扯[员垣(曾原圆)]}$越员援

这是由于 曾→圆时援可视 曾原员跃园而当 曾→圆时，曾原圆为无穷小援利用等价无穷小，知极限存在援故 曾越员，曾越圆是可去间断点援

例 员援猿 摇选择题 摇

(员) 对任意的 园约ε约员，总存在正整数 晕，当 灶≥晕时，恒有 渣曾灶原葬渣≤ε，是数列{曾灶}收敛于 葬的 (摇)

粤援充分但非必要条件 摇摇摇摇 月援必要但非充分条件

悦援充分必要条件 阅援非充分非必要条件

(圆) 下列极限中正确的是 (摇)

粤援$\underset{曾\to园}{遭皂}$曾泽蚤灶$\dfrac{员}{曾}$越员 月援$\underset{灶\to肄}{遭皂}\dfrac{泽蚤灶灶}{灶}$越员

悦援$\underset{灶\to肄}{遭皂}$圆灶泽蚤灶$\dfrac{员}{圆灶}$越员 阅援$\underset{曾\to肄}{遭皂}\dfrac{泽蚤灶\frac{员}{曾}}{曾}$越员

(猿) 曲线 赠越$\dfrac{员垣藻^{曾}}{员原藻^{曾}}$ (摇)

粤援只有一条水平渐近线 摇月援有一条铅直渐近线，无水平渐近线

悦援各有一条水平和铅直渐近线 摇阅援有三条渐近线

(源) 当 曾→园时，逝扯(员原曾) 原泽蚤灶曾是 曾的 (摇)

粤援高阶无穷小 月援低阶无穷小

悦援等阶无穷小 阅援同阶但非等价无穷小

(缘) 曾越园是函数 赠越$\dfrac{员垣藻^{员/曾}}{员原藻^{员/曾}}$葬则糟贼葬灶$\dfrac{员}{曾}$的 (摇)

粤援可去间断点 月援跳跃间断点

悦援无穷间断点 阅援振荡间断点

(远) 设 枣(曾) 越$\begin{cases}\sqrt{渣曾渣}泽蚤灶\dfrac{员}{曾^{圆}} & 曾\neq园 \\ 园 & 曾越园\end{cases}$在 曾越园处 (摇)

粤援极限不存在 月援极限存在但不连续

悦援连续，左右极限存在 阅援连续，但左右极限不存在

经典高等数学

解 (员) 悦摇 这是数列极限的定义援

(圆) 悦摇 造皂灶→肄 圆灶泽蚤灶 员/圆灶 越 造皂灶→肄 泽蚤灶 员/圆灶 / 员/圆灶 越员援 其余极限均为有界函数与无穷小的积,应为 园援

(猿) 阅摇 易见 曾越园是铅直渐近线援

对于指数函数,当其指数趋于 肄 时,要分别考虑 原肄 与 垣肄援 造皂曾→垣肄 藻 越垣肄,

造皂曾→原肄 藻 越园 由于 造皂曾→垣肄 员垣藻/员原藻 越员,但 造皂曾→原肄 员垣藻/员原藻 越 造皂曾→原肄 藻 垣员/藻 原员 越原员援

故分别有两条水平渐近线 赠越员和 赠越原员援

(源) 阅摇 由于 摇 造皂曾→园 造灶(员原曾) 原泽蚤灶曾/曾 越造皂曾→园(造灶(员原曾)/曾 原 泽蚤灶曾/曾)

越造皂曾→园 原曾/曾 原员 越原员

因此与 曾同阶援

(缘) 粤摇 由于 摇 造皂曾→园垣 藻 越垣肄,造皂曾→园垣 葬则糟贼葬灶 员/曾 越 π/圆

造皂曾→园原 藻 越园 造皂曾→园原 葬则糟贼葬灶 员/曾 越原 π/圆

因此 造皂曾→园垣 员垣藻/员原藻 葬则糟贼葬灶 员/曾 越 (原员) · π/圆 越原 π/圆

造皂曾→园原 员垣藻/员原藻 葬则糟贼葬灶 员/曾 越员·(原 π/圆)

左、右极限相等,故 曾越园为可去间断点援

(远) 悦摇 造皂曾→园 枣(曾) 越造皂曾→园 √渣曾渣 泽蚤灶 员/曾 越枣(园) 援其中 √渣曾渣 是无穷小,泽蚤灶 员/曾 是有界函数,并符合函数连续的定义援

解答题

解答题在解题过程中要有清晰的思路、完整的步骤,表现出对问题的准确理解和正确的解题过程,而不同于填空和选择题,存在着“猜”和“蒙”的倾向援

例 员援圆援摇 设 枣(曾) 越曾 垣圆曾造皂曾→员 枣(曾) 援已知 造皂曾→员 枣(曾) 存在,求 枣(曾) 援

解 由于 造皂曾→员 枣(曾) 存在,设 造皂曾→员 枣(曾) 越粤是一常数,从而 枣(曾) 越曾 垣圆粤曾是二次函数,

由连续性 造皂曾→员 枣(曾) 越员垣圆粤

又因为遭皂$_{曾→员}$枣(曾) 越粤

从而 员垣圆粤 越粤，粤越原员，枣(曾) 越曾^{圆} 原圆曾

注意 摇 此题并不难，只要认识到函数的极限是常数，就可解得援

例 员援猿 摇 已知数列 曾$_{灶}$ 越$\frac{葬^{灶}灶!}{灶^{灶}}$摇 (葬≠ 园)，求遭皂$_{灶→肆}$$\frac{曾_{灶垣员}}{曾_{灶}}$援

解 遭皂$_{灶→肆}$$\frac{曾_{灶垣员}}{曾_{灶}}$ 越遭皂$_{灶→肆}$$\frac{葬^{灶垣员}(灶垣员)!}{(灶垣员)^{灶垣员}}$·$\frac{灶^{灶}}{葬^{灶}灶!}$

越遭皂$_{灶→肆}$葬·$\frac{灶^{灶}}{(灶垣员)^{灶}}$ 越遭皂$_{灶→肆}$葬·$\left(\frac{灶}{灶垣员}\right)^{灶}$

越遭皂$_{灶→肆}$$\frac{葬}{\left(员垣\frac{员}{灶}\right)^{灶}}$ 越$\frac{葬}{藻}$

注意 摇 这里特别容易犯的错误是认为遭皂$_{灶→肆}$$\frac{灶^{灶}}{(灶垣员)^{灶}}$ 越员，而没注意到这是一个重要极限援

例 员援源 摇 计算下列极限：

(员) 遭皂$_{曾→员}$$\frac{曾^{灶}原员}{曾原员}$摇摇摇摇摇摇摇 (圆) 遭皂$_{曾→垣肆}$ ($\sqrt{曾^{圆}垣曾}$原$\sqrt{曾^{圆}原曾}$)

(猿) 遭皂$_{曾→垣肆}$ (泽蚤灶$\sqrt{曾垣员}$原泽蚤灶$\sqrt{曾原员}$)

(源) 遭皂$_{灶→肆}$$\frac{灶^{噪}}{葬^{灶}}$摇 (葬跃员) 摇摇摇摇 (缘) 遭皂$_{曾→垣肆}$$\frac{造灶(曾^{圆}垣猿曾垣员)}{造灶(曾^{圆园}垣曾^{缘}垣员)}$

(远) 遭皂$_{灶→肆}$$\sqrt[灶]{葬}$摇 (葬≠ 园)

解 (员) 去零因子 (曾原员) 援由 曾^{灶} 原员越 (曾原员) (曾^{灶原员} 垣曾^{灶原圆} 垣… 垣员)

所以 遭皂$_{曾→员}$$\frac{曾^{灶}原员}{曾原员}$越遭皂$_{曾→员}$(曾^{灶原员} 垣曾^{灶原圆} 垣… 垣员) 越灶

(圆) 这是 肆 原肆 型援先将分子有理化，化为$\frac{肆}{肆}$型，再去无穷因子 曾援

$$遭皂_{曾→垣肆} (\sqrt{曾^{圆}垣曾}原\sqrt{曾^{圆}原曾}) 越遭皂_{曾→垣肆}\frac{圆曾}{\sqrt{曾^{圆}垣曾}垣\sqrt{曾^{圆}原曾}}$$

$$越遭皂_{曾→垣肆}\frac{圆}{\sqrt{员垣\frac{员}{曾}}垣\sqrt{员原\frac{员}{曾}}} 越员$$

此题建议读者考虑：当 曾→原肆 时的极限与此有何不同援

(猿) 这里 遭皂$_{曾→垣肆}$泽蚤灶$\sqrt{曾垣员}$与 遭皂$_{曾→垣肆}$泽蚤灶$\sqrt{曾原员}$均不存在，但并不能断定所示极限不存在援

利用三角函数的和差化积：

经典高等数学

摇摇摇 進皂(澤灶√曾垣员原澤灶√曾原员)

越 進皂 圆澤灶 √曾垣员原√曾原员/圆 糟燥泽 √曾垣员垣√曾原员/圆

由 摇摇 進皂(√曾垣员原√曾原员) 越 進皂 圆/(√曾垣员垣√曾原员) 越园

所以 摇 進皂 澤灶 √曾垣员原√曾原员/圆 越园，而 糟燥泽 √曾垣员垣√曾原员/圆 是有界函数，从而这是无穷小量与有界函数之积，极限为 园援

(源) 因为 葬跃员，故可设 葬越员垣λ，λ 跃园，从而

摇摇摇摇摇 進皂 灶/葬 越 進皂 灶/(员垣λ)灶

越 進皂 灶/(员垣灶λ 垣 灶(灶原员)/圆 λ圆 垣… 垣λ灶) 越园

(缘) 進皂 (进(曾圆 垣猿曾垣员)) / (进(曾圆 垣曾 垣员)) 越 進皂 进[曾圆(员垣猿/曾 垣员/曾圆)] / 进[曾圆(员垣员/曾 垣员/曾圆)]

越 進皂 (圆进曾垣进(员垣猿/曾 垣员/曾圆)) / (圆进曾垣进(员垣员/曾 垣员/曾圆)) 越 员/缘

注意 摇 (源)，(缘) 两题都是利用去无穷因子来计算，只有当我们熟练以后，才可以直接较快地得出结论援

(远) 進皂 灶√葬 越 進皂 葬员/灶 越葬园 越员援

这里用到的是复合函数求极限的法则援以上各题都是利用极限运算法则来计算的援

例 员援缘 摇 设 枣(曾) 越 (源曾猿 垣猿曾)/(曾原员) 垣葬曾垣遭，已知 進皂 枣(曾) 越园，求 葬，遭的值援

解 進皂 枣(曾) 越 進皂 (源曾猿 垣猿曾垣葬曾(曾原员))/(曾原员) 垣遭

越 進皂 ((源垣葬)曾圆 原(葬原猿)曾)/(曾原员) 垣遭越园

则应该有 進皂 ((源垣葬)曾圆 原(葬原猿)曾)/(曾原员) 越原遭为常数援分式中，分子、分母的无穷因子应为同次幂，所以 摇摇摇摇摇源垣葬越园，葬越原源

遭皂枣(曾) 越遭皂 $\frac{源曾垣猿}{曾原员}$ 垣遭越源垣遭越园 遭越原原
曾→肄 曾→肄

例 员援缘 摇 计算极限遭皂枣(曾)，其中
曾→园

(员) 枣(曾) 越 $\frac{泽蚤灶曾}{渣曾渣}$ 摇摇摇摇摇 (圆) 枣(曾) 越 { 藻^{员/曾}, 曾约园 ; 园曾垣葬, 曾≥园 }

解 (员) 因为 摇 遭皂 $\frac{泽蚤灶曾}{渣曾渣}$ 越遭皂 $\frac{泽蚤灶曾}{曾}$ 越员
曾→园垣 曾→园垣

遭皂 $\frac{泽蚤灶曾}{渣曾渣}$ 越遭皂 $\frac{泽蚤灶曾}{原曾}$ 越原员
曾→园原 曾→园原

所以遭皂枣(曾) 不存在援
曾→园

(圆) 遭皂枣(曾) 越遭皂藻^{员/曾} 越园，遭皂枣(曾) 越遭皂(园曾垣葬) 越葬援
曾→园原 曾→园原 曾→园垣 曾→园垣

所以当 葬越园时，遭皂枣(曾) 越园；葬≠ 园时，极限不存在援
曾→园

例 员援远 摇 计算极限遭皂曾灶：
灶→肄

(员) 曾灶 越 灶√(圆灶垣猿灶)

(圆) 曾灶 越 $\frac{员}{灶^{圆}垣员}$ 垣 $\frac{圆}{灶^{圆}垣圆}$ 垣 $\frac{猿}{灶^{圆}垣猿}$ 垣… 垣 $\frac{灶}{灶^{圆}垣灶}$

解 (员) 因为 摇 灶√猿灶 约曾灶 约灶√(圆·猿灶)，而灶√猿灶 越猿，所以

遭皂 灶√(圆·猿灶) 越遭皂猿·灶√圆越猿·员越猿
灶→肄 灶→肄

故由夹逼定理 遭皂曾灶 越猿
灶→肄

(圆) 令 摇 赠灶 越 $\frac{员}{灶^{圆}垣灶}$ 垣 $\frac{圆}{灶^{圆}垣灶}$ 垣… 垣 $\frac{灶}{灶^{圆}垣灶}$ 越 $\frac{\frac{员}{圆}灶(灶垣员)}{灶^{圆}垣灶}$

扎灶 越 $\frac{员}{灶^{圆}垣员}$ 垣 $\frac{圆}{灶^{圆}垣员}$ 垣… 垣 $\frac{灶}{灶^{圆}垣员}$ 越 $\frac{\frac{员}{圆}灶(灶垣员)}{灶^{圆}垣员}$

则有 摇 赠灶 约曾灶 约扎灶

遭皂赠灶 越遭皂 $\frac{\frac{员}{圆}灶(灶垣员)}{灶^{圆}垣灶}$ 越遭皂 $\frac{员灶^{圆}垣灶}{圆灶^{圆}垣灶}$ 越 $\frac{员}{圆}$
灶→肄 灶→肄 灶→肄

遭皂扎灶 越遭皂 $\frac{\frac{员}{圆}(灶^{圆}垣灶)}{灶^{圆}垣员}$ 越 $\frac{员}{圆}$
灶→肄 灶→肄

从而 摇 $\underset{灶\to肆}{遭皂}曾_{灶}越\frac{员}{圆}$

例 员援猿摇 $曾_{员}越\frac{员}{圆}(葬垣\frac{圆}{葬})$ 摇 (葬跃园)，$曾_{灶垣员}越\frac{员}{圆}(曾_{灶}垣\frac{圆}{曾_{灶}})$ 摇 (灶越员，圆，…)援

证明 数列 $\{曾_{灶}\}$ 收敛，并求 $\underset{灶\to肆}{遭皂}曾_{灶}$援

证 对所有的 灶，摇 $曾_{灶垣员}越\frac{员}{圆}(曾_{灶}垣\frac{圆}{曾_{灶}})\geqslant\sqrt{曾_{灶}\cdot\frac{圆}{曾_{灶}}}越\sqrt{圆}$

$$曾_{灶垣员}原曾_{灶}越\frac{员}{圆}(曾_{灶}垣\frac{圆}{曾_{灶}})原曾_{灶}越\frac{圆原曾_{灶}^{圆}}{圆曾_{灶}}$$

由上面的不等式知 $曾_{灶}\geqslant\sqrt{圆}$，从而 $曾_{灶垣员}原曾_{灶}\leqslant园$，$曾_{灶垣员}\leqslant曾_{灶}$，数列 $\{曾_{灶}\}$ 单调下降，有下界 $\sqrt{圆}$，由极限存在准则，数列 $\{曾_{灶}\}$ 收敛，$\underset{灶\to肆}{遭皂}曾_{灶}$ 存在，设其为 曾，则 $\underset{灶\to肆}{遭皂}曾_{灶垣员}越曾$援

又 $$\underset{灶\to肆}{遭皂}曾_{灶垣员}越\underset{灶\to肆}{遭皂}\frac{员}{圆}(曾_{灶}垣\frac{圆}{曾_{灶}})越\frac{员}{圆}(曾垣\frac{圆}{曾})$$

所以有 $$曾越\frac{员}{圆}(曾垣\frac{圆}{曾})$$

解得 曾越依$\sqrt{圆}$，摇 因为 $曾_{灶}$ 跃园，由极限的保号性，则 $\underset{灶\to肆}{遭皂}曾_{灶}越\sqrt{圆}$援

例 员援源摇 已知 $\underset{曾\to肆}{遭皂}(\frac{曾垣葬}{曾原葬})^{曾}越怨$，求常数 葬援

解 这是 员^{肆} 型极限，故考虑重要极限 Ⅱ援

$$\underset{曾\to肆}{遭皂}(\frac{曾垣葬}{曾原葬})^{曾}越\underset{曾\to肆}{遭皂}[(员垣\frac{圆葬}{曾原葬})^{\frac{曾原葬}{圆葬}}]^{\frac{圆葬曾}{曾原葬}}越藻^{圆葬}$$

由条件 $藻^{圆葬}越怨$，葬越造灶猿

例 员援缘摇 计算极限：

(员) $\underset{曾\to园}{遭皂}[员垣造灶(员垣曾)]^{\frac{圆}{曾}}$ 摇摇摇 (圆) $\underset{灶\to肆}{遭皂}(\frac{\sqrt[灶]{葬}垣\sqrt[灶]{遭}}{圆})^{灶}$

解 这两个极限都是 员^{肆} 型，因此利用重要极限 Ⅱ援

(员) 摇摇摇摇摇摇 $\underset{曾\to园}{遭皂}[员垣造灶(员垣曾)]^{\frac{圆}{曾}}$

摇摇摇摇摇摇摇 越$\underset{曾\to园}{遭皂}([员垣造灶(员垣曾)]^{\frac{员}{造灶(员垣曾)}})^{\frac{圆造灶(员垣曾)}{曾}}$

因为 $$\underset{曾\to园}{遭皂}\frac{圆造灶(员垣曾)}{曾}越圆，\underset{曾\to园}{遭皂}[员垣造灶(员垣曾)]^{\frac{员}{造灶(员垣曾)}}越藻$$

所以 原式 越$藻^{圆}$

(圆) 摇摇摇摇摇 $\underset{灶\to肆}{遭皂}(\frac{\sqrt[灶]{葬}垣\sqrt[灶]{遭}}{圆})^{灶}越\underset{灶\to肆}{遭皂}(员垣\frac{\sqrt[灶]{葬}垣\sqrt[灶]{遭}原圆}{圆})^{灶}$

越逭皂[(员垣 灶√葬垣灶√遭原圆 / 圆)] 灶→肄

上式括号中的极限为 藻只需求出指数函数的极限援

摇摇摇摇摇 逭皂 灶→肄 (灶√葬垣灶√遭原圆)/圆 · 灶越 员/圆 逭皂 灶→肄 [(葬 员/灶 原员)垣(遭 员/灶 原员)] / (员/灶)

越 员/圆 (逭皂 灶→肄 (葬 员/灶 原员)/(员/灶) 垣逭皂 灶→肄 (遭 员/灶 原员)/(员/灶))

越 员/圆 (造灶葬垣造灶遭) 越造灶 √葬遭

这里利用了等价无穷小，当 曾→ 园时，葬 曾 原员～ 曾造灶葬援

所以 摇摇 原式 越藻 造灶√葬遭 越 √葬遭

例 员援员源摇 计算下列极限：

(员) 逭皂 曾→肄 (曾 圆 垣员)/(曾原员) 泽蚤灶 员/曾 摇摇摇摇摇摇 (圆) 逭皂 曾→园垣 (员原 √糟燥泽曾)/(曾(员原糟燥泽 √曾))

(猿) 逭皂 曾→员 (造灶糟燥泽(曾原员))/(员原泽蚤灶 π/圆 曾) 摇摇摇摇摇摇 (源) 逭皂 曾→园 (猿√员原圆曾 垣猿泽蚤灶 猿 曾 原员)/(曾糟燥泽曾)

解 (员) 这是 肄 · 园型，一般可化为 园/园 或 肄/肄 型援

逭皂 曾→肄 (曾 圆 垣员)/(曾原员) 泽蚤灶 员/曾 越逭皂 曾→肄 (曾垣 员/曾)/(曾原员) · 曾泽蚤灶 员/曾

越逭皂 曾→肄 (员垣 员/曾 圆)/(员原 员/曾) · (泽蚤灶 员/曾)/(员/曾) 越员· 圆越圆

(圆) 这是 园/园 型，需要找到合适的等价无穷小来求解援

逭皂 曾→园垣 (员原 √糟燥泽曾)/(曾(员原糟燥泽 √曾)) 越逭皂 曾→园垣 (员原糟燥泽曾)/(曾 · 员/圆 (√曾) 圆 (员垣 √糟燥泽曾))

越 lim 曾圆/曾圆 · 员/(员垣 √精曾) 越 员/圆

(猿) 当 曾→员 (曾原员) 为无穷小，故令 曾原员 越贼援

摇摇摇 原式 越 lim(贼→园) 造贼/(员原泽蚤灶 π/圆 (员垣贼)) 越 lim(贼→园) 造[员垣 (精贼原员)]/(员原糟燥泽 π/圆 贼)

越 lim(贼→园) (精贼原员)/(员原糟燥泽 π/圆 贼) 越 lim(贼→园) (原 贼/圆)/(员/圆 (π/圆 贼)圆) 越原 源/π圆

(源) 利用等价无穷小 曾蚤灶曾 ~ 猿曾援

猿√(员原圆曾 垣泽曾) 原员 ~ 员/猿 (原圆曾 垣泽曾)，

因此 原式 越 lim(曾→园) 员/猿 (原圆曾 垣泽曾)/猿曾

越原 圆/怨 垣 员/猿 lim(曾→园) 泽曾/曾 越原 圆/怨

例 员援猿援 已知 lim(曾→园) 造(员垣 枣曾/泽曾)/(圆曾 原员) 越猿，求 lim(曾→园) 枣曾/曾援

解 因为 曾→园 时，圆曾 原员→园，因此 造(员垣 枣曾/泽曾) 是与 (圆曾 原员) 同阶的无穷小援

造(员垣 枣曾/泽曾) ~ 枣曾/泽曾 ~ 枣曾/曾

因此利用等价无穷小有 摇 原式 越 lim(曾→园) (枣曾/曾)/(曾造圆) 越 lim(曾→园) 枣曾/曾 · 员/造圆 越猿

所以 摇摇摇摇 lim(曾→园) 枣曾/曾 越猿造圆

例 员援源援 讨论函数 枣曾 的连续性及间断点的类型援

(员) 枣曾 越 (曾 原曾)/(渣曾渣(曾 原员))

摇