上海市教育委员会组编

近代高等数学引论

（下册）

朱正佑　编

上海大学出版社
·上海·

内容提要

本教材是“上海市教委高校重点教材建设项目”的研究成果，是高等院校的高等数学课程的一种要求较高的教材。全书分上、下两册，下册包括级数理论、空间解析几何、多元函数的微分学和积分学，以及常微分方程。

本书采用了 Banach 空间的观点讲述了函数序列和函数级数中的一致收敛性和平均收敛性的概念；采用了内积空间的观点讲述了三角级数的均方收敛性和一致收敛性；在曲面积分和曲线积分的阐述中强调了有关的力学和物理的背景和一些重要公式的物理意义；用压缩映像的原理证明了微分方程初值问题解的存在惟一性。

本书观点先进，内容适中，深入浅出，便于自学，可作为理工科大学和师范院校对数学要求较高的专业的高等数学教材，也可作为一般专业学习高等数学和数学专业学习数学分析时的教学参考书。

近代高等数学引论

（下册）

朱正佑　编

上海大学出版社出版发行

（上海市上大路 99 号　邮政编码 200436）

（E-mail：sdcbs@citiz.net　发行热线 66135110）

出版人：姚铁军

*

南京展望文化发展有限公司排版

江苏句容排印厂印刷　各地新华书店经销

开本：890×1240　1/32　印张：15.5　字数：469 千

2004 年 8 月第 1 版　2004 年 8 月第 1 次印刷

印数：1～2 100

定价：48.00 元（共两册）

序　言

当前已经出版了许多种的高等数学教材，这些教材在大学的各类数学教学中起着重要的作用。人类自进入21世纪以来，科学技术获得了前所未有的飞速发展，这使得在许多学科领域如物理学、计算机科学、生命科学、材料科学和通信技术学科等领域中对高等数学的教学提出了更高的要求。高等数学的教学不仅仅是要求学生能掌握必要的基本知识和基本技巧，更重要的是要求学生能掌握高等数学中处理问题的思想方法，培养学生解决问题的能力，其中包括培养学生具有一定的抽象能力和严格的逻辑推理能力，也就是说高等数学的教学不仅仅是要传授知识，更重要的是要提高学生的整体数学素质。根据大学一些专业对高等数学的这一更高的要求，目前出版了一些如"工科数学分析"类型的教材。本教材是在编写者多年从事数学教学的基础上，根据对一些专业关于高等数学要求的调研和教学实践而编写出的一本教材。本教材是对高等数学有较高要求，但又不是数学分析的一种高等数学教科书。

本教材有以下一些基本特色：

1. 十分重视对基本概念的阐述，不仅使用一些例子来说明和验证定义，而且引导学生如何用严格的数学方法去正确地刻画事物的特定性质，从而给出合理的定义。

2. 在定理和结论的阐述中，尽量从问题出发，不仅重视定理的严格逻辑推导和定理的应用，还重视定理结论的直观猜测和发现过程。

3. 本书的内容虽然没有超出一般高等数学教学大纲范围，但是尽可能地采用近代数学中的观点和方法来阐述高等数学中的基本内容。

4. 实数理论虽然不是高等数学研究的主题，但是没有实数理论支

撑的高等数学就像是沙滩上的建筑，缺少坚固理论基础。本书以很少量的篇幅对实数理论作了通俗的介绍。这种做法，既能使初学者不致困惑于实数理论这一难点之中，又能使学者得到必要的抽象思维的训练和逻辑推理能力的训练。

5. 本教材重视基本概念之间和重要结论之间的比较，尽可能地对比它们之间的差异，通过这种对比，启发读者独立思考。

本教材尽可能做到深入浅出，便于自学，这是本书的又一特点。

本书中，打“＊”的内容是高等数学的进一步要求，初学者可跳过这部分内容。

自 17 世纪牛顿创建微积分以来，通过 18 世纪在应用方面的重大发展和 19 世纪奠基性工作的完成，微积分学已成为研究变数变化规律的最重要、最完整的一门科学。20 世纪以来在坚实理论基础上的微积分学得到了继续的发展。本书主要阐述微积分学的最基本的理论和方法，以及它在几何学和微分方程理论中的若干应用。实际上微积分学的发展今天已远远超出了本书叙述的范围，所以就广义来讲本书只是全部高等数学的一个引论。

科学在发展，教学需不断改进。本教材只是高等数学教学改革的一种尝试。由于编者水平有限，改革的经验还有待在实践中不断总结和完善，不当之处在所难免，我们恳切地希望能得到广大读者的宝贵意见和建议。

在本书的编写过程中，得到蒋尔雄教授、顾传青教授和上海大学数学系老师们的许多帮助。本书的编写还得到上海市教委高校重点教材建设项目基金的资助和上海大学教务处的大力支持，编者在此谨表示衷心的感谢。

朱正佑

上海大学理学院数学系

2004 年 5 月

目　　录

第八章　无穷级数 …… 1

§1　数项级数和它的基本性质 …… 3

§2　正项级数 …… 14

§3　级数收敛性的其他判别法 …… 29

§4　函数项序列和函数项级数 …… 35

§5　幂级数 …… 55

§6　函数的泰勒展式 …… 67

§7　傅里叶级数 …… 80

第九章　空间解析几何初步 …… 119

§1　空间直角坐标系和向量 …… 119

§2　向量的坐标 …… 129

§3　向量的数量积、向量积和混合积 …… 136

§4　空间中的平面和直线 …… 149

第十章　多元函数微分学 …… 169

§1　平面上的点集 …… 171

§2　空间的曲面、曲线和函数的图形 …… 180

§3　多元函数的极限与连续性 …… 192

§4　多元函数的微分和偏导数 …… 203

§5　高阶偏导数和泰勒公式 …… 221

§6　隐函数定理 …… 230

§7　微分法在几何上的应用 …… 238

§8　多元函数的极值和条件极值 …… 248

第十一章　多元函数的重积分 …… 266

§1　含参变量的积分 …… 266

§2　二元函数和三元函数的重积分 …… 280

§3 化重积分为累次积分 …… 289
§4 变数变换 …… 308
§5 重积分的若干应用 …… 322
第十二章 曲线积分和曲面积分 …… 338
§1 两种不同类型的曲线积分和曲面积分 …… 338
§2 格林公式 …… 370
§3 积分与路径无关的条件 …… 383
§4 高斯公式 …… 390
§5 斯托克斯公式和积分与路径无关的条件 …… 397
第十三章 常微分方程 …… 408
§1 基本概念 …… 408
§2 若干一阶微分方程的解法 …… 420
§3 可降阶的二阶微分方程 …… 446
§4 高阶线性微分方程 …… 453
§5 n 阶常系数齐次线性方程 …… 465
§6 n 阶常系数线性非齐次方程的解 …… 477
参考书目 …… 490

第八章　无 穷 级 数

在小学时读者已经学过两个数的加减运算，但是无穷多个数相加是否仍为一个数？如果是一个数，则这个数如何计算，它是否和加法的次序无关？它是否满足结合律？等等，这些就是本章要讨论的无穷级数的理论。从古希腊时代起就有一些哲学家、数学家研究过无穷多个数的相加问题。例如公元前 5 世纪古希腊的芝诺曾提出一个著名的阿基里斯（人名）和乌龟赛跑的问题：假设起跑时乌龟的起跑点领先阿基里斯一段距离 s，乌龟和阿基里斯的速度分别为 v_1 和 v_2，其中 $v_1 < v_2$。问起跑多少时间阿基里斯可以追到乌龟。因为阿基里斯跑到乌龟起跑点时用了时间 $t_1 = \frac{s}{v_2}$，在这段时间里乌龟爬行了距离 $s_1 = v_1 t_1 = \frac{v_1}{v_2} s$。阿基里斯继续跑完距离 s_1 所需时间 $t_2 = \frac{s_1}{v_2} = \frac{s}{v_2}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)$，这时乌龟又向前爬行了一段距离 $s_2 = v_1 t_2 = s\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2$。当阿基里斯花了时间 $t_3 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s}{v_2}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2$ 赶到乌龟的地方，乌龟又向前爬行了距离 $s_3 = v_1 \cdot t_3 = s\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^3$。继续这一过程，阿基里斯追到乌龟所花的时间应该是 t_1，t_2，t_3，…无穷多个数之和，也就是以$\frac{s}{v_2}$为首项、以$\frac{v_1}{v_2}$为公比的几何级数

$$\frac{s}{v_2} + \frac{s}{v_2}\left(\frac{v_1}{v_2}\right) + \frac{s}{v_2}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 + \cdots \tag{1}$$

但在古希腊时代无法想像无穷多个数相加是什么意思，从而这个“阿基

里斯”问题成为当时人们的一个争论问题。公元前 4 世纪的宋人庄周曾在他的著作《庄子·天下篇》中提出了“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的观点。这是一个涉及无穷多个数 $\frac{1}{2}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^2$，…，$\left(\frac{1}{2}\right)^n$，…相加不超过 1 的问题。

直至 19 世纪初虽然人们对无穷多个数相加，即无穷级数的确切含义仍是含糊不清，但一些哲学家和数学家根据直观经验成功地得到了一些无穷级数的正确计算公式。例如 14 世纪的苏依塞斯给出了公式

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots=2 \tag{2}$$

16 世纪的韦达给出了几何级数的求和公式

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots=\frac{a}{1-q} \quad (|q|<1) \tag{3}$$

17 世纪的麦尔卡脱给出了对数的级数公式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots \tag{4}$$

17 世纪的牛顿和莱布尼兹也得到了一些级数的计算公式，如

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \tag{5}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots \tag{6}$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\cdots \tag{7}$$

特别在(7)中，令 $x=1$，得到了公式

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots \tag{8}$$

然而由于对无穷级数没有一个确切的定义，所以也出现了许多谬误。例如，莱布尼兹、欧拉等一些数学家都曾认为

$$1-1+1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2} \tag{9}$$

这是因为若 $S=1-1+1-1+1-1+\cdots$，则

$$S=1-(1-1+1-1+1-1+\cdots)=1-S.$$

所以 $S=\frac{1}{2}$。

进入19世纪后，高斯和阿贝尔都指出要合理地把无穷级数看成是一个数，必须给出收敛的定义。柯西的重大贡献之一就是从极限概念出发给出了无穷级数代表一个数的严格定义。柯西之后，无穷级数的发展出现了突飞猛进的势头。同时也出现了无穷多个函数相加的函数级数的理论，它为函数的构造开辟了一个新天地。

高等数学中只涉及收敛的无穷级数。但随着科学技术的无止境的发展，在一定场合中我们还会碰到各种发散级数。对于发散级数的研究已超出了本书讨论范围，有兴趣的读者可参见有关发散级数的著作和文献。

§1 数项级数和它的基本性质

1.1 数项级数

给定一个数列

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots \tag{1.1}$$

当考察这无穷多个数相加时，我们引进表达式

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \tag{1.2}$$

我们把表达式(1.2)称为一个数项级数或简称级数。级数(1.2)也被简写成 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$。级数(1.2)中的 u_n 称为这个级数的第 n 项。用 S_k 表示级数(1.2)中前 k 项的和，即

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} u_n \tag{1.3}$$

称 S_k 是级数(1.2)的前 k 项部分和。当 k 变动时,我们得到一个由(1.2)的部分和组成的数列

$$S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \cdots$$

定义 1.1 若 $n \to \infty$ 时,(1.2)的部分和数列 S_n 收敛到数 S,即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

则称级数(1.2)是收敛的,S 称为这个级数的和,记为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1.4}$$

若 $n \to \infty$ 时,(1.2)的部分和数列发散或不存在极限,则称级数(1.2)是发散的。发散的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 不表示任何数。

例 1 考察等比级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \tag{1.5}$$

其中 $a \neq 0$ 为常数,q 为公比。(1.5)的前 n 项部分和

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q} - \dfrac{a}{1-q}q^n & q \neq 1 \\ na & q = 1 \end{cases} \tag{1.6}$$

由(1.6)知,当 $|q| < 1$ 时有 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$,所以等比级数(1.5)收敛,并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q} \quad (|q| < 1)$$

当 $q \geqslant 1$ 时极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在,所以等比级数(1.5)发散,从而等比级数

$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 不代表任何数。特别当 $a=1$，$q=-1$ 时级数

$$1-1+1-1+1-1+\cdots$$

是发散的，它不代表任何数，所以(9)是不正确的。

例 2 考察级数

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} \tag{1.7}$$

因为级数(1.7)的前 n 项部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=1$，所以级数(1.7)收敛，并且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$。

例 3 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 的收敛性。

解 因为这个级数的前 n 项部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln k]=\ln(n+1) \end{aligned}$$

由于 $n\to\infty$ 时数列 $\{S_n\}=\{\ln(n+1)\}$ 是发散的，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 发散。

若级数(1.2)给定，则由(1.3)完全确定了它的前 n 项部分和组成的数列 $\{S_n\}$。反之，如果给定了数列 $S_n(n=1,2,\cdots)$，只要取

$$u_1=S_1,\ u_2=S_2-S_1,\cdots,u_k=S_k-S_{k-1},\cdots \tag{1.8}$$

这时 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 的前 n 项部分和

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = S_1 + (S_2 - S_1) + \cdots + (S_n - S_{n-1}) = S_n$$

根据这种级数和它的部分和数列之间的对应关系，可以预测，若数列的极限有某一性质，则在级数理论中必具有相应的性质，反之亦然。

1.2 级数的基本运算法则

相应于数列极限的运算法则，级数具有如下运算法则。

（1）若 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 都收敛，则 $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k)$ 收敛，且

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} v_k$$

（2）若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛，则对任意常数 c，级数 $\sum_{k=1}^{\infty} (cu_k)$ 收敛，且

$$\sum_{k=1}^{\infty} cu_k = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

（3）任意改变级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 中的有限项 u_k，不改变级数的收敛性。

运算法则(1)、(2)的证明很简单，请读者自己完成。为了证明(3)，我们假设 $\sum_{k=1}^{n} u_n$ 和 $\sum_{k=1}^{n} v_k$ 之间有如下关系：$u_k = v_k (k > N$ 时)，令 $w_k = u_k - v_k (k = 1, 2, \cdots)$，则当 $k > N$ 时 $w_k = 0$。容易验证，级数 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ 是收敛的。因 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k - w_k)$，故由性质(1)得知性质(3)成立，证毕。

当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，其和为 S 时，按定义它的部分和 S_n 收敛到 $S (n \to \infty)$。所以 $S_n = u_1 + \cdots + u_n$ 是 S 的一个近似。它们之间的误差为

$$r_n = S - S_n$$

r_n 称为用 S_n 代替 S 时的余项。现在把级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ 中的前 n 项都改为零，得到一个级数

$$0 + 0 + \cdots + 0 + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

因为这个级数的前 n 项为零，所以把它记为 $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$。按性质(3)这个级数仍是收敛的。不难证明

$$r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \tag{1.9}$$

当 S 的准确值不易求得并希望用某个 S_n 近似表示 S 时，对余项 r_n 的大小作出估计是十分重要的，(1.9)提供了一种余项的级数表达式。

性质(1)和(2)分别对应于数列极限运算法则：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}(ka_n) = k \lim\limits_{n\to\infty} a_n$。下面的性质相应于收敛数列的任一子数列必收敛，并且有相同的极限。

(4) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则对这个级数的项任意加括号后所生成的级数

$$(u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) + \cdots$$

仍收敛，且其和不变。

证明　记级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项部分和为 S_n，加括号后所生成的级数的前 k 项部分和为 σ_k，则

$$\sigma_1 = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1} = S_{n_1}$$
$$\sigma_2 = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) = S_{n_2}, \cdots$$
$$\sigma_k = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) = S_{n_k} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

所以 $\{\sigma_k\}$ 是 $\{S_n\}$ 的一个子数列。因为 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，所以

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_k = \lim_{k\to\infty} S_{n_k} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

这表示加括号后生成的级数是收敛的，且其和不变。

应该指出的是加括号后生成的级数收敛并不能保证原先没有加括号的级数是收敛的。例如级数 $1-1+1-1+1-1+\cdots$ 是发散的，但每两项加一括号后得到的级数 $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$ 是收敛的。

下面考察两个级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \text{ 和 } v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots$$

的乘法运算法则。仿照有限个数之和的相乘运算，作出这两个级数的项的所有可能的乘积 $u_i v_j\,(i,\ j=1,\ 2,\cdots)$。这无穷多个数可以有许多方法把它们排列成一个数列。例如可分别按图 8.1 或图 8.2 所示箭头次序排成一个数列，它们分别称为两个级数相乘的对角线排列法和正方形排列法。

按对角线排列法得到数列

$$u_1v_1，u_1v_2，u_2v_1；u_1v_3，u_2v_2，u_3v_1；\cdots$$

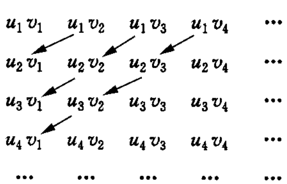

图 8.1　对角线排列法

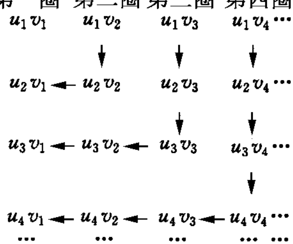

图 8.2　正方形排列法

按正方形排列法，得到数列

$$u_1v_1；u_1v_2，u_2v_2，u_2v_1；u_1v_3，u_2v_3，u_3v_3，u_3v_2，u_3v_1；\cdots$$

一般地讲，即使级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，把所有形如 $u_i v_j$ $(i, j = 1, 2, \cdots)$ 的项排成一个数列后，对这个数列作和得到的无穷级数有可能不是收敛的，即使收敛，其和也不一定等于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的乘积。所以我们必须仔细研究如何利用数列极限的乘法运算法则来导出相应的级数相乘的运算法则。

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，其和分别记为 a 和 b。令

$$S_n(u) = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$S_n(v) = v_1 + v_2 + \cdots + v_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的和分别为 a 和 b 知

$$\lim_{n\to\infty} S_n(u) = a$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(v) = b$$

于是由数列极限的乘法法则得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_n(u) S_n(v) &= \lim_{n\to\infty} (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \cdot (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) \\ &= a \cdot b\end{aligned}$$

现在作一个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$，使得它的前 n 项部分和 $S_n(w)$ 为

$$S_n(w) = w_1 + \cdots + w_n = S_n(u) S_n(v) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 必收敛且其和为 $a \cdot b$。根据级数和其部分和的关系 (1.8)，我们得到

$$w_1 = u_1 v_1 \tag{1.10a}$$

$$\begin{aligned} w_n &= S_n(u)S_n(v) - S_{n-1}(u)S_{n-1}(v) \\ &= (u_1 + \cdots + u_n)(v_1 + \cdots + v_n) - (u_1 + \cdots + u_{n-1})(v_1 + \cdots \\ &\quad + v_{n-1}) \\ &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1})v_n + u_n v_n + (v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1})u_n \\ &\quad (n = 2, 3, \cdots) \end{aligned} \tag{1.10b}$$

这样,我们得到关于级数相乘的下述运算法则。

(5) **乘法法则:设级数** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **和** $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ **都收敛,其和分别为** a **和** b**,则级数** $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ **必收敛,且其和为** $a \cdot b$**,其中** w_n **由**(1.10)**给出。**

注意到(1.10)**给出的** w_n **正好是级数相乘的正方形排列时,位于第** n **圈上的** $u_i v_j$ **的和**(**见图** 8.2)。**所以级数的乘法法则可简述成:若** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **和** $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ **都收敛,则按级数相乘的正方形排列法的级数中把每一圈上的** $u_i v_j$ **加上括号先相加,这样得到的级数必收敛,其和为** $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right)$。

相应于数列极限存在的柯西准则,对级数的收敛性也有相应的柯西收敛准则。

(6) **柯西收敛准则:级数** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛的充要条件是对任给** $\varepsilon > 0$**,存在正整数** N**,使得对一切** $n > N$ **和任意正整数** p **有**

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon \tag{1.11}$$

证明 **令** $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$**,则** $| S_{n+p} - S_n | = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right|$**,所以由数列** S_n **收敛的柯西收敛准则立刻知性质**(6)**成立,证毕。**

如果在性质(6)**中取** $p = 1$**,则当级数** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛时,对任给** $\varepsilon > 0$**,必存在正整数** N**,使得当** $n > N$ **时有** $| u_{n+1} | < \varepsilon$**,从而** $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$。**这样,**

我们得到了级数收敛的一个如下所述的必要条件。

(7) 级数收敛的必要条件：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$$

此外，由于我们总有不等式 $\left| \sum_{k=1}^{n} u_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} | u_k |$，所以由(6)得到如下性质。

(8) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} | u_n |$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛。

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} | u_n |$ 收敛。由性质(6)知，对任给 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，当 $n > N$ 时对任意 p 有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leqslant \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} | u_k | \right| < \varepsilon$$

从而由性质(6)的充分性知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，证毕。

根据性质(8)，把收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 分成两类。一类是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} | u_n |$，是收敛的，这类级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 称为是绝对收敛的。另一类是虽然级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} | u_n |$ 发散，这类收敛的级数称为是条件收敛的级数。

例 4 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5} \right)^{\frac{1}{n}}$ 的收敛性。

解 因为 $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{5} \right)^{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$，所以由级数收敛的必要条件(性质(7))知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5} \right)^{\frac{1}{n}}$ 发散。